

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## گراف‌های همبند صحیح تطابقی با مرتبه کوچک

\*

سمیه خلاشی قزل احمد

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۰۲

### چکیده

منظور از یک تطابق در یک گراف مجموعه‌ای از یال‌های مستقل است. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف، چندجمله‌ای است که ضرایب آن تعداد تطابق‌ها در گراف را مشخص می‌کند. یک گراف را **صحیح تطابقی** گوئیم هرگاه تمام ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی آن صحیح باشند. در این مقاله ابتدا نشان می‌دهیم دقیقاً هشت گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه حداکثر هفت وجود دارد. سپس ثابت می‌کنیم اگر  $G$  یک گراف همبند صحیح تطابقی هشت راسی باشد، آن‌گاه  $G$  دارای تطابق سه یالی بوده و اندازه  $G$  برابر چهارده است. در پایان تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی با ماکزیمم درجه حداکثر سه را شناسایی می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** تطابق، چندجمله‌ای تطابقی، گراف صحیح تطابقی.

## ۱- مقدمه

تعریف می‌شود که در آن  $\theta_i$  یک ریشه  $\mu(G, x)$  و  $m_i$  تکرار ریشه  $\theta_i$  است.

اگر  $G$  یک درخت باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای تطابقی  $G$  و چندجمله‌ای مشخصه آن که به صورت چندجمله‌ای مشخصه ماتریس مجاورت  $G$  تعریف می‌شود، یکسان هستند. به علاوه چندجمله‌ای تطابقی هر گراف همبند، عاملی از چندجمله‌ای مشخصه یک درخت است. برای یک گراف مولکولی یعنی گرافی که مولکول‌ها را شبیه‌سازی می‌کند و در آن رئوس بیانگر اتم‌ها و یال‌ها بیانگر پیوند بین اتم‌ها هستند، **انرژی گراف** که به صورت مجموع قدر مطلق ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه تعریف می‌شود، بیانگر تخمین بسیار نزدیکی از انرژی پیوند  $\pi$ -الکترونی در آن مولکول است. انرژی پیوند  $\pi$ -الکترونی با نماد  $E_\pi$  و انرژی گراف با نماد  $E(G)$  نشان داده می‌شود. بنابراین  $E_\pi \equiv E(G)$ . در شیمی نظری ثابت شده است که بخش عمده‌ای از این انرژی مربوط به وجود دور در اتم‌های کربن موجود در مولکول مزدوج مرجع است. این دورها عامل پایداری یا عدم پایداری مولکول هستند. به منظور استخراج نمودن انرژی ناشی از این دورها، یک مرجع غیر حلقوی مورد نیاز است. به تقاض  $E_\pi$  و انرژی این مرجع غیر حلقوی، انرژی رزونانس یا انرژی عدم استقرار گفته می‌شود. انرژی رزونانس توپولوژیکی با نماد  $TRE$  نشان داده می‌شود. برای محاسبه  $TRE$ ، بدین صورت عمل می‌شود که انرژی مرجع با در نظر نگرفتن اثر تمام دورها در چندجمله‌ای مشخصه گراف وابسته به مولکول، محاسبه می‌شود. بدین ترتیب چندجمله‌ای مشخصه به چندجمله‌ای تطابقی و انرژی مرجع به دو برابر مجموع ریشه‌های مثبت چندجمله‌ای تطابقی تقلیل می‌یابد. به دلیل تقارن ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی، مجموع فوق در واقع همان مجموع قدر مطلق ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی است که در نظریه گراف به آن **انرژی تطابقی** گفته می‌شود و با نماد  $ME(G)$  نشان داده می‌شود. بنابراین داریم

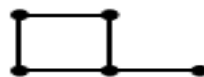
$$TRE(G) = E(G) - ME(G).$$

برای مطالعه بیشتر در این زمینه مرجع [۶] را ببینید. از

تمام گراف‌هایی که در این مقاله در نظر می‌گیریم، متناهی، ساده و غیر جهت دار هستند. فرض کنید  $G$  یک گراف باشد. مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های  $G$  را به ترتیب با نمادهای  $V(G)$  و  $E(G)$  نشان می‌دهیم. منظور از **مرتبه**  $G$ ، تعداد رئوس  $G$  و منظور از **اندازه**  $G$ ، تعداد یال‌های  $G$  است. اندازه گراف  $G$  را با نماد  $|E(G)|$  نشان می‌دهیم. ماکزیمم درجه رئوس  $G$  با  $\Delta(G)$  نشان داده می‌شود. گراف کامل، مسیر و دور از مرتبه  $n$ ،  $n \geq 1$  را به ترتیب با نمادهای  $K_n$ ،  $P_n$  و  $C_n$  نشان می‌دهیم. گراف ستاره از مرتبه  $n+1$  با نماد  $K_{1,n}$  نشان داده می‌شود. یک گراف را **قابل ردیابی** گوئیم هرگاه دارای مسیر همپلتونی باشد. یک  $r$ -**تطابق** در گراف  $G$ ، مجموعه‌ای از  $r$  یال است که هیچ دو تایی با یکدیگر تلاقی ندارند. تعداد  $r$ -تطابق‌ها در  $G$  را با نماد  $p(G, r)$  نشان می‌دهیم. چندجمله‌ای تطابقی گراف  $G$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(G, x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r p(G, r) x^{n-2r},$$

