دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تخصیص بهینه منابع با بکارگیری جواب‌های ایده‌آل

سعید قبادی[۱*]، سعید جهانگیری[۲]

[۱و۲] گروه ریاضی، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، خمینی شهر، اصفهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۹/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۶/۱۰

چکیده

این مقاله یک روش جدید براساس بردار ورودی ایده‌آل برای تخمین ورودی‌ها تحت حفظ اندازه کارایی از یک واحد تصمیم گیرنده وقتی که برخی یا همه خروجی‌های آن افزایش یافته است، پیشنهاد می‌دهد. به‌عبارت دیگر، این مقاله سوال زیر را مطالعه کرده است: تحت حفظ کارایی، به چه میزانی می‌بایستی ورودی‌های یک واحد تصمیم‌گیرنده افزایش یابد در شرایطی که برخی یا همه خروجی‌های آن افزایش داده شده باشد؟ در روش ارایه شده در این مقاله، برخلاف روش‌های پیشنهاد شده دیگر، سوال فوق فقط بر پایه مسایل برنامه‌ریزی خطی تک هدفی پاسخ داده شده است. مساله تخمین ورودی‌ها بر پایه مدل غیر شعاعی راسل پیشرفته مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط لازم و کافی برای تخمین ورودی‌ها بر پایه برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد گردیده است. به‌علاوه، اگر کمبودی در هر یک از مولفه‌های خروجی واحد تصمیم‌گیرنده وجود داشته باشد شناسایی می‌شود. یک مثال با داده‌های واقعی برای توضیح از روش پیشنهادی ارایه شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های معکوس (DEA)، برنامه‌ریزی خطی (LP)، تخصیص منابع، اندازه راسل پیشرفته (ERM)، جواب‌های ایده‌آل.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:ghobadi@iaukhsh.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک ابزار ریاضی در حوزه تحقیق در عملیات براساس برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی عملکرد یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه می‌باشد. این تکنیک نمره کارایی واحد تصمیم‌گیرنده را نسبت به مرز مجموعه امکان تولید که توسط همه واحدهای تصمیم‌گیری تعریف شده است، ارائه می‌دهد. این ابزار مدیریتی مفید، اولین بار توسط چارنز و همکاران [1] پیشنهاد گردیده است و بعد از آن بوسیله بسیاری از محققین جنبه‌های تئوری و عملی آن توسعه یافته است [5-2].

در تحلیل پوششی داده‌ها هدف تعیین اندازه کارایی برای یک واحد تصمیم‌گیرنده با ورودی‌ها و خروجی‌های معین می‌باشد، در حالی‌که در تحلیل پوششی داده‌های معکوس هدف تعیین ورودی‌ها یا خروجی‌های یک واحد تصمیم گیرنده است بطوری‌که دارای کارایی از پیش تعریف شده‌ایی باشد.

مفهوم تحلیل پوششی داده‌های معکوس، اولین بار توسط ژانگ و سو معرفی شده است [6]. بعد از آن برخی از محققین این مفهوم را برای پاسخگویی به سوال زیر به کار گرفته‌اند[11-7]:

سوال: به چه میزان می‌بایستی ورودی‌ها (خروجی‌ها) از یک واحد خاص افزایش داده شود اگر تصمیم‌گیرنده به میزان معینی خروجی‌های (ورودی‌های) آن را افزایش داده باشد بطوریکه اندازه کارایی آن ثابت بماند؟

این سوال با بکارگیری جواب‌های پاراتو (ضعیف) از مسایل برنامه‌ریزی چند هدفی پاسخ داده شده است. البته در برخی حالات خاص، این سوال بوسیله مسایل برنامه ریزی خطی تک هدفی پاسخ داده شده است. به‌علاوه، سوال فوق تحت وابستگی موقت درونی توسط جهانشاهلو و همکاران [12] و قبادی و همکاران [13] و در حضور داده‌های فازی توسط قبادی و همکاران [14] به ترتیب پاسخ داده شده است.

بعد از اولین مطالعه در تحلیل پوششی داده‌های معکوس بوسیله ژانگ و سو [6]، برخی از جنبه‌های تئوری و عملی این مفهوم توسط برخی از محققین مورد مطالعه قرار گرفته است [26-16]. بر طبق ادبیات موجود DEA، علی‌رغم کاربردهای مختلف این تئوری، ولی کاربردهای نه چندان زیادی از تحلیل پوششی داده‌های معکوس گزارش شده است. برخی از این کاربردها عبارتند از: تخصیص منابع [8,27]، تحلیل حساسیت [9] و حفظ یا بهبود مقادیر کارایی [25]. علاوه بر کاربردهای فوق، مفهوم DEA معکوس برای تخمین سطوح ورودی (خروجی) واحد تولیدی حاصل از ادغام دو یا چند واحد تصمیم‌گیرنده برای دستیابی به یک سطح کارایی معین استفاده شده است [14]. همچنین مساله ادغام کردن واحدهای تصمیم‌گیرنده براساس مفهوم DEA معکوس تحت وابستگی موقت درونی داده‌ها [28] و در حضور داده‌های منفی [29] مطالعه شده است. در مساله بازسازی یک مجموعه از واحدها (ادغام یا انشعاب)، مفهوم DEA معکوس برای رسیدن به کارایی بهتر بکار گرفته شده است [16]. مدل‌هایی بر پایه ایده DEA معکوس، جهت شناسایی نوع ادغام (جزئی یا عمده) لازم برای بهبود کارایی واحد تولیدی جدید ارائه شده است [30]. در یک کاربرد عملی، این مفهوم برای به حداقل رساندن انتشار گازهای گلخانه‌ایی یک مجموعه از واحدها با خروجی‌های خاص، استفاده شده است [31].

در این مقاله یک روش جدید برای پاسخ سوال فوق، برخلاف روش‌های پیشنهاد شده دیگر، با بکارگیری فقط مسایل برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد داده است. جواب‌های ایده‌آل برای تخمین ورودی‌ها تحت حفظ کارایی، استفاده شده است. مساله تخمین ورودی در حوزه تحلیل پوششی داده‌های معکوس با بکارگیری مدل ERM بررسی شده است. شرایط لازم و کافی برطبق فقط مسائل برنامه‌ریزی خطی تک هدفی فراهم آورده شده است.

نتایج حاصل از این مطالعه، از نقطه نظر تئوری و محاسباتی حائز اهمیت می‌باشد. این نتایج از دیدگاه تئوری مهم می‌باشد زیرا که مدل غیر شعاعی ERM بر خلاف مدل‌های شعاعی می‌تواند همه عوامل ناکارایی یک DMU را نشان دهد. همچنین این نتایج از منظر محاسباتی نیز مهم می‌باشند زیرا روش پیشنهادی فقط از مسایل LP تک هدفی استفاده نموده است.

ساختار مابقی مقاله به‌صورت زیر است: در بخش دو یک مرور مختصر روی مدل ERM غیر شعاعی ارایه شده

است. بخش سه سوال مذکور را با بکارگیری مسایل برنامه‌ریزی خطی پاسخ داده است، در واقع شامل نتایج اصلی مقاله می‌باشد. در نهایت بخش چهار نتیجه‌گیری مختصری ارایه شده است.

