دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

تعمیم نظریهٔ استورم-لیوویل برای عملگر بسلِ کسری

سیدسیف‌اله موسی‌زاده *

استادیار، گروه ریاضی محض (آنالیز مجانبی)، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۵/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۳/۲۴

چکیده

در این مقاله، نظریهٔ طیفی را برای مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ یک مسألهٔ مقدار مرزی شامل عملگر خطی بسلِ کسری ارائه می‌کنیم. بعلاوه ما نشان می‌دهیم که این عملگر، خودالحاقی است، مقادیر ویژهٔ مسألهٔ مقدار مرزی حقیقی هستند و توابع ویژهٔ متناظرشان متعامدند.

واژه‌های کلیدی: مسألهٔ مقدار مرزی، مقادیر ویژه، توابع ویژه، نظریهٔ طیفی.

*. عهده‌دار مکاتبات:

Email: s.mosazadeh@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

نظریهٔ استورم–لیوویل، اولین نظریهٔ کیفی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل که به بررسی وجود و رفتار مجانبی مقادیر ویژهٔ یک مسألهٔ مقدار مرزی، بررسی کیفی توابع ویژه و بسط توابع به شکل سری نامتناهی بر حسب توابع ویژه می‌پردازد، ابتدا در بین سال‌های ۱۸۳۶–۱۸۳۷ میلادی توسط دو ریاضیدان فرانسوی به نام‌های چارلز فرانسوا استورم (۱۸۰۳–۱۸۵۵ م.) و جوزف لیوویل (۱۸۰۹–۱۸۸۲ م.) مطرح گردید. شکل کلی مسألهٔ مورد مطالعه به وسیلهٔ این دو ریاضیدان شامل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y \qquad (۱)$$

روی بازهٔ (a,b) همراه با شرایط مرزی

$$\begin{cases} p(a)y'(a) - hy(a) = 0 \\ p(b)y'(b) + Hy(b) = 0 \end{cases} \qquad (۲)$$

است که λ یک پارامتر طیفی، توابع p، q و r حقیقی و مثبت و h و H ضرائب ثابتی هستند. البته پرداختن به موضوعاتی مانند مسألهٔ ارتعاش و انتقال حرارت موجب شد تا عمدهٔ فعالیت‌های استورم و لیوویل به سمت مطالعهٔ مسألهٔ (۱)–(۲) سوق یابد. همچنین دو قضیهٔ مشهور استورم به نام‌های "قضایای نوسان و مقایسه‌ای استورم" که به ویژگی‌های مقادیر ویژه و رابطهٔ بین ریشه‌های توابع ویژهٔ (۱)–(۲) می‌پردازند در تجزیه و تحلیل بسیاری از مسائل مربوط به برخی علوم مدرن از جمله فیزیکِ ریاضی کاربرد دارند که به تفصیل در این‌باره پرداخته شد [۱].

در این پژوهش، یک مسألهٔ مقدار مرزی شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل از نوع بسلِ کسری به همراه شرایط مرزی تفکیک‌پذیر روی بازهٔ $[0,1]$ را در نظر می‌گیریم و تعمیم نظریهٔ طیفی برای مقادیر ویژه و توابع ویژهٔ متناظر با مسألهٔ فوق را تشریح می‌کنیم.

۲- مفاهیم و نتایج مقدماتی

در این بخش، برخی تعاریف که در ادامهٔ مقاله استفاده خواهند شد را بیان می‌کنیم و بعضی نتایج اولیه ارائه می‌شود.

تعریف۲-۱: فرض کنید تابع f روی بازهٔ $[0,1]$ تعریف شده باشد و $0 < \alpha \leq 1$. دراین‌صورت برای $x > 0$،

$$\left(I_{0,+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

انتگرال کسری چپ ریمان–لیوویل، و برای $x < 1$،

$$\left(I_{1,-}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt$$

انتگرال‌کسری راست ریمان–لیوویل از مرتبهٔ α تابع f روی بازهٔ $[0,1]$ نامیده می‌شوند که در اینجا Γ تابع گاما است. همچنین

$$\left(D_{0,+}^{RL,\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt,$$

$$\left(D_{1,-}^{RL,\alpha} f\right)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt$$

مشتقات چپ و راست ریمان–لیوویل، و

$$\left(D_{0,+}^{C,\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt,$$

$$\left(D_{1,-}^{RL,\alpha} f\right)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^1 \frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt$$

مشتقات چپ و راست کاپوتو از مرتبهٔ α تابع f روی بازهٔ $(0,1)$ نامیده می‌شوند.