که در آن  $n$  مرتبه  $G$  است و  $p(G, 0)$  برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که  $p(G, 1)$  تعداد یال‌های گراف  $G$  است، ضریب  $x^{n-2}$  در  $\mu(G, x)$  همان اندازه  $G$  است. برای مطالعه بیشتر در زمینه چندجمله‌ای تطابقی یک گراف مراجع [۱، ۲، ۳، ۴، ۵] را ببینید. به عنوان مثال چندجمله‌ای تطابقی گراف زیر



به  $\mu(G, x) = x^5 - 5x^3 + 4x$  تکرار  $\theta$  به عنوان یک ریشه  $\mu(G, x)$  با نماد  $\text{mult}(\theta, G)$  نشان داده می‌شود. گادزیل ثابت نمود اگر  $\theta = 0$  آن‌گاه  $\text{mult}(\theta, G)$  برابر تعداد رئوسی از  $G$  است که توسط یک تطابق ماکزیمم پوشانده نمی‌شود [۲]. سیستم ریشه‌های  $G$  به صورت

$$R(G) = \{\theta_1^{m_1}, \theta_2^{m_2}, \dots, \theta_k^{m_k}\}$$

**قضیه ۱-۱:** [۱۰] در هر گراف  $G$  تمام ریشه‌های  $\mu(G, x)$  حقیقی هستند. اگر  $\Delta > 1$ ، آن‌گاه ریشه‌ها در بازه  $(-2\sqrt{\Delta-1}, 2\sqrt{\Delta-1})$  قرار می‌گیرند.

توجه کنید از تعریف  $\mu(G, x)$  نتیجه می‌شود اگر  $\theta$  یک ریشه چندجمله‌ای تطابقی گراف  $G$  باشد، آن‌گاه  $-\theta$  نیز یک ریشه آن است. به‌علاوه اگر  $G$  گرافی از مرتبه فرد باشد، آن‌گاه چون تطابق کامل ندارد صفر یک ریشه چندجمله‌ای تطابقی آن است. اکنون فرض کنید  $\theta_1, \dots, \theta_k$  تمام ریشه‌های مثبت و نه لزوماً متمایز  $\mu(G, x)$  باشند. اگر صفر یک ریشه  $\mu(G, x)$  نباشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \mu(G, x) &= \prod_{i=1}^k (x^2 - \theta_i^2) \\ &= x^{2k} - (\theta_1^2 + \dots + \theta_k^2)x^{2k-2} + \dots + (-1)^k \theta_1^2 \dots \theta_k^2 \end{aligned}$$

و اگر صفر یک ریشه  $\mu(G, x)$  با تکرار  $t$  باشد، آن‌گاه

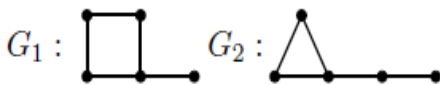
$$\begin{aligned} \mu(G, x) &= x^t \prod_{i=1}^k (x^2 - \theta_i^2) \\ &= x^{2k+t} - (\theta_1^2 + \dots + \theta_k^2)x^{2k+t-2} + \dots + (-1)^k \theta_1^2 \dots \theta_k^2 x^t. \end{aligned}$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که در گراف  $G$ ، مجموع مربعات ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی، برابر تعداد یال‌های  $G$  است و حاصل ضرب مربعات ریشه‌های ناصفر، برابر تعداد تطابق‌ها با اندازه ماکزیمم است.

**قضیه ۱-۲:** [۱] اگر  $G$  یک گراف همبند باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین ریشه  $\mu(G, x)$  ساده است. یعنی دارای تکرار یک است.

**قضیه ۱-۳:** [۹] فرض کنید  $G$  یک گراف همبند باشد که تمام ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی آن ساده هستند. در این صورت  $G$  یکی از گراف‌های زیر است:

$$K_2, K_4, K_7 \setminus (E(C_3) \cup E(C_4)), K_1 \text{ یا } G_2$$



به‌ویژه لیست فوق تنها گراف‌های قابل ردیابی هستند که صحیح تطابقی‌اند.

این‌رو ملاحظه می‌شود که مطالعه ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی حایز اهمیت است. از کاربرهای چندجمله‌ای تطابقی در نظریه گراف، می‌توان به محاسبه تعداد تطابق‌های کامل مکمل گراف  $G$  با استفاده از  $\mu(G, x)$  اشاره نمود [۱]. همچنین ثابت می‌شود هر چند جمله‌ای را می‌توان به صورت ترکیب خطی چندجمله‌ای تطابقی گراف‌های کامل نوشت. به‌علاوه چندجمله‌ای‌های تطابقی گراف‌های کامل یک خانواده متعامد از چندجمله‌ای‌ها را تشکیل می‌دهند [۱].

یک گراف را **صحیح** می‌نامند، هرگاه تمام مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن صحیح باشند. مساله شناسایی گراف‌های صحیح برای اولین بار در ۱۹۷۴ توسط هرری مطرح شد. از آن زمان به بعد این گراف‌ها به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۷، ۸]. یک گراف را **صحیح تطابقی** می‌نامیم هرگاه تمام ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی آن صحیح باشند.

به‌وضوح انرژی تطابقی یک گراف صحیح تطابقی مقداری صحیح است. گراف‌های صحیح تطابقی برای اولین بار توسط اکبری و همکاران مورد مطالعه قرار گرفتند [۹]. آن‌ها تمام گراف‌های قابل ردیابی که صحیح تطابقی هستند را شناسایی نمودند. به‌علاوه ثابت کردند برای  $k \geq 2$ ، تنها گراف  $k$ -منظم صحیح تطابقی، گراف  $(K_7 \setminus (E(C_3) \cup E(C_4)))$  است. همچنین نشان دادند هیچ گراف فاقد پنجه‌ای وجود ندارد که صحیح تطابقی باشد و  $K_2$  تنها گراف همبندی است که دارای تطابق کامل بوده و صحیح تطابقی است.