۲- مدل راسل پیشرفته (ERM)

در این بخش مدل ERM که توسط پاستور و همکاران [32] برای اندازه‌گیری کارایی نسبی از یک مجموعه از واحدها معرفی شده، مرور گردیده است. این مدل غیر شعاعی، به ترتیب به‌ورودی‌ها و خروجی‌ها اجازه کاهش و افزایش با نسبت‌های مختلف می‌دهد.

فرض کنید یک مجموعه از n واحد تصمیم‌گیرنده $\{DMU_j: j \in J = \{1, \dots, n\}\}$، بطوریکه DMU_j با مصرف ورودی‌های مثبت چندگانه $x_{ij}\ (i \in I = \{1,2, \dots, m\})$، خروجی‌های مثبت چندگانه $y_{rj}(r \in O = \{1,2, \dots, s\})$ را تولید می‌کند. فرض کنید بردارهای ورودی و خروجی برای DMU_j بوسیله $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^t$ و $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})^t$ به ترتیب نمایش داده شود. مدل زیر [32] برای تخمین اندازه کارایی از واحد تحت ارزیابی $DMU_o\ (o \in J)$ در نظر گرفته شده است:

$$\rho_o^* = min \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^s \varphi_r} \tag{۱}$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{io},\ i \in I,$$
$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{ro},\ r \in 0,$$
$$\theta_i \leq 1,\quad i \in I,$$
$$\varphi_r \geq 1,\ r \in 0,$$
$$\lambda_j \geq 0,\ j \in J.$$

در مدل فوق تابع هدف می‌تواند به‌عنوان نسبت میان متوسط کارایی از ورودی‌ها و خروجی‌ها تفسیر گردد.

تعریف۱.۲: (اندازه کارایی ERM)[32] مقدار بهینه ρ_o^* از مدل (۱) اندازه کارایی ERM از DMU_o نامیده می‌شود. بعلاوه DMU_o، ERM–کارا است اگر و فقط اگر $\rho_o^* = 1$ (این شرط هم ارز با $\theta_i^* = 1$ و $\varphi_r^* = 1$ برای هر i و r می‌باشد).

اگر $(\lambda^*, \theta^*, \phi^*)$ یک جواب بهینه از (۱) باشد، آنگاه

$$0 < \rho_o^* \leq 1$$

و

$$(x^*, y^*) = ((\theta_1^* x_{1o}^*, \cdots, \theta_m^* x_{mo}), (\phi_1^* y_{1o}, \cdots, \phi_s^* y_{so}))$$

یک نقطه تصویر از DMU_o روی مرز کارایی می‌باشد.

۳- DEA معکوس

در این بخش، سوال پیشنهاد شده توسط وی و همکاران [10]، با بکارگیری فقط مسایل LP پاسخ داده شده است. آنها درواقع سوال مهم زیر را مطرح نموده‌اند:

سوال: به چه میزان باید ورودی‌های (خروجی‌ها) یک واحد خاص تحت حفظ کارایی افزایش یابد اگر آن واحد خروجی‌هایش (ورودی‌هایش) به‌میزان معینی افزایش داده شده باشد؟

برای پاسخ به این سوال، فرض کنید خروجی‌های DMU_o از Y_o به $\overline{\beta}_o = Y_o + \Delta Y_o$ بطوری‌که $\Delta Y_o \geq 0$ و $\Delta Y_o \neq 0$ افزایش داده شده باشد. هدف از مساله بالا تخمین بردار ورودی α_o^* می‌باشد بطوری‌که اندازه کارایی ERM از DMU_o همچنان ρ_o^* باقی بماند. در حقیقت:

$$\alpha_o^* = (\alpha_{1o}^*, \alpha_{2o}^*, \dots, \alpha_{mo}^*)^t = X_o + \Delta X_o,$$
$$\Delta X_o \geq 0, \Delta X_o \neq 0.$$

فرض کنید DMU_{n+1} واحد جدید بعد از تغییر دادن ورودی‌ها و خروجی‌های DMU_o را نشان دهد. مدل زیر، کارایی ERM، DMU_{n+1} را اندازه‌گیری می‌کند:

$$\rho_o^{+*} = \min \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^s \varphi_r} \tag{۲۱}$$

$$s.t. \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \lambda_{n+1}\alpha_{io}^* \leq \theta_i \alpha_{io}^*,\ i \in I$$
$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} + \lambda_{n+1}\overline{\beta}_{ro} \geq \varphi_r \overline{\beta}_{ro},\ \mathrm{r} \in 0,$$
$$\theta_i \leq 1,\ i \in I,$$
$$\varphi_r \geq 1,\ \mathrm{r} \in 0,$$
$$\lambda_j \geq 0, j \in J \cup \{n+1\}.$$

اگر مقادیر بهینه مدل‌های (۱) و (۲) مساوی باشند آنگاه کارایی ERM واحد تغییر نکرده است، به‌عبارت دیگر

$$eff(\alpha_o^*, \overline{\beta}_o) = eff(X_o, Y_o).$$

در اینجا اندازه کارایی ERM با $eff(X_o, Y_o)$ نمایش داده شده است.

برای پاسخ سوال، به‌عبارت دیگر برای تخمین ورودی‌ها، مسائل LP زیر در نظر گرفته شده است:

$$\alpha_{io}^{i} = \min \ \ \alpha_{io} \quad i = 1, \dots, m \qquad (۳)$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i^* \alpha_{io}, \quad i \in I,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r^* \overline{\beta}_{ro}, \quad r \in 0,$$
$$\alpha_{io} \geq x_{io}, \quad i \in \mathrm{I},$$
$$\lambda_j \geq 0, \quad j \in J,$$

که $(\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_m^*), \varphi^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_s^*))$ یک جواب بهینه برای مساله (۱) می‌باشد. به‌علاوه $(\lambda, \alpha_o) \in \mathbb{R}^n * \mathbb{R}^m$ بردار متغیرها می‌باشند.

فرض کنید $(\alpha_{1o}^{i}, \alpha_{2o}^{i}, \dots, \alpha_{mo}^{i})$ برای هر $i \in \mathrm{I}$ یک جواب بهینه از مسائل (۳) باشد. این واضح است که $\alpha_o^I = (\alpha_{1o}^1, \alpha_{2o}^2, \dots, \alpha_{mo}^m)$ یک جواب ایده‌ال برای سوال می‌باشد، اما ممکن است که متعلق به مجموعه امکان تولید (PPS) نباشد. فرض کنید s_{io} میزان انحراف i-امین مولفه جواب ایده‌آل از PPS را نمایش دهد. بنابراین داریم:

$$s_{io} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - \alpha_{io}^{i}, \quad i \in \mathrm{I}, \qquad (۴)$$
$$\lambda_j \geq 0, \ j \in J,$$

واضح است که برای هر $i \in I$، $s_{io} \geq 0$ می‌باشد. علاوه بر آن فرض کنید w_i اهمیت نسبی هر یک از مولفه‌های ورودی را نشان دهد (برای محاسبه w_iها روش پیشنهادی در پیوست (الف) ملاحظه گردد). مدل برنامه‌ریزی خطی زیر، برای تخمین ورودی‌ها در نظر گرفته شده است:

$$K_o^* = \min \sum_{i=1}^{m} w_i s_{io} - \varepsilon(\sum_{r=1}^{m} \xi_{ro}) \qquad (۵)$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - \theta_i^* s_{io} = \theta_i^* \alpha_{io}^{i}, \quad i \in I,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - \varphi_r^* \xi_{ro} = \varphi_r^* \overline{\beta}_{ro}, \ \ \mathrm{r} \in \mathrm{O}$$
$$\lambda_j \geq 0, s_{io} \geq 0, \xi_{ro} \geq 0 \quad \forall i, j, r,$$

که $(\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_m^*), \varphi^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_s^*))$ جواب بهینه مساله (۱) می‌باشد. در مدل بالا، ε نشان دهنده روش دو فازی می‌باشد. علاوه بر آن، $(\lambda, s_o, \xi_o) \in \mathbb{R}^n * \mathbb{R}^m * \mathbb{R}^s$ بردار متغیرها می‌باشد.