حال برای $0 < \alpha < 1$، عملگر بسلِ کسری از مرتبهٔ ν، $\mathrm{B}_{\nu}^{\alpha}$، را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha} := -D_{1,-}^{RL,\alpha} p(x) D_{0,+}^{C,\alpha} + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}, \quad \nu \geq 0. \qquad (۳)$$

متناظر با $\mathrm{B}_{\nu}^{\alpha}$، مسألهٔ مقدار مرزی بسل کسری شامل معادلهٔ

$$\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha} y = \lambda r(x)y, \quad x \in (0,1] \qquad (۴)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} y(0) + I_{1,-}^{1-\alpha}\left(p(x) D_{0,+}^{RL,\alpha} y(x)\right)|_{x=0} = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad (۵)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $\lambda = \rho^2$ پارامتر طیفی، تابع p روی بازهٔ $[0,1]$ حقیقی‌مقدار، پیوسته و غیرصفر است و تابع r روی $[0,1]$ همواره مثبت است.

تعریف۲ -۲: اگر f و g دو تابع مختلط‌مقدار با دامنهٔ مشترک D باشند و $z_0 \in D$. آن‌گاه می‌نویسیم

$$f(z) = O(g(z))$$

وقتی $z \to z_0$، هرگاه اعداد مثبت K و δ موجود باشند به‌طوری که برای zهایی که $0 < |z - z_0| < \delta$، داشته باشیم

$$|f| \leq K|g|.$$

نکته۲-۳: هرگاه در (۳)، به جای $D_{1,-}^{RL,\alpha}$ و $D_{0,+}^{C,\alpha}$، $\frac{d}{dx}$ قرار گیرد آن‌گاه معادلهٔ بسل (۴) با $r(x) = 1$ به ازای $\nu = 0$ دارای مجموعهٔ اساسی

$$\left\{x^{\frac{1}{2}}J_0\left(x\sqrt{\lambda}\right), x^{\frac{1}{2}}Y_0\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right\},$$

به ازای $0 < \nu < 1$ دارای مجموعهٔ اساسی

$$\left\{x^{\frac{1}{2}}J_\nu(x\sqrt{\lambda}), x^{\frac{1}{2}}J_{-\nu}(x\sqrt{\lambda})\right\}$$

(J_ν و Y_ν به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم از مرتبهٔ ν هستند) و به ازای مقادیر $k_0 = -2, -1, 0, 1$، در قطاع‌های S_{k_0} که به صورت

$$S_{k_0} := \left\{\rho : arg\,\rho \in [\tfrac{k_0\pi}{2}, \tfrac{(k_0+1)\pi}{2}]\right\}$$

هستند دارای یک مجموعهٔ اساسی $\{y_1(x,\rho), y_2(x,\rho)\}$ با نمایش مجانبی زیر وقتی $|\rho|x \to \infty$ برای $\rho \in \overline{S_{k_0}}$ و $k, m = 1,2$ است:

$$y_k^{(m-1)}(x,\rho) = (\rho R_k)^{m-1}\exp(\rho R_k x)\ \left(1 + O(\tfrac{1}{\rho x})\right),$$

که در آن R_k به‌صورت

$$R_k = (-1)^{k+1}i$$

است [۲و۳و۴].

تعریف۲-۴: هرگاه L یک عملگر خطی و $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری V باشد آن‌گاه L نسبت به ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ خودالحاقی نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو عنصر y و z از فضای V داشته باشیم

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, Lz\rangle,$$

در غیر این صورت، L را غیرخودالحاقی می‌نامند.