قربانی در ۲۰۱۳ خانواده‌ای از گراف‌ها را شناسایی نمود که چندجمله‌ای تطابقی آن‌ها دارای دقیقاً پنج ریشه متمایز است [۱۱]. در این مقاله با استفاده از این رده از گراف‌ها، تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی با حداکثر هفت راس را شناسایی می‌کنیم. نشان می‌دهیم فقط هشت گراف همبند صحیح تطابقی با مرتبه حداکثر هفت وجود دارد. همچنین ثابت می‌کنیم اگر گراف همبند  $G$  هشت راسی بوده و صحیح تطابقی باشد، آن‌گاه اندازه  $G$  برابر چهارده است. در انتها گراف‌های صحیح تطابقی با ماکزیمم درجه حداکثر سه را مطالعه می‌کنیم. برای این منظور لم‌ها و قضایای زیر مورد نیاز است:

$1 \leq l \leq k$  به علاوه مرتبه این گراف برابر  $k + t + 2$  و اندازه آن برابر  $k + t + l$  است. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف  $K(k, t; l)$  به صورت زیر است:

$$\mu(K(k, t; l), x) = x^{k+t-2}(x^4 - (k+t+l)x^2 + (l+t)(k-1) + t) \quad (۱)$$

ساختار یک گراف  $K'(k, t; l)$  نیز مشابه گراف  $K(k, t; l)$  است با این تفاوت که راس  $u$  با مرکز گراف  $K_{1,k}$  مجاور است و لذا با استفاده از  $t + l + 1$  یال به سایر رئوس متصل می‌شود. شکل (۱) را ببینید. به وضوح در یک گراف  $K'(k, t; l)$ ،  $0 \leq l \leq k$  همچنین تعداد رئوس این گراف برابر  $k + t + 2$  و تعداد یال‌های آن برابر  $k + t + l + 1$  است. چندجمله‌ای تطابقی این گراف برابر است با

$$\mu(K'(k, t; l), x) = x^{k+t-2}(x^4 - (k+t+l+1)x^2 + (l+t)(k-1) + t) \quad (۲)$$

یک گراف  $L(t, l)$  گرافی است که از اضافه نمودن راس  $u$  به گراف  $tK_1 \cup K_3$  و متصل کردن آن به سایر رئوس با استفاده از  $t + l$  یال به دست می‌آید به طوری که گراف حاصل همبند باشد. به شکل (۱) مراجعه شود. به وضوح در یک گراف  $L(t, l)$ ،  $l \in \{1, 2, 3\}$  به علاوه مرتبه این گراف برابر  $t + 4$  و اندازه آن برابر  $t + l + 3$  است. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف  $L(t, l)$  به صورت زیر است:

$$\mu(L(t, l), x) = x^t(x^4 - (t+l+3)x^2 + 3t + l). \quad (۳)$$

قضیه فوق نتیجه می‌دهد به ازای  $P_n, G_n, n \geq 3$  و  $K_n$  صحیح تطابقی نیستند.

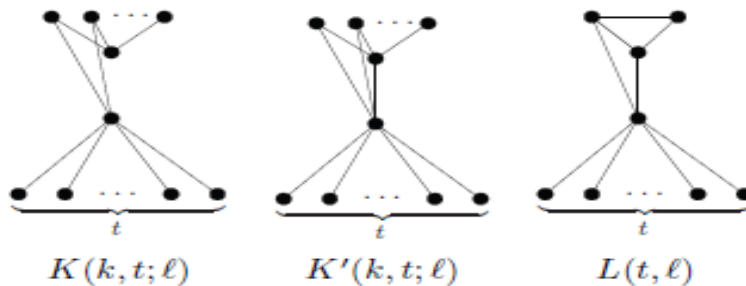
**قضیه ۱-۴:** [۹] اگر گراف  $G$  دارای تطابق کامل باشد، آن گاه  $\mu(G, x)$  دارای ریشه‌ای در بازه  $(0, 1]$  است. اگر دارای ریشه‌ای در بازه  $(0, 1)$  نباشد، آن گاه  $G$  به صورت اجتماع مجزای تعدادی متناهی  $K_2$  است. قضیه فوق نتیجه می‌دهد  $K_2$  تنها گراف همبندی است که دارای تطابق کامل است و صحیح تطابقی است.

**قضیه ۱-۵:** [۹] فرض کنید  $G$  گرافی با حداقل یک یال باشد و  $\text{mult}(0, G) = t$ . تابع  $f(t)$  را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{if } t \neq 1, \\ 3 & \text{if } t = 1. \end{cases}$$

در این صورت چندجمله‌ای تطابقی  $G$  حتما دارای ریشه‌ای در بازه  $(0, \sqrt{f(t)})$  است. در ادامه به معرفی خانواده گراف‌هایی می‌پردازیم که چندجمله‌ای تطابقی آن‌ها دارای دقیقاً پنج ریشه متمایز است و توسط قربانی شناسایی شده‌اند [۱۱].