واضح است که مدل (۵) شدنی می‌باشد.

قضیه زیر نشان می‌دهد چگونه مدل بالا می‌تواند برای پاسخ به سوال فوق یعنی تخمین ورودی‌ها استفاده شود.

قضیه ۳-۱: فرض کنید DMU_o، ERM-کارا باشد و $(\lambda^*, \theta^*, \varphi^*)$ جواب بهینه مساله (۱) باشد. فرض کنید $(\hat{\lambda}^*, \hat{s}_o^*, \hat{\xi}_o^*)$ جواب بهینه مساله (۵) با مقدار بهینه K_o^* باشد. اگر $\alpha_o^* = \alpha_o^I + \hat{s}_o^* > X_o$ و $\beta_o^* = \overline{\beta}_o + \hat{\xi}_o^*$ آنگاه $eff(\alpha_o^*, \beta_o^*) = eff(X_o, Y_o)$.

اثبات: از شدنی بودن $(\hat{\lambda}^*, \hat{s}_o^*, \hat{\xi}_o^*)$ برای مساله (۵)، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* x_{ij} =$$
$$\theta_i^* (\alpha_{io}^I + \hat{s}_{io}^*) \theta_i^* \alpha_{io}^* = \alpha_{io}^*, \qquad (۶)$$
$$i \in I,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* y_{rj} =$$
$$\varphi_r^* (\overline{\beta}_{ro} + \hat{\xi}_o^*) = \varphi_r^* \beta_{ro}^* = \beta_{ro}^*, \qquad (۷)$$
$$\mathrm{r} \in \mathrm{O},$$
$$= \hat{\lambda}_j \ \ \geq 0, \quad j \in J, \qquad (۸)$$

علاوه بر آن، با توجه به مساله (۳) واضح است که:

$$\alpha_{io}^* \geq x_{io}, \quad i \in I. \qquad (۹)$$

بنابراین، بردار $(\bar{\lambda} = (\hat{\lambda}^*, 0), \theta^*, \varphi^*)$ یک جواب شدنی برای مساله (۲) می‌باشد. بنابراین $\rho_o^* \leq \rho_o^{+*}$.

فرض کنید $(\lambda^{+*}, \theta^{+*}, \varphi^{+*})$ یک جواب بهینه برای مساله (۲) باشد. با بکار بردن معادله‌های (۶) و (۷) در مسئله (۲) نامعادله‌های زیر بدست می‌آیند:

$$\theta_i^{+*} (\alpha_{io}^I + \hat{s}_{io}^*) =$$
$$\theta_i^{+*} \alpha_{io}^* \ \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{+*} x_{ij} + \ \lambda_{n+1}^{+*} \alpha_{io}^* =$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{+*} x_{ij} + \lambda_{n+1}^{+*} (\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* x_{ij}),$$

بنابراین

$$\theta_i^{+*} (\alpha_{io}^I + \hat{s}_{io}^*) = \qquad (۱۰)$$
$$\theta_i^{+*} \alpha_{io}^* \geq \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^{+*} + \lambda_{n+1}^{+*} \hat{\lambda}_j^*) x_{ij}, i \in I,$$
$$\varphi_r^{+*} (\overline{\beta}_{ro} + \hat{\xi}_o^*) =$$
$$\varphi_r^{+*} \beta_{ro}^* \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{+*} y_{rj} + \lambda_{n+1}^{+*} \beta_{ro}^* \leq$$
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{+*} y_{rj} + \lambda_{n+1}^{+*} (\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* y_{rj}),$$

بنابراین

$$\varphi_r^{+*}\left(\overline{\beta}_{ro}+\hat{\xi}_{ro}^*\right)=\varphi_r^{+*}\beta_{ro}^* \quad (۱۱)$$
$$\leq \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j^{+*}+\lambda_{n+1}^{+*}\hat{\lambda}_j^*\right)y_{rj}, \qquad r\in O,$$

علاوه بر آن $\lambda_j^{+*}+\lambda_{n+1}^{+*}\hat{\lambda}_j^*\geq 0$ برای هر $j\in J$. اینک برای هر $j\in J$ قرار دهید:

$$\tilde{\lambda}_j:=\lambda_j^{+*}+\lambda_{n+1}^{+*}\hat{\lambda}_j^*.$$

براساس برهان خلف فرض کنید $\rho_o^{+*}<\rho_o^*=1$ بنابراین $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\theta_i^{+*}<1$ یا $\frac{1}{s}\sum_{r=1}^s\varphi_r^{+*}>1$ لذا دو حالت زیر وجود دارد:

الف) فرض کنید $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\theta_i^{+*}<1$. در این حالت برای هر i، $0<\theta_i^{+*}\leq 1$ می‌باشد. بنابراین، حداقل یک $t\in I$ با $\theta_t^{+*}<1$ وجود دارد. همچنین با بکار بردن نا معادله (۱۰) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jx_{tj}\leq\theta_t^{+*}\alpha_{to}^*=\theta_t^{+*}(\alpha_{to}^I+\hat{s}_{to}^*)<\alpha_{to}^I+\hat{s}_{to}^*.$$

از طرف دیگر، اگر فرض قضیه بر قرار باشد آنگاه برای هر i رابطه زیر برقرار می‌گردد:

$$\alpha_{io}^*=\alpha_{io}^I+\hat{s}_{io}^*>x_{io}.$$

تعریف کنید:

$$\zeta_t:=\min\left\{(\alpha_{to}^I+\hat{s}_{to}^*)-\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jx_{tj},\alpha_{to}^I+\hat{s}_{to}^*-x_{to}\right\}. \quad (۱۲)$$

واضح است که $\zeta_t>0$. همچنین برای هر $r\in O$، تعریف کنید $\tilde{\xi}_{ro}=\hat{\xi}_{ro}^*$. علاوه بر آن قرار دهید:

$$\tilde{s}_{io}=\begin{cases}\hat{s}_{io}^* & i\neq t,\\ \hat{s}_{io}^*-\zeta_i & i=t.\end{cases}$$

که $i\in I$. به کمک رابطه (۱۲) رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$\zeta_t\leq(\alpha_{to}^I+\hat{s}_{to}^*)-\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jx_{tj}\Rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jx_{tj}\leq\alpha_{to}^I+(\hat{s}_{to}^*-\zeta_t)$$
$$=\theta_t^*(\alpha_{to}^I+\tilde{s}_{to}) \quad (۱۳)$$