۳- نظریهٔ طیفی برای مسألهٔ بسلِ کسری

برای هر دو تابع جواب y و z از مسألهٔ مقدار مرزی (۴)-(۵)، ضرب داخلی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\langle y, z\rangle := \int_0^1 y(x)z(x)dx.$$

قبل از بیان نتایج اصلی این بخش، لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم۳-۱: ([۵]) برای سه تابع g،f و h رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\int_0^1 f(x)\, D_{1,-}^{RL,\alpha}\left(g(x)D_{0,+}^{C,\alpha}h(x)\right)dx = \int_0^1 g(x)\, D_{0,+}^{C,\alpha}\left(f(x)D_{0,+}^{C,\alpha}h(x)\right)dx - f(x)I_{1,-}^{1-\alpha}\left(g(x)D_{0,+}^{C,\alpha}h(x)\right)|_0^1.$$

اکنون اولین نتیجهٔ این بخش درباره عملگر B_ν^α را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه۳-۲: عملگر بسل کسری B_ν^α روی بازهٔ $[0,1]$ خودالحاقی است.

اثبات: فرض کنید y و $\tilde{y}$ دو تابع جواب از مسألهٔ مقدار مرزی (۴)-(۵) باشند. بنابراین طبق ضابطهٔ عملگر خطی بسل کسری در (۳) می‌توان نوشت

$$\left\langle \mathbf{B}_\nu^\alpha y, \tilde{y}\right\rangle = \int_0^1 \mathbf{B}_\nu^\alpha y(x).\,\tilde{y}(x)dx =$$

$$\int_0^1 \tilde{y}(x)\left(-D_{1,-}^{RL,\alpha}p(x)\left(D_{0,+}^{C,\alpha}y(x)\right)+\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}y(x)\right)dx = -\int_0^1 \tilde{y}(x)D_{1,-}^{RL,\alpha}p(x)\left(D_{0,+}^{C,\alpha}y(x)\right)dx + \int_0^1 \frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}y(x)\tilde{y}(x)dx\,.$$

پس طبق لم۳–۱ و با توجه به اینکه y و $\tilde{y}$ در (۵) صدق می‌کنند داریم

$$\left\langle \mathbf{B}_{\nu}^{\alpha} y, \tilde{y}\right\rangle = -\int_0^1 p(x)D_{0,+}^{C,\alpha}\tilde{y}(x)\left(D_{0,+}^{C,\alpha}y(x)\right)dx + \tilde{y}(x)I_{1,-}^{1-\alpha}\left(p(x)D_{0,+}^{C,\alpha}y(x)\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}y(x)\tilde{y}(x)dx = -\int_0^1 p(x)D_{0,+}^{C,\alpha}\tilde{y}(x)\left(D_{0,+}^{C,\alpha}y(x)\right)dx + \int_0^1 \frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}y(x)\tilde{y}(x)dx + y(0)\tilde{y}(0). \quad (۶)$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که حاصل $\left\langle y, \mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}\tilde{y}\right\rangle$ نیز برابر عبارت اخیر در سمت راست رابطهٔ (۶) است و در نتیجه به دست می‌آید $\left\langle \mathbf{B}_{\nu}^{\alpha} y, \tilde{y}\right\rangle = \left\langle y, \mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}\tilde{y}\right\rangle$.

قضیه۳–۳: مقادیر ویژهٔ مسألهٔ مقدار مرزی کسری (۴)–(۵) حقیقی‌اند.

اثبات: فرض کنید λ یک مقدار ویژهٔ مسألهٔ مقدار مرزی (۴)–(۵) و y نیز تابع ویژهٔ متناظر با λ باشد. در این صورت برای $\bar{y}$، مزدوج مختلط y، نتیجه می‌شود

$$\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}\bar{y} = \lambda r(x)\bar{y}, \quad 0 < x \le 1 \quad (۷)$$

$$\begin{cases} \bar{y}(0) + I_{1,-}^{1-\alpha}\left(p(x)D_{0,+}^{RL,\alpha}\bar{y}(x)\right)\big|_{x=0} = 0 \\ \bar{y}(1) = 0 \end{cases} \quad (۸)$$

با ضرب طرفین رابطه‌های (۴) و (۷) به ترتیب در y و $\bar{y}$، و تفاضل طرفین تساوی‌های به دست آمده، نتیجه می‌گیریم

$$\left(\lambda - \bar{\lambda}\right)y(x)\bar{y}(x)r(x) = \bar{y}(x)\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}y(x) - y(x)\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}\bar{y}(x).$$