یک گراف  $K(k, t; l)$  گرافی است که از اضافه نمودن راس  $u$  به گراف  $tK_1 \cup K_{1,k}$  و متصل کردن آن به سایر رئوس با استفاده از  $t + l$  یال به دست می‌آید، به طوری که گراف حاصل همبند بوده و  $u$  با مرکز  $K_{1,k}$  مجاور نباشد. به شکل (۱) مراجعه شود. به وضوح



شکل ۱: گراف‌های  $L(t, l)$  و  $K'(k, t; l)$ ،  $K(k, t; l)$

۱. اگر  $0 < \alpha < \beta, R(G) = \{0, (\pm\alpha)^r, (\pm\beta)\}$  و  $r \geq 2$  آن‌گاه  $G = S(r+1, \beta^2 - 1)$ .  
 ۲. اگر  $0 < \alpha < \beta, R(G) = \{0^t, (\pm\alpha), (\pm\beta)\}$  و  $t \geq 2$  آن‌گاه  $G$  یکی از گراف‌های  $K(k, t'; l)$  یا  $K'(k, t'; l)$  است که  $t, l$  و  $k$  اعداد صحیحی هستند.

۳. اگر  $0 < \alpha < \beta, R(G) = \{0^t, (\pm\alpha)^r, (\pm\beta)\}$  و  $t \geq 2, r \geq 2$  آن‌گاه  $G = T(r', k)$  که  $r' > 2$  اعداد صحیحی هستند و  $r' > 2$ .

لازم به ذکر است که لم فوق صریحا در مرجع [۱۱] بیان نشده است، بلکه از اثبات قضیه ۱-۶ نتیجه می‌شود.

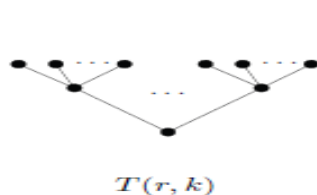
**قضیه ۱-۸:** [۱۲] فرض کنید  $G$  یک گراف همبند باشد. اگر  $\text{mult}(\theta, G) \geq 2$  آن‌گاه راس  $u$  از  $G$  وجود دارد به طوری که  $\text{mult}(\theta, G \setminus u) = \text{mult}(\theta, G) + 1$ .

**لم ۱-۹:** [۱] فرض کنید  $G$  گرافی  $n$  راسی و  $m$  یالی بوده و  $d_i$  درجه راس  $i$  باشد. در این صورت  $p(G, 2) = \binom{m}{2} - \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2}$ .

**۲- گراف‌های صحیح تطابقی با مرتبه کوچک**  
 در این بخش تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی از مرتبه حداکثر هفت و تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی با ماکزیمم درجه حداکثر سه را شناسایی می‌کنیم. به‌علاوه نشان می‌دهیم هر گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه هشت دارای تطابق سه یالی است.

**لم ۱-۲:** گراف  $K_{1,n}$  صحیح تطابقی است اگر و تنها اگر  $n$  مربع کامل باشد.  
**اثبات:** داریم

$$\mu(K_{1,n}, x) = x^{n+1} - nx^{n-1} = x^{n-1}(x^2 - n).$$



یک گراف  $T(r, k)$  گرافی است که از اضافه کردن راس  $u$  به گراف  $rK_{1,k}$  به‌دست می‌آید، به‌قسمی که راس  $u$  با مرکز هر یک از گراف‌های  $K_{1,k}$  مجاور باشد. به شکل (۲) مراجعه شود. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف  $T(r, k)$  به صورت زیر است:

$$\mu(T(r, k), x) = x^{r(k-1)+1}(x^2 - r - k)(x^2 - k)^{r-1}. \quad (۴)$$

یک گراف  $S(r, s)$  نیز از اتصال راس  $u$  به گراف  $rK_{1,1}$  با استفاده از  $s$  یال،  $r \leq s \leq 2r$  به‌دست می‌آید. در این گراف  $u$  با مرکز  $s-r$  تا از گراف‌های  $K_{1,1}$  مجاور است. به شکل (۲) توجه شود. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف  $S(r, s)$  برابر است با:

$$\mu(S(r, s), x) = x(x^2 - s - 1)(x^2 - 1)^{r-1} \quad (۵)$$

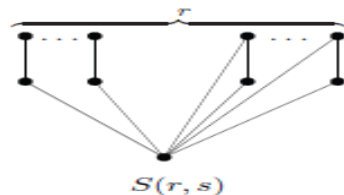
**قضیه ۱-۶:** [۱۱] فرض کنید  $G$  یک گراف همبند بوده و  $Z(G)$  تعداد ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای تطابقی آن باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند:  
 ۱. اگر  $z(G) = 2$  آن‌گاه  $G = K_2$ .

۲. اگر  $z(G) = 3$  آن‌گاه  $G = K_3$  یا  $G$  یک گراف ستاره است.

۳. اگر  $z(G) = 4$  آن‌گاه  $G$  یک گراف غیر ستاره چهار راسی است.

۴. اگر  $z(G) = 5$  آن‌گاه  $G$  یا یکی از گراف‌های  $K(k, t; l), K'(k, t; l), L(t, l), T(r, k)$  یا  $S(r, s)$  است که  $t, k, l, r$  و  $s$  اعداد صحیحی هستند و یا یک گراف همبند غیر ستاره پنج راسی است.