و

$$\zeta_t\leq\alpha_{to}^I+\hat{s}_{to}^*-x_{to}\Rightarrow$$
$$x_{to}\leq\alpha_{to}^I+\hat{s}_{to}^*-\zeta_t\Rightarrow$$
$$x_{to}\leq\alpha_{to}^I+\tilde{s}_{to}.. \quad (۱۴)$$

همچنین، واضح است که اگر $i\neq t$ آنگاه رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_{io}^I+\tilde{s}_{io}=\alpha_{io}^I+\hat{s}_{io}^*>x_{io} \quad (۱۵)$$

به کمک (۱۴) و (۱۵) داریم:

$$\alpha_o^I+\tilde{s}_o\geq x_o. \quad (۱۶)$$

به کمک معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۱۳) رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jx_{ij}\leq\theta_i^{+*}\left(\alpha_{io}^I+\hat{s}_{io}^*\right)$$
$$\leq\left(\alpha_{io}^I+\hat{s}_{io}^*\right)=\theta_i^*\left(\alpha_{io}^I+\tilde{s}_{io}\right), i\neq t \quad (۱۷)$$
$$\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jx_{tj}\leq\alpha_{to}^I+(\hat{s}_{to}^*-\zeta_t)$$
$$=\theta_t^*(\alpha_{to}^I+\tilde{s}_{to}), \quad (۱۸)$$
$$\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jy_{rj}\geq\varphi_r^{+*}\left(\overline{\beta}_{ro}+\hat{\xi}_{ro}^*\right)$$
$$\geq\varphi_r^*\left(\overline{\beta}_{ro}+\tilde{\xi}_{ro}\right),\ \ r\in O, \quad (۱۹)$$

با توجه به اینکه $\tilde{\lambda}\geq 0$ از معادلات (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) نتیجه می‌شود که $(\tilde{\lambda},\tilde{s}_o,\tilde{\xi}_o)$ یک جواب شدنی مساله (۵) می‌باشد بطوری‌که $(\tilde{s}_o,-\tilde{\xi}_o)\leq(\hat{s}_o^*,-\hat{\xi}_o^*)$ و $(\tilde{s}_o,-\tilde{\xi}_o)\neq(\hat{s}_o^*,-\hat{\xi}_o^*)$ زیرا $\tilde{s}_{to}<\hat{s}_{to}^*$. بنابرایین، $(\tilde{s}_o,-\tilde{\xi}_o)$ بزرگتر از $(\hat{s}_o^*,-\hat{\xi}_o^*)$ می‌باشد. که این با فرض جواب بهینه بودن $(\hat{\lambda}^*,\hat{s}_o^*,\hat{\xi}_o^*)$ برای مساله (۵) متناقض است.

ب) فرض کنید $\frac{1}{s}\sum_{r=1}^s\varphi_r^{+*}>1$. در این حالت حداقل یک $t\in O$ وجود دارد بطوری‌که: $\varphi_t^{+*}>1$. با فرض برقراری معادله (۱۱) نامعادله زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jy_{tj}\geq\varphi_t^{+*}(\overline{\beta}_{to}+\hat{\xi}_{to}^*)>\overline{\beta}_{to}+\hat{\xi}_{to}^*.$$

بنابراین، یک مقدار مثبت $\kappa_t>0$ وجود دارد بطوری‌که:

$$\sum_{j=1}^n\tilde{\lambda}_jy_{tj}=\left(\overline{\beta}_{to}+\hat{\xi}_{to}^*\right)+\kappa_t$$
$$=\varphi_t^*\left(\overline{\beta}_{to}+\left(\hat{\xi}_{to}^*+\kappa_t\right)\right) \quad (۲۰)$$

اینک تعریف کنید که برای هر $i \in I$، $\tilde{s}_{io} = \hat{s}^*_{io}$ و برای هر $r \in O$،

$$\tilde{\xi}_{ro} = \begin{cases} \hat{\xi}^*_{ro} & r \neq t, \\ \hat{\xi}^*_{ro} + \kappa_r & r = t. \end{cases}$$

به‌وسیله معادلات (۱۰) و (۱۱) نامعادله‌های زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j x_{ij} \leq \theta_i^{+*}\left(\alpha_{io}^I + \hat{s}^*_{io}\right) \leq \theta_i^*\left(\alpha_{io}^I + \tilde{s}_{io}\right),\ \ i \in I, \qquad (۲۱)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j y_{rj} \geq \varphi_r^{+*}\left(\overline{\beta}_{ro} + \hat{\xi}^*_{ro}\right) \geq \varphi_r^*\left(\overline{\beta}_{ro} + \tilde{\xi}_{ro}\right),\ \ r \neq t. \qquad (۲۲)$$

به کمک معادلات (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) و $\tilde{\lambda} \geq 0$ نتیجه می‌شود که $\left(\tilde{\lambda}, \tilde{s}_o, \tilde{\xi}_o\right)$ یک جواب شدنی مساله (۵) می‌باشد بطوری‌که: $(\tilde{s}_o, -\tilde{\xi}_o) \leq (\hat{s}^*_o, -\hat{\xi}^*_o)$ و $(\tilde{s}_o, -\tilde{\xi}_o) \neq (\hat{s}^*_o, -\hat{\xi}^*_o)$ زیرا $\tilde{\xi}_{to} > \hat{\xi}^*_{to}$. این موضوع مخالف این هست که $\left(\tilde{\lambda}, \hat{s}^*_o, \hat{\xi}^*_o\right)$ جواب بهینه مساله (۵) می‌باشد.

بنابراین در هر دو حالت فرض خلف نقض گردید و بنابراین $\rho_o^{+*} = \rho_o^*$ و اثبات کامل می‌شود.■

ملاحظه ۳-۱: اگر $\hat{\xi}^*_o \neq 0$، آنگاه $\hat{\xi}^*_{ro}$ میزان کمبود خروجی در مولفه rام خروجی از DMU_o را نشان می‌دهد. به‌عبارت دیگر تصمیم‌گیرنده برای حفظ کارایی ERM از DMU_o در حالی‌که بردار ورودی از X_o به α_o^* افزایش می‌یابد، ملزم به افزایش بردار خروجی از Y_o به $\overline{\beta}_o + \hat{\xi}^*_o$ می‌باشد.

مثال ۳-۱: سه واحد تصمیم‌گیری A، B و C را در نظر بگیرید که هریک دو ورودی x_1 و x_2 را برای تولید دو خروجی y_1 و y_2 مصرف می‌کنند. داده‌های ورودی و خروجی و اندازه کارایی ERM در جدول (۲.۳) در پیوست (ب) نشان داده شده است.