از طرفی طبق ضابطهٔ عملگر بسلِ کسری $\mathrm{B}_{\nu}^{\alpha}$ در (۳) و لم۳–۱، می‌توان نوشت

$$\int_0^1 y(x)\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}\bar{y}(x)dx = -\int_0^1 p(x)D_{0,+}^{C,\alpha}\left(y(x)D_{0,+}^{C,\alpha}\bar{y}(x)\right)dx + y(x)I_{1,-}^{1-\alpha}\left(p(x)D_{0,+}^{C,\alpha}\bar{y}(x)\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}y(x)\bar{y}(x)dx. \quad (۹)$$

بنابراین از (۹) و با استفادهٔ مجدد از لم۳–۱ به دست می‌آوریم

$$\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)\int_0^1 y(x)\bar{y}(x)r(x)dx = \int_0^1 \bar{y}(x)\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}y(x)dx - \int_0^1 y(x)\mathbf{B}_{\nu}^{\alpha}\bar{y}(x)dx = \bar{y}(x)I_{1,-}^{1-\alpha}\left(p(x)D_{0,+}^{C,\alpha}y(x)\right)\Big|_0^1 - y(x)I_{1,-}^{1-\alpha}\left(p(x)D_{0,+}^{C,\alpha}\bar{y}(x)\right)\Big|_0^1. \quad (۱۰)$$

این به همراه شرایط مرزی (۵) و (۸) نتیجه می‌دهد

$$\left(\lambda-\bar{\lambda}\right)\int_0^1 |y(x)|^2 r(x)dx = 0.$$

با توجه به اینکه y یک جواب غیربدیهی مسألهٔ (۴)–(۵) است و $r(x) > 0$، از تساوی فوق نتیجه می‌گیریم $\lambda = \bar{\lambda}$، و به این ترتیب حکم حاصل است.

قضیه۳–۴: هرگاه λ و $\tilde{\lambda}$ دو مقدار ویژهٔ متمایز مسألهٔ مقدار مرزی (۴)–(۵)، و y و $\tilde{y}$ به ترتیب توابع ویژهٔ متناظر λ و $\tilde{\lambda}$ باشند آن‌گاه y و $\tilde{y}$ روی بازهٔ $[0,1]$ نسبت به تابع $r(x)$ متعامدند، یعنی

$$\int_0^1 y(x)\tilde{y}(x)r(x)dx = 0.$$

اثبات: فرض کنید چون y و $\tilde{y}$ جواب‌هایی از مسألهٔ (۴)–(۵) متناظر با مقادیر ویژهٔ λ و $\tilde{\lambda}$ هستند، از رابطهٔ (۱۰) و شرایط مرزی (۵) و (۸) به ترتیب برای y و $\tilde{y}$ داریم

$$\left(\lambda-\tilde{\lambda}\right)\int_0^1 y(x)\tilde{y}(x)r(x)dx = 0.$$

در نتیجه از $\lambda \neq \tilde{\lambda}$ حکم به دست می‌آید.

تشکر و قدردانی

نویسندهٔ مقاله مراتب تشکر خود را از دانشگاه کاشان به خاطر حمایت مالی از این اثر در قالب پژوهانه به شمارهٔ ۶۸۲۴۸۲/۶ ابراز می‌دارد.

فهرست منابع

[۱] موسی‌زاده، سیدسیف‌اله، ریشه‌ها، مبانی و سیر تکاملی نظریهٔ استورم–لیوویل، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، سال ۳۶، شمارهٔ ۶، صص ۶۷ تا ۸۷، ۱۳۹۶.

[2] R. Kh. Amirov, V. A. Yurko. On differential operators with singularity and discontinuity conditions inside an interval. Ukrainian Mathematical Journal 53: 1751-1770 (2001)

[3] W. N. Everitt, H. Kalf. The Bessel differential equation and the Hankel transform. Journal of Computational and Applied Mathematics 208: 3-19 (2007)

[4] G. N. Watson. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, second ed. Cambridge University Press, Cambridge (1950)

[5] I. Podlubny. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, Calif, USA (1999)