**لم ۱-۷:** [۱۱] فرض کنید  $G$  یک گراف همبند باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند:



شکل ۲: گراف‌های  $S(r,s)$  و  $T(r,k)$ 

قضیه ۲-۱ نتیجه می‌دهد سیستم ریشه‌های  $G$  به یکی از دو فرم زیر است:

$$R(G) = \{0^2, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}, 0 < \theta_1 < \theta_2 \leq 3$$

یا

$$R(G) = \{0^4, \pm\theta\}, 0 < \theta \leq 3.$$

اگر  $R(G) = \{0^2, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$ ، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱-۵، داریم  $\theta_1 = 1$ . در نتیجه می‌توان دو حالت فوق را به صورت زیر متمایز نمود:

**حالت اول:**  $R(G) = \{0^2, \pm 1, \pm\theta\}$ ،  $1 < \theta \leq 3$ .

بنابراین

$$\mu(G, x) = x^2(x^4 - (\theta^2 + 1)x^2 + \theta^2).$$

لذا  $m = \theta^2 + 1$  و  $p(G, 2) = \theta^2$  از طرفی برطبق لم ۱-۷ قسمت (۲)، در این حالت  $G$  یکی از گراف‌های  $K(k, t; l)$ ،  $K'(k, t; l)$  یا  $L(t, l)$  است که در آن  $k$ ،  $t$  و  $l$  اعداد صحیحی هستند.

اگر  $G$  یک گراف  $K(k, t; l)$  باشد، آن‌گاه با استفاده از (۱) داریم  $k + t = 4$  و  $m = l + 4$ . حال از آنجایی که در یک گراف  $K(k, t; l)$ ،  $1 \leq l \leq k$  پس  $1 \leq l \leq 4$  از این رو  $5 \leq m \leq 8$ .

از طرفی  $m = \theta^2 + 1$  در نتیجه  $4 \leq \theta^2 \leq 7$  لذا  $\theta = 2$ ،  $m = 5$  و  $l = 1$ . به علاوه  $p(G, 2) = 4$  از طرفی با استفاده از (۱) می‌توان نوشت  $p(G, 2) = (l + t)(k - 1) + t$  که نتیجه می‌دهد  $k(t + 1) = 5$  و این یک تناقض است.

اگر  $G$  یک گراف  $K'(k, t; l)$  باشد، آن‌گاه با استفاده از (۲) می‌توان نوشت  $k + t = 4$  و  $m = l + 5$  از

طرفی در یک گراف  $K'(k, t; l)$ ،

$0 \leq k \leq l$  پس  $0 \leq l \leq 4$  و  $5 \leq m \leq 9$ . حال از آنجایی که  $m = \theta^2 + 1$  نتیجه می‌شود  $4 \leq \theta^2 \leq 8$  بنابراین  $\theta = 2$ ،  $m = 5$  و  $l = 0$ . به علاوه  $p(G, 2) = \theta^2 = 4$  و با استفاده از (۲) داریم:

$p(G, 2) = (l + t)(k - 1) + t$  در نتیجه  $tk = 4$  پس  $k = t = 2$  بنابراین  $G = K'(2, 2; 0)$  و  $\mu(G, x) = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

لذا ریشه‌های  $\mu(K_{1,n}, x)$  فقط زمانی صحیح هستند که  $n$  مربع کامل باشد. ■

**قضیه ۲-۲:** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند صحیح تطابقی با حداکثر پنج راس باشد. در این صورت  $G$  یکی از گراف‌های  $K_1, K_2, K_1, 4, K_1, 3$  یا  $G_2$  است.

**اثبات:** فرض کنید مرتبه  $G$  برابر  $n$  باشد. اگر  $n \leq 3$  آن‌گاه به راحتی می‌توان دید  $G = K_1$  یا  $G = K_2$ . قرار دهید  $n = 4$  بنابر قضیه ۱-۴،  $G$  دارای تطابق کامل نیست. لذا  $G = K_{1,3}$ ، در حالی که بنابر لم ۱-۲،  $K_{1,3}$  صحیح تطابقی نیست. اکنون قرار دهید  $n = 5$ . چون  $G$  همبند است، با استفاده از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌شود سیستم ریشه‌های  $G$  به صورت  $R(G) = \{0, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$  یا  $R(G) = \{0^3, \pm\theta\}$  است.

حال اگر  $R(G) = \{0, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$ ، آن‌گاه چون تمام ریشه‌های  $\mu(G, x)$  ساده هستند، بر طبق قضیه ۱-۳،  $G$  یکی از گراف‌های  $G_1$  و  $G_2$  است.

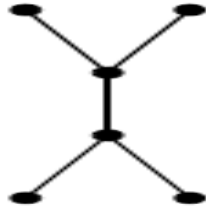
اگر  $R(G) = \{0^3, \pm\theta\}$ ، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۶ قسمت (۲)،  $G = K_{1,4}$  که صحیح تطابقی است. ■

**قضیه ۲-۳:** تنها گراف همبند از مرتبه شش که صحیح تطابقی است گراف زیر است:



**اثبات:** چون  $\Delta \leq 5$ ، بنابر قضیه ۱-۱ تمام ریشه‌های صحیح  $\mu(G, x)$  در بازه  $[-3, 3]$  قرار دارند. حال با توجه به این که تکرر ریشه صفر در  $\mu(G, x)$  برابر تعداد رئوسی از  $G$  است که توسط یک تطابق ماکزیمم پوشانده نمی‌شود و از طرفی بنابر قضیه ۱-۴،  $G$  تطابق کامل ندارد، نتیجه می‌شود  $\text{mult}(0, G) \neq 0$ . به علاوه چون مرتبه  $G$  زوج است، تکرر ریشه صفر نیز زوج است. لذا





شکل ۳: گراف  $K'(2, 2; 0)$

$G$ ، نتیجه می‌شود، صفر یک ریشه  $\mu(G, x)$  با تکرار فرد است. اکنون با استفاده از قضیه ۱-۲ می‌توان چهار حالت زیر را متمایز نمود:

**حالت اول:**  $R(G) = \{0, (\pm\theta_1), (\pm\theta_2), (\pm\theta_3)\}$  در این حالت چون تمام ریشه‌های  $\mu(G, x)$  ساده هستند و  $G$  هفت راسی است با استفاده از قضیه ۱-۳، داریم

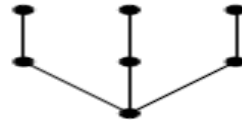
$G = K_7 \setminus (E(C_3) \cup E(C_4))$ . حال با توجه به این که  $|E(G)| = 14$ ، هیچ‌یک از ریشه‌های چند جمله‌ای تطابقی  $G$  برابر ۴ نیست. بنابراین  $\theta_1 = 1$   $\theta_2 = 2$   $\theta_3 = 3$  و لذا:  
 $\mu(G, x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$ .