اندازه کارایی ERM از DMU_c برابر یک می‌باشد. اگر اندازه کارایی DMU_c بدون تغییر باقی بماند، اما تصمیم گیرنده بخواهد خروجی از $Y_c = (5{,}5)$ به $\overline{\beta}_c = (6{,}6)$ تغییر یابد، ورودی‌های DMU_c چقدر باید افزایش یابد؟ براساس مسئله برنامه‌ریزی خطی (۳)، برای تخمین ورودی‌ها، $\alpha_c^I = (\alpha_{1c}^I, \alpha_{2c}^I) = (1.2{,}1.4)$ یک جواب ایده‌آل برای سوال فوق می‌باشد. برای بررسی این موضوع، مسئله LP (۵) مرتبط با DMU_c بصورت زیر نوشته شده است:

$$\begin{aligned} K_o^* = \min\ & s_{1c} + s_{2c} - \varepsilon\left(\xi_{1c} + \xi_{2,4}\right), \qquad (۲۳) \\ \text{s.t.}\ \ & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 - s_{1c} = 1.2, \\ & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 - s_{2c} = 1.4, \\ & 4\lambda_1 + 8\lambda_2 + 5\lambda_3 - \xi_{1c} = 6, \\ & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 - \xi_{2c} = 6, \\ & \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0, s_{1c} \geq 0, \\ & s_{2c} \geq 0, \xi_{1c} \geq 0, \xi_{2c} \geq 0. \end{aligned}$$

با حل این مدل در طی دو فاز، یک جواب بهینه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(s_{1c}^*, s_{2c}^*, \xi_{1c}^*, \xi_{2c}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}1.2).$$

بنابراین با توجه به قضیه (۱.۳) وقتی خروجی DMU_c به $\overline{\beta}_c = (6{,}6)$ افزایش می‌یابد اگر تصمیم‌گیرنده بخواهد میزان کارایی این DMU را حفظ کند باید ورودی‌ها را به $\alpha_c^* = \alpha_c^I = (1.20{,}2.40)$ افزایش دهد.

فرض کنید تصمیم‌گیرنده بخواهد بردار خروجی DMU_c را از $Y_c = (5{,}5)$ به $\overline{\beta}_c = (5.5{,}6)$ افزایش دهد، چقدر باید بردار ورودی را تغییر دهد بطوریکه اندازه کارایی ERM DMU_c بدون تغییر بماند؟ مسئله LP (۳) متناظر با DMU_c، جواب ایده‌ال $\alpha_c^I = (\alpha_{1c}^I, \alpha_{2c}^I) = (1.2{,}2.0)$ را برای این سوال ارائه می‌دهد. علاوه بر آن با بکارگیری مسئله LP (۵) یک جواب بهینه بدست آمده است:

$$(s_{1c}^*, s_{2c}^*, \xi_{1c}^*, \xi_{2c}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0{,}0.4{,}0.5{,}0{,}0{,}0{,}1.2).$$

بنابراین برطبق قضیه (۱.۳)، اگر بردار ورودی از $X_c = (1{,}2)$ به $\alpha_c^* = \alpha_c^I + S_c^* = (1.2{,}2.4)$ افزایش یابد آنگاه تصمیم گیرنده برای حفظ اندازه کارایی باید بردار خروجی را از $Y_c = (5{,}5)$ به

$\beta_c^* = \overline{\beta}_c + \xi_c^* = (6,6)$ افزایش دهد.

همانطور که ملاحظه می‌گردد DMU_B یک واحد ERM—کارا می‌باشد. اگر اندازه کارایی این واحد بخواهد بدون تغییر بماند اما بردار خروجی از $Y_B = (8,4)$ به $\overline{\beta}_B = (10,6)$ افزایش یابد آنگاه بردار ورودی DMU_B چقدر باید افزایش یابد؟ با بکارگیری مسئله LP (۳) متناظر با DMU_B، یک جواب ایده آل برای سوال فوق $(\alpha_{1B}^I, \alpha_{2B}^I) = (2,1.5)$ بدست آمده است. علاوه بر آن، با حل مسئله LP (۵) در دو فاز، جواب بهینه

$$(s_{1B}^*, s_{2B}^*, \xi_{1B}^*, \xi_{2B}^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0.4,0.3,0,0,0,1,0.4)$$

بدست آمده است. بنابراین با توجه به قضیه (۱.۳) اگر تصمیم‌گیرنده بخواهد اندازه کارایی ثابت بماند باید ورودی را به صورت زیر افزایش دهد:

$$\alpha_B^* = \alpha_B^I + S_B^* = (2.40,1.80).$$

مثال ۳-۲: اینک یک مثال با داده‌های واقعی برای چگونگی بکارگیری روش پیشنهادی در نظر گرفته شده است. این مثال از مرجع [۱۹] اقتباس شده است. در این مثال ۱۴ گروه آموزشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر به عنوان واحدهای تصمیم گیرنده لحاظ شده است. به منظور گردآوری اطلاعات مربوط به این گروه‌های آموزشی چهار پرسشنامه طراحی و مورد استفاده قرار گرفته است. پرسشنامه شماره یک، دو فاکتور میزان رضایت دانشجویان و میزان توجه دانشگاه به گروه مربوطه را مد نظر قرارداده است. پرسشنامه شماره دو میزان رضایت اساتید هر گروه و میزان توجه دانشگاه به گروه مورد توجه قرار داده است. پرسشنامه شماره سه میزان رضایت کارمندان هر گروه و میزان توجه دانشگاه به گروه از دیدگاه کارمندان را منعکس کرده است. پرسشنامه شماره چهار به اطلاعاتی پیرامون امکانات فیزیکی، آموزشی و پژوهشی هر گروه پرداخته است. به علاوه با برخی سوالات، عملکرد آموزشی دانشجویان با توجه به معدل آن‌ها، موفقیت آن‌ها در آزمون تحصیلات تکمیلی و همچنین تعداد ترم‌های ناموفق (مشروطی) آن‌ها سنجیده می‌شود. بر پایه اطلاعاتی که از این چهار پرسشنامه استخراج شده است، دو ورودی و دو خروجی را جهت ارزیابی گروه‌های آموزشی مذکور در نظر گرفته شده است. امکانات (x_1) (تعداد اعضای هیات علمی گروه، مساحت فضاهای آموزشی و اداری گروه، و تعداد کتب موجود در کتابخانه) و میزان توجه دانشگاه به گروه (x_2) به عنوان ورودی و میزان رضایت دانشجویان (y_1) و میزان رضایت اساتید و کارکنان (y_2) به‌عنوان خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته شده است. داده‌های ورودی و خروجی و اندازه کارایی ERM گروه‌های آموزشی در جدول (۳،۳) ارائه شده است.

همانطور که از جدول (۳،۳) ملاحظه می‌گردد چهارمین گروه آموزشی (DMU4) کارای ERM است. فرض کنید که این گروه آموزشی در صدد توسعه خود به گونه ایی باشد بطوری‌که اندازه کارایی خود را حفظ نماید. به عبارتی می‌خواهیم بررسی نمایم که تحت حفظ کارایی این واحد، اگر خروجی‌های این واحد از $(y_1, y_2) = (0.851075, 0.901866)$ به میزان معین $(\Delta y_1, \Delta y_2) = (0.13,\ 0.08)$ افزایش تا به مقدار

$$(\bar{\beta}_{1,4}, \bar{\beta}_{2,4}) = (y_1 + \Delta y_1, y_2 + \Delta y_2) = (0.981075,\ 0.981866)$$