**حالت دوم:**  $R(G) = \{0, (\pm\theta_1)^2, (\pm\theta_2)\}$  در این حالت بنا بر لم ۱-۷ قسمت (۱)، داریم  $G = S(3, \theta_2^2 - 1)$ . اکنون با توجه به این که دریک گراف  $\mathcal{S}(r, s)$   $r \leq s \leq 2r$  نتیجه می‌شود  $4 \leq \theta_2^2 \leq 7$ . بنابراین  $\theta_2 = 2$  و  $G = S(3, 3)$  به شکل (۴) مراجعه شود. حال با استفاده از (۵) داریم:  
 $\mu(G, x) = x(x^2 - 4)(x^2 - 1)^2$ .

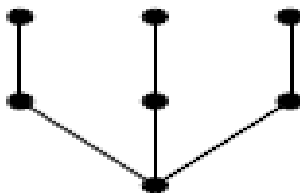
شکل (۳) را ببینید. اگر  $G$  یک گراف  $L(t, l)$  باشد، آن‌گاه با استفاده از (۳) داریم  $t = 2$  و  $m = l + 5$ . به‌علاوه  $m = \theta^2 + 1$  بنابراین  $l = \theta^2 - 4$  ولی از آنجایی که  $l \in \{1, 2, 3\}$  و  $\theta \in \{2, 3\}$  تساوی فوق هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

**حالت دوم:**  $R(G) = \{0^4, \pm\theta\}$ ،  $0 < \theta \leq 3$ . در این حالت بنا بر قضیه ۱-۶ قسمت (۲)،  $G = K_{1,5}$  حالی که بر طبق لم ۱-۲،  $K_{1,5}$  صحیح تطابقی نیست. ■

**قضیه ۲-۴:** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه هفت باشد. در این صورت  $G = K_7 \setminus (E(C_3) \cup E(C_4))$  یا  $G$  گراف زیر است:



**اثبات:** فرض کنید اندازه  $G$  برابر  $m$  باشد. چون  $\Delta \leq 6$ ، بنا بر قضیه ۱-۱، ریشه‌های صحیح  $\mu(G, x)$  در بازه  $[-4, 4]$  قرار دارند. از طرفی با توجه به فرد بودن مرتبه



شکل ۴: گراف  $S(3, 3)$



**قضیه ۲-۵:** فرض کنید  $G$  یک گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه هشت باشد. در این صورت بزرگ‌ترین تطابق  $G$ ، سه یالی است. به علاوه اندازه  $G$  برابر چهارده است.

**اثبات:** فرض کنید اندازه گراف  $G$  برابر  $m$  باشد. چون  $\Delta \leq 7$ ، بنابر قضیه ۱-۱ تمام ریشه‌های صحیح  $\mu(G, x)$  در بازه  $[-4, 4]$  قرار دارند. ابتدا نشان می‌دهیم بزرگ‌ترین تطابق  $G$ ، سه یالی است. توجه کنید بنابر قضیه ۱-۴،  $G$  تطابق کامل ندارد. اکنون با برهان خلف، فرض کنید  $G$  دارای تطابق سه تایی نیست. بنابراین  $\text{mult}(0, G) \neq 0, 2$ . به علاوه چون مرتبه  $G$  زوج است، تکرار صفر به عنوان ریشه  $\mu(G, x)$  زوج بوده و لذا با استفاده از قضیه ۱-۲ داریم،  $R(G) = \{0^6, \pm\theta\}$

اگر  $R(G) = \{0^6, \pm\theta\}$ ، آن‌گاه قضیه ۱-۶ قسمت (۲) نتیجه می‌دهد  $G = K_{1,7}$  که صحیح تطابقی نیست. اگر  $R(G) = \{0^4, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$ ، آن‌گاه با استفاده از لم ۱-۷ قسمت (۲) نتیجه می‌شود  $G$  یکی از گراف‌های  $K(k, t; l)$  یا  $K'(k, t; l)$  است که  $k, t$  و  $l$  اعداد صحیحی هستند. به علاوه چون  $G$  همبند است،  $m \geq 7$  در ادامه به بررسی هر یک از این موارد می‌پردازیم.

ابتدا فرض کنید  $G$  یک گراف  $K(k, t; l)$  باشد. در این صورت با استفاده از (۱) می‌توان دید  $k + t = 6$  و  $m = l + 6$  و  $p(G, 2) = (l + t)(k - 1) + t$  از طرفی  $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$  و  $p(G, 2) = \theta_1^2 \theta_2^2$  لذا  $l + 6 = \theta_1^2 + \theta_2^2$  اکنون با توجه به این که  $l \leq k \leq 6$  نتیجه می‌شود  $\theta_1 = 1$  و  $\theta_2 = 3$ . لذا  $m = 10$  و  $p(G, 2) = 9$  و  $l = 4$  پس  $(l + t)(k - 1) + t = 9$  که نتیجه می‌دهد  $k(4 + t) = 13$  و این یک تناقض است.