برسد آنگاه ورودی‌های آن می‌بایستی به چه میزانی افزایش نماید؟ در اقع هدف آن است که اگر این گروه آموزشی بخواهد میزان رضایت‌مندی دانشجویان (خروجی اول) و میزان رضایت مندی اساتید و کارکنان (خروجی دوم) به ترتیب حدود ۱۵ و ۹ درصد افزایش یابد، این گروه آموزشی به چه میزان منابع اضافی تحت حفظ کارایی نیازمند است؟ برای پاسخ به این سوال مدل‌های برنامه‌ریزی خطی (۳) متناظر با این واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته شده و جواب ایده‌آل

$$\alpha_4^I = (\alpha_{1,4}^I, \alpha_{2,4}^I) = (0.554214, 0.797347)$$

استخراج گردیده است، سپس بر پایه قضیه ۳-۱ برای مشخص نمودن یک جواب بهینه شدنی، مدل (۵) متناظر با این واحد به صورت زیر در نظرگرفته شده است:

$$K_o^* = \min\ w_1 s_{1,4} + w_2 s_{2,4} - \varepsilon(\xi_{1,4} + \xi_{2,4})$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{14} \lambda_j x_{1j} - s_{1,4} = \alpha_{1,4}^I = 0.554214,$$

$\sum_{j=1}^{14} \lambda_j x_{2j} - s_{2,4} = \alpha_{2,4}^I = 0.797347,$
$\sum_{j=1}^{14} \lambda_j y_{1j} - \xi_{1,4} = 0.981075,$
$\sum_{j=1}^{14} \lambda_j y_{2j} - \xi_{2,4} = 0.797347,$
$\lambda_j \geq 0, s_{i,4} \geq 0, \xi_{r,4} \geq 0 \quad \forall i, j, r.$

$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j y_{rj} = \varphi_r^*(\overline{\beta}_{ro} + \tilde{\bar{\xi}}_{ro})$

با حل این مدل در طی دو فاز، یک جواب بهینه به صورت زیر بدست می‌آید:

$s_{1,4}^* = 0.014210,\ s_{2,4}^* = 0.000961, \xi_{1,4}^* = 0,$
$\xi_{2,4}^* = 0, \lambda_6^* = 0.202678, \lambda_{12}^* = 0.884583,$
$\lambda_j^* = 0, \forall j = \{1,2, \ldots ,14\} - \{6, 12\}.$

بنابراین با توجه به قضیه (۱.۳) وقتی خروجی DMU_4 به $(\bar{\beta}_{1,4}, \bar{\beta}_{2,4}) = (0.981075,\ 0.981866)$ افزایش می‌یابد اگر تصمیم‌گیرنده بخواهد میزان کارایی این DMU را حفظ کند باید ورودی‌ها را به $\alpha_4^* = (\alpha_{1,4}^*,\ \alpha_{1,4}^*) = (0.568424, 0.798308)$ افزایش دهد. در واقع جهت حفظ اندازه کارایی، می‌بایستی حدود ۳ درصد ورودی اول و حدود ۱۲ درصد ورودی دوم این گروه آموزشی را افزایش دهد.
قضیه (۱.۳) فقط برای DMUهای ERM کارا برقرار است اما قضیه زیر برای همه DMUها چه کارا باشند و چه نباشند برقرار است. در واقع این قضیه، عکس قضیه (۱،۳) می‌باشد.

قضیه ۳-۲: فرض کنید $(\lambda^*, \theta^*, \varphi^*)$ جواب بهینه مسئله (۱) با مقدار بهینه ρ_o^* و $(\bar{\lambda}, \bar{s}_o, \bar{\xi}_o)$ یک جواب شدنی مساله (۵) باشد. اگر

$$eff(\alpha_o^* = \alpha_o^I + \bar{s}_o, \beta_o^* = \overline{\beta}_o + \bar{\xi}_o) = eff(X_o, Y_o)$$

آنگاه $(\bar{\lambda}, \bar{s}_o, \bar{\xi}_o)$ یک جواب بهینه مساله (۵) می‌باشد.
اثبات: اگر $(\bar{\lambda}, \bar{s}_o, \bar{\xi}_o)$ جواب بهینه مساله (۵) نباشد، بنابراین یک جواب شدنی دیگر برای این مساله مانند $(\tilde{\lambda}, \tilde{s}_o, \tilde{\xi}_o)$ وجود دارد بطوریکه $(\tilde{s}_o, -\tilde{\xi}_o) \leq (\bar{s}_o, -\bar{\xi}_o)$ و $(\tilde{s}_o, -\tilde{\xi}_o) \neq (\bar{s}_o, -\bar{\xi}_o)$. فرض کنید $I = \{\ i | \tilde{s}_{io} < \bar{s}_{io}\}$ و $O = \{\ r | \tilde{\xi}_{ro} > \bar{\xi}_{ro}\}$ باشند. با توجه به اینکه $(\tilde{\lambda}, \tilde{s}_o, \tilde{\xi}_o)$ یک جواب شدنی مساله (۵) می‌باشد آنگاه:

$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j x_{ij} = \theta_i^*(\alpha_{io}^I + \tilde{s}_{io})$
$< \theta_i^*(\alpha_{io}^I + \bar{s}_{io}), i \in I,$ (۲۴)
$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j x_{ij} = \theta_i^*(\alpha_{io}^I + \tilde{s}_{io})$
$\leq \theta_i^*(\alpha_{io}^I + \bar{s}_{io}), i \not\in I,$ (۲۵)
$> \varphi_r^*(\overline{\beta}_{ro} + \bar{\xi}_{ro}), r \in O,$ (۲۶)
$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j y_{rj} = \varphi_r^*(\overline{\beta}_{ro} + \tilde{\xi}_{ro})$
$\geq \varphi_r^*(\overline{\beta}_{ro} + \bar{\xi}_{ro}), r \not\in O,$ (۲۷)
$\tilde{\lambda}_j \geq 0,\ j \in J.$ (۲۸)

با توجه به نامعادلات (۲۴) تا (۲۶) مقادیر $0 < \zeta_i < 1$ و $\kappa_r > 1$ برای هر $i \in I$ و $r \in O$ وجود دارند بطوری‌که به ترتیب:

$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j x_{ij} \leq (\zeta_i \theta_i^*)(\alpha_{io}^I + \bar{s}_{io}), i \in I$ (۲۹)

و

$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\lambda}_j y_{rj} \geq (\kappa_r \varphi_r^*)(\overline{\beta}_{ro} + \bar{\xi}_{ro}),$
$r \in O.$ (۳۰)

برای همه مقادیر i و r تعریف کنید:

$$\bar{\theta}_i = \begin{cases} \zeta_i \theta_i^* & i \in I, \\ \theta_i^* & i \not\in I, \end{cases}$$

و

$$\bar{\varphi}_r = \begin{cases} \kappa_r \varphi_r^* & r \in O, \\ \varphi_r^* & i \not\in O. \end{cases}$$

با توجه به نامساوی‌های (۲۵)، (۲۷) و (۳۰-۲۸) واضح است که $(\lambda = (\tilde{\lambda}, \lambda_{n+1} = 0), \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ یک جواب شدنی برای مساله (۲) می‌باشد (با در نظر گرفتن $\alpha_o^* = \alpha_o^I + \bar{s}_o$ و $\overline{\beta}_o = \overline{\beta}_o + \bar{\xi}_o$ در مساله (۲)). مقدار تابع هدف مساله LP (۲) در این جواب شدنی برابر است با:

$$\frac{(\frac{1}{m}(\sum_{i \not\in I}^{m} \theta_i^* \zeta_i + \sum_{i \in I}^{m} \theta_i^*)}{(\frac{1}{s}(\sum_{r \not\in O}^{m} \varphi_r^* \kappa_r + \sum_{r \in O}^{m} \varphi_r^*)}.$$

بنابراین:

$$\rho_o^{+*} \leq \frac{\frac{1}{m}(\sum_{i \not\in I}^{m} \theta_i^* \zeta_i + \sum_{i \in I}^{m} \theta_i^*)}{\frac{1}{s}(\sum_{r \not\in O}^{m} \varphi_r^* \kappa_r + \sum_{r \in O}^{m} \varphi_r^*)}$$

$$< \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i^*}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^*} = \rho_o^*.$$

که این با فرض متناقص است و لذا اثبات کامل می‌شود.

ملاحظه ۳-۲: در این مقاله مدل‌ها تحت فرض بازده به مقیاس ثابت بکارگرفته شده‌اند. لازم به تذکر است که نتایج بدست آمده تحت فرض بازده به مقیاس متغیر، افزایشی و کاهشی نیز برقرار می‌باشد.

ملاحظه ۳-۳: در مقاله موجود مساله تخمین ورودی‌ها تحت حفظ کارایی مورد مطالعه قرار گرفت. در یک روش مشابه می‌توان مساله تخمین خروجی‌ها را نیز تحت حفظ کارایی بر پایه تحلیل پوششی داده‌های معکوس تحت مطالعه قرار داد و نتایج مشابهی بدست آورد.

۴- نتیجه‌گیری

این مقاله به مساله تخمین ورودی در حوزه DEA معکوس پرداخته است. در روش پیشنهادی، ابتدا بردار ایده‌آل ورودی محاسبه گردیده است. اگر این بردارها درون PPS نباشد، آنگاه کمترین میزان انحراف لازم از بردار ورودی ایده‌آل برای رسیدن به PPS محاسبه می‌گردد. به‌علاوه، در تخمین ورودی‌ها اگر کمبود خروجی در هر یک از مولفه‌های خروجی وجود داشته باشد، سطح کمبود می‌تواند شناسایی شود. ذکر این نکته مهم ضروری است که این مساله بر پایه مدل‌های شعاعی مطالعه شده است [12,16,24]، اما مطالعه حاضر بر پایه مدل غیر شعاعی ERM انجام شده است. این موضوع از نقطه نظر مدیریتی قابل اهمیت است. زیرا مدل‌های غیرشعاعی توانایی شناسایی همه عوامل ناکارایی واحد را دارد. از طرف دیگر روش ارایه شده در مقاله برخلاف روش‌های پیشنهادی دیگر فقط از مسایل LP تک هدفی استفاده می‌کند. که این از منظر بهینه سازی حائز اهمیت است.

در این پژوهش اگرچه شرایط لازم برای هر واحد ERM-کارا یا ناکارا پیشنهاد شده است، ولی شرایط کافی فقط برای واحدهای ERM کارا ثابت شده است. بنابراین بدست آوردن شرایط کافی برای واحد ERM کارا و توسعه روش پیشنهادی تحت وابستگی موقت درونی داده‌ها می‌تواند به‌عنوان یک موضوع پژوهشی مناسب برای کارهای آتی باشد.

فهرست منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W. W., and Rhodes, E., Measuring the efficiency of decision making units, European Journal of Operational Research, 2 (1978) 429-444.

[2] Banker, R. D., Charnes, A., and Cooper, W. W., Some models for estimating technical and scale efficiencies in data envelopment analysis, Management Science, 30 (1984) 1078-1092.

[3] Cook W. D. and Seiford, L. M., Data envelopment analysis (DEA)-Thirty years on, European Journal of Operational Research, 192 (2009) 1-17.

[4] Cooper, W. W., Seiford, L. M., and Tone, K., Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text With Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Kluwer Academic Publisher (1999).

[5] Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., and Tavana, M., A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making, European Journal of Operational Research, 214 (2011) 457-472.

[6] Zhang, X. S. and Cui, J. C. A project evaluation system in the state economic information system of china an operations research practice in public sectors, International Transactions in Operational Research, 6 (1999) 441-452.

[7] Hadi-Vencheh, A. and Foroughi, A. A., A generalized DEA model for inputs/outputs estimation, Mathematical and Computer Modelling, 43 (2006) 447-457.

[8] Hadi-Vencheh, A. and Foroughi, A. A., and Soleimani-damaneh, M., A DEA model for resource allocation, Economic Modelling, 25 (5) (2008) 983-993.

[9] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Shoja, N., Tohidi, G., and Razavyan, S., Input estimation and identification of extera inputs in inverse DEA models, Applied Mathematice and Computation, 156 (2004) 427-437.

[10] Wei, Q. L., Zhang, J., and Zhang, X., An inverse DEA model for input/output estimate, European Journal of Operational Research, 121 (1) (2000) 151-163.

[11] Yan, H., Wei, Q. L., and Hao, G., DEA models for resource reallocation and production input/output estimation, European Journal of Operational Research, 136 (2002) 19-31.

[12] Jahanshahloo, G. R., Soleimani-damaneh, M., and ghobadi, S., Inverse DEA under inter-temporal dependence using multiple-objective programming, European Journal of Operational Research, 240 (2015) 447-456.

[13] Ghobadi, S., A Generalized DEA Model for Inputs (Outputs) Estimation under Inter-temporal Dependence, RAIRO-Operations Research, (In press). doi.org/10.1051/ro/201 8100.

[14] Ghobadi, S., Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., and Rostamy-Malkhalifeh, M., Dynamic Inverse DEA in the Presence of Fuzzy Data, Advances in Environmental Biology, 8 (24) (2014) 139-151.

[15] Dong-Joon Lim, Inverse DEA with frontier changes for new target setting, European Journal of Operational Research, 254 (2016) 510-516

[16] Emrouznejad, A., Amin, Gh. R., and Gattoufi, S., Modelling generalized firms' restructuring using inverse DEA, Journal of Productivity Analysis, 48 (2017) 51-61.

Technology and Management, (2013) 100-104.

[25] Ghobadi, S., Inverse dea using enhanced russell measure in the presence of fuzzy data. Int. J. Industrial Mathematics 10 (2) (2018) 1-16.

[26] Lin, H. T., An effficiency-driven approach for setting revenue target, Decision Support Systems 49 (2010) 311-317.

[27] Ghobadi, S., A dynamic DEA model for resource allocation. Int. J. of Mathematics in Operational Research (In press).

[28] Zenodin, E., Ghobadi, S., Merging decision-making units under inter-temporal dependence. IMA Journal of Management Mathematics 00 (2019) 1-28. doi.10.1093/I maman/dpz005.

[29] Amin, G. R., and Al-Muharrami, S., A new inverse data envelopment analysis model for mergers with negative data. IMA Journal of Management Mathematics 29 (2) (2016) 137–149.

[30] Amin, G. R., Emrouznejad, A., and Gattoufi, S., Minor and major consolidations in inverse DEA: Definition and determination. Computers & Industrial Engineering 103 (1) (2017) 193–200.