سپس فرض کنید  $G$  یک گراف  $K'(k, t; l)$  باشد. در این صورت با استفاده از (۲) داریم  $m = k + t = 6$  و  $p(G, 2) = (l + t)(k - 1) + t$

**حالت سوم:**  $R(G) = \{0^3, (\pm\theta_1), (\pm\theta_2)\}$  در این حالت بنابر لم ۱-۷ قسمت (۲)،  $G$  یکی از گراف‌های  $K(k, t; l)$  یا  $K'(k, t; l)$  است.

اگر  $G$  یک گراف  $K(k, t; l)$  باشد، آن‌گاه با استفاده از (۱) می‌توان نوشت  $k + t = 5$ ،  $m = l + 5$ ،  $1 \leq l \leq k$  پس  $1 \leq l \leq 5$ . لذا  $6 \leq m \leq 10$ . از طرفی با توجه به این که مجموع مربعات ریشه‌های چند جمله‌ای تطابقی، برابر تعداد یال‌های گراف  $G$  است، داریم  $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$

در نتیجه  $\theta_1 = 1$  و  $\theta_2 = 3$ . بنابراین  $m = 10$  و  $l = k = 5$  و  $t = 0$ . به علاوه با استفاده از (۱) می‌توان دید  $p(G, 2) = (l + t)(k - 1) + t = 20$  پس  $p(G, 2) = 20$  از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب مربعات ریشه‌های ناصفر چندجمله‌ای تطابقی برابر تعداد تطابق‌ها با اندازه ماکزیمم است. لذا  $p(G, 2) = 9 = \theta_1^2 \theta_2^2$  و این یک تناقض است.

اگر  $G$  یک گراف  $K'(k, t; l)$  باشد، آن‌گاه با استفاده از (۲) داریم  $k + t = 5$ ،  $m = l + 6$ ،  $l \leq k \leq 5$  و  $p(G, 2) = (l + t)(k - 1) + t$  به علاوه  $p(G, 2) = 9$  استدلالی مشابه آن‌چه در بالا انجام دادیم نتیجه می‌دهد  $\theta_1 = 1$  و  $\theta_2 = 3$  پس  $m = \theta_1^2 + \theta_2^2 = 10$  و  $l = 4$

همچنین  $p(G, 2) = \theta_1^2 \theta_2^2 = 9$  از این رو  $(l + t)(k - 1) + t = 9$  که نتیجه می‌دهد  $k = 1$  و  $t = 9$  و این یک تناقض است.

اگر  $G$  یک گراف  $L(t, l)$  باشد، آن‌گاه با استفاده از (۳) داریم  $t = 3$ ،  $m = l + 6$ ، اکنون با توجه به این که  $l \in \{1, 2, 3\}$  و  $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$  نتیجه می‌شود  $\theta_1^2 + \theta_2^2 \in \{7, 8, 9\}$  و این متناقض با صحیح بودن  $\theta_1$  و  $\theta_2$  است.

**حالت چهارم:**  $R(G) = \{0^5, (\pm\theta)\}$ ،  $0 < \theta \leq 4$ . در این حالت قضیه ۱-۶ قسمت (۲)، نتیجه می‌دهد  $G = K_{1,6}$  که صحیح تطابقی نیست و اثبات تمام

است. ■

لذا  $R(G \setminus u) = \{0^3, \pm\eta_1, \pm\eta_2\}$  یا  $R(G \setminus u) = \{0^3, (\pm\eta)^2\}$  از طرفی باتوجه به این که  $\deg(u) \leq 7$  داریم

$$|E(G \setminus u)| \geq 14$$

اگر  $R(G \setminus u) = \{0^3, \pm\eta_1, \pm\eta_2\}$  آن گاه  $G \setminus u$  می‌تواند یک گراف همبند یا ناهمبند باشد. ابتدا فرض کنید  $G \setminus u$  همبند است. اکنون بنابر لم ۷-۱ قسمت (۲)،  $G \setminus u$  یکی از گراف‌های  $K(k, t; l)$ ،  $K'(k, t; l)$  یا  $L(t, l)$  است. اگر  $G \setminus u$  یک  $K'(k, t; l)$  باشد، آن گاه با استفاده از (۲) واضح است که  $k + t = 5$  و  $|E(G \setminus u)| = l + 6$  از آنجایی که  $l \leq k$ ، داریم  $|E(G \setminus u)| \leq 11$  که یک تناقض است. اگر  $G \setminus u$  یک  $K(k, t; l)$  باشد، آن گاه چون  $K(k, t; l)$  یک زیر گراف  $K'(k, t; l)$  است،  $|E(G \setminus u)| \leq 11$  که یک تناقض است. اگر  $G \setminus u$  یک  $L(t, l)$  باشد، آن گاه بنابر (۳) داریم  $t = 3$  و  $|E(G \setminus u)| = l + 6$ . حال چون  $l \leq 3$  نتیجه می‌شود  $|E(G \setminus u)| \leq 9$  که یک تناقض است. سپس فرض کنید  $G \setminus u$  ناهمبند است. چون  $|E(G \setminus u)| \geq 14$ ، بایستی اجتماع  $K_1$  و یک گراف همبند شش راسی مانند  $H$  باشد. درغیراین صورت  $|E(G \setminus u)| < 14$

با توجه به سیستم ریشه‌های  $G \setminus u$  داریم  $R(H) = \{0^2, \pm\eta_1, \pm\eta_2\}$  و لذا  $H$  یک گراف  $K(k', t'; l')$  یا  $K'(k', t'; l')$  است که در آن  $k', t'$  و  $l'$  اعداد صحیحی هستند. در هریک از این موارد با استدلالی مشابه استدلال فوق به راحتی می‌توان نشان داد  $|E(H)| < 14$  و لذا  $|E(G \setminus u)| < 14$  که یک تناقض است.