[31] Emrouznejad, A., Yang, G. L., and Gattoufi, S., A novel inverse DEA model with application to allocate the CO2 emissions quota to different regions in Chinese manufacturing industries. Journal of the Operational Research Society 70 (7) (2018) 1-12.

[32] Pastor, J. T., Ruiz, J. L., and Sirvent, I., An enhanced DEA Russell graph efficiency measure, European Journal of Operational Research, 115 (1999) 596-607.

[17] Gattoufi, S., Amin, G. R., and Emrouznejad, E., A new inverse DEA method for merging banks, IMA J Management Math, 25 (2014) 73-87.

[18] Ghobadi, S., Inputs and outputs estimation in inverse dea, Iranian Journal of Optimization, 9 (2) (2017) 119-129.

[19] Ghobadi, S. and Jahangiri, S., Iverse DEA: Review, Extension and Application, International Journal of information Technology and Decision Making, 14 (4) (2015) 805-824.

[20] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rostamy- Malkhalifeh, M., and ghobadi, S., Using Enhanced Russell Model to Solve Inverse Data Envelopment Analysis Problems, Hindawi Publishing Corporation, The Scientific World Journal, (2014) 1-10.

[21] Joro, R., Korhonen, P., and Zionts, S., An interactive approach to improve estimates of value efficiency in data envelopment analysis, European Journal of Operations Research, 149 (2003) 688-699.

[22] Lertworasirikul, S., Charnsethikul, P., and Fang, S. C., Inverse data envelopment analysis model to preserve relative efficiency values: The case of variable returns to scale, Computers and Industrial Engineering, 61 (2011) 1017-1023.

[23] Li, X. and Cui, J., A comprehensive DEA approach for the resource allocation problem based on scale economies classification, Journal of Systems Science and Complexity, 21 (2008) 540-557.

[24] Li, X. and Cui, J., Inverse DEA model with considering returns to scale and elasticity, 11th International Symposium on Operations Research and its Applications in Engineering,

[33] Jahanshahloo, H., Nonradial model to measuring super efficiency and congestion, Ph.D Thesis, Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran (2013).

پیوست (الف)

در مدل (۵) برای مشخص کردن ضرایب w_i، براساس نتیجه موجود در [۳۳]، روش زیر پیشنهاد شده است.
با حل مساله (۳) واضح است که برای هر i، $\{\alpha_{io}^1, \alpha_{io}^2, \dots, \alpha_{io}^m\}$ یک مجموعه جواب برای تخمین i–مین ورودی (α_{io}) می‌باشد. برای هر i تعریف می‌کنیم:

$$\mu_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \alpha_{io}^k$$

و

$$\sigma_i = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m} (\alpha_{io}^k - \mu_k)^2.$$

واضح است که هر چقدر σ_i به صفر نزدیک‌تر شود i–مین ورودی (α_{io}) نسبت به تغیرات جواب‌های بهینه مساله‌های (۳) پایدارتراست.
مجموعه m+1 واحد تصمیم‌گیرنده $\{DMU_i: i = 1, \dots, m+1\}$ بطوریکه DMU_i برای هر $i = 1, \dots, m$ با مصرف ورودی‌های $(\alpha_{io}^1, \alpha_{io}^2, \dots, \alpha_{io}^m)$ خروجی $1/\sigma_i$ را تولید می‌کند و DMU_{m+1} برای تولید خروجی $1/\sigma_{m+1}$، ورودی چندگانه $(\alpha_{1o}^1, \alpha_{2o}^2, \dots, \alpha_{mo}^m)$ را مصرف می‌کند بطوریکه که

$$\mu_{m+1} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ko}^k$$

و

$$\sigma_{m+1} = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m} (\alpha_{ko}^k - \mu_{m+1})^2.$$

این واحد (DMU_{m+1}) را واحد ایده‌آل می‌نامیم. مدل پوششی ورودی محور زیر را برای تخمین کارایی نسبی واحد تحت ارزیابی $(k \in \{1,2, \dots, \mathrm{m}+1\})$ DMU_k در نظر گرفته شده است:

$$\varphi_k^* = \max \ \varphi \qquad (۳۱)$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{m} \mu_j \alpha_{jo}^i + \mu_{m+1}\alpha_{io}^i \le \alpha_{ko}^i, \ \ i \in I,$$
$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{1}{\sigma_j} + \mu_{m+1}\frac{1}{\sigma_{m+1}} \ge \varphi \frac{1}{\sigma_k},$$
$$\sum_{j=1}^{m+1} \mu_j = 1,$$
$$\mu_j \ge 0, \quad j = 1,2, \dots, m+1.$$

در مدل بالا $(\mu, \varphi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ بردار متغیرها می‌باشد. واضح است که $\varphi_{m+1}^* = 1$، زیرا DMU_{m+1} واحد تصمیم گیرنده ایده آل است. واضح است که هر چقدر σ_i بزرگتر باشد آنگاه φ_i^* بزرگتر است. به بیان دیگر، i–امین ورودی α_{io} نسبت به جواب‌های بهینه مساله‌های (۳) پایدار نیست. بنابراین ضرایب w_i متناسب با i–مین متغیر کمکی (s_{io}) باید بزرگتر در نظر گرفته شود تا امکان بهبودی بیشتری داشته باشد.
بنابراین برای هر $i = 1,2, \dots, m,$ $\overline{w}_i = 1 - 1/\varphi_i^*$ تعریف می‌کنیم و در نهایت $w_i = \overline{w}_i / \sum_{j=1}^{m} \overline{w}_i$ در نظر گرفته می‌شود.

پیوست (ب)

جدول (۳،۲): داده‌ها و اندازه کارایی ERM

DMU_o	x_1	x_2	y_1	y_2	θ_1^*	θ_2^*	φ_1^*	φ_2^*	ρ^*
A	4.00	2.00	4.00	4.00	1.00	1.00	4.00	2.00	0.33
B	2.00	2.00	1.00	8.00	4.00	1.00	1.00	1.00	1.00
C	1.00	2.00	5.00	5.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

جدول (۳،۳): ورودی‌ها، خروجی‌ها و اندازه کارایی ERM چهارده گروه آموزشی

واحدهای تصمیم‌گیرنده	x_1	x_2	y_1	y_2	نمره کارایی راسل پیشرفته (ERM)
DMU1	0.385854	0.782695	0.888406	0.874328	0.873784
DMU2	0.53634	0.786386	0.9243461	0.626477	0.68535
DMU3	0.972344	0.852564	0.938600	1.000000	0.681228
DMU4	0.554214	0.712929	0.851075	۶0.90186	1.000000
DMU5	0.358756	0.912581	0.943996	0.818406	0.798765
DMU6	0.417995	0.672647	0.728195	0.908288	1.000000
DMU7	0.511568	0.784326	0.929942	0.909843	0.90261
DMU8	0.388259	0.837351	1.000000	0.650031	1.000000
DMU9	0.558262	0.829015	0.927647	0.796134	0.695143
DMU10	0.272026	0.81424	0.932019	0.883048	1.000000
DMU11	0.198246	0.883972	0.872389	0.799124	1.000000
DMU12	0.546817	0.748349	0.942235	0.901866	1.000000
DMU13	0.558458	0.952591	0.983781	0.901866	0.696523
DMU14	1.000000	1.000000	0.917428	0.901866	0.544484