اگر  $R(G \setminus u) = \{0^3, (\pm\eta)^2\}$ ، آن گاه بنابر قضیه ۲-۱،  $G \setminus u$  همبند نیست. اکنون مشابه قسمت قبل نتیجه می‌شود  $G \setminus u$  بایستی مولفه همبندی شش راسی داشته باشد. در حالی که با توجه به سیستم ریشه‌های  $G \setminus u$  چنین چیزی ممکن نیست.

از این رو نتیجه می‌شود بزرگترین ریشه چندجمله‌ای تطابقی  $G$  نمی‌تواند برابر ۴ باشد. لذا سیستم ریشه‌های  $G$  به صورت  $R(G) = \{0^2, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$  است. بنابراین داریم،

از آنجایی که  $l \leq k \leq 6$  استدلالی مشابه قسمت قبل نتیجه می‌دهد  $\theta_1 = 1$ ،  $\theta_2 = 3$  یا  $\theta_1 = 2$ ،  $\theta_2 = 3$ . در حالت نخست داریم  $p(G, 2) = \theta_1^2 \theta_2^2 = 9$  و  $m = \theta_1^2 + \theta_2^2 = 10$  و  $l = 3$  بنابراین  $(l + t)(k - 1) + t = 9$  و  $k(3 + t) = 9$  که یک تناقض است. درحالت دوم داریم  $p(G, 2) = 36$  و  $m = 13$  که نتیجه می‌دهد  $k = 6$  و  $t = 0$  بنابراین  $(l + t)(k - 1) + t = 30$  که یک تناقض است. در نهایت فرض کنید  $G$  یک گراف  $L(t, l)$  باشد. با استفاده از (۳) داریم  $t = 4$ ،  $m = l + 7$  و  $p(G, 2) = l + 12$  حال چون  $1 \leq l \leq 3$  و  $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$  نتیجه می‌شود  $\theta_1 = 1$  و  $\theta_2 = 3$  بنابراین  $m = 10$  و  $l = 3$  و  $p(G, 2) = 15$  از طرفی  $p(G, 2) = \theta_1^2 \theta_2^2 = 9$  که یک تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد  $G$  دارای تطابق سه یالی است.

در ادامه نشان می‌دهیم اندازه  $G$  برابر چهارده است. با توجه به این که بزرگ‌ترین تطابق  $G$  سه یالی است، داریم  $\text{mult}(0, G) = 2$  از طرفی قضیه ۵-۱ نتیجه می‌دهد یکی از ریشه‌های  $\mu(G, x)$  برابر ۱ است. بنابراین با استفاده از قضیه ۲-۱ می‌توان دید سیستم ریشه‌های  $G$  به یکی از دو صورت زیر است:

**حالت اول:**  $R(G) = \{0^2, (\pm 1)^2, \pm\theta\}$   $1 < \theta \leq 4$  اکنون با استفاده از لم ۷-۱ قسمت (۳) داریم  $G = T(r, k)$  که  $r$  و  $k$  اعداد صحیح مثبتی هستند و  $r > 2$ . حال با توجه به این که تکرر ریشه صفر برابر دو است با استفاده از (۴) می‌توان دید  $r(k - 1) = 1$  که یک تناقض است.

**حالت دوم:**  $R(G) = \{0^2, \pm 1, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$   $1 < \theta_1 < \theta_2 \leq 4$  ابتدا فرض کنید  $\theta_2 = 4$  بنابراین می‌توان نوشت  $R(G) = \{0^2, \pm 1, \pm\theta, \pm 4\}$ ،  $\theta \in \{2, 3\}$  داریم  $m = \theta^2 + 17 \geq 21$  حال بنابر قضیه ۸-۱ راس  $u$  از  $G$  وجود دارد به طوری که  $\text{mult}(0, G \setminus u) = 3$

آن‌گاه  $G$  یکی از گراف‌های  $G_1, G_2, K'(2, 2; 0)$  یا  $T(3, 1)$  است.

**اثبات:** فرض کنید مرتبه  $G$  برابر  $n$  باشد. اگر  $\Delta = 3$ ، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۱ ریشه‌های صحیح  $\mu(G, x)$  در بازه  $[-2, 2]$  قرار دارند و لذا  $z(G) \leq 5$  به‌علاوه چون  $n \geq 4$ ، با استفاده از قضیه ۱-۶ نتیجه می‌شود  $z(G) \geq 3$ . لذا می‌توان سه حالت زیر را در نظر گرفت:

الف) اگر  $z(G) = 3$ ، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۶ قسمت (۲)،  $G = K_{1,3}$  که بنابر لم ۱-۲ صحیح تطابقی نیست.  
ب) اگر  $z(G) = 4$ ، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۶ قسمت (۳)،  $G$  یک گراف چهار راسی و غیر ستاره است. از طرفی بر طبق قضیه ۲-۲، هیچ گراف چهار راسی، صحیح تطابقی نیست.

ج) اگر  $z(G) = 5$ ، آن‌گاه چون  $G$  همبند است با استفاده از قضیه ۲-۱ نتیجه می‌شود

$$R(G) = \{0^t, (\pm 1)^\alpha, (\pm 2)\}$$

$$\mu(G, x) = x^t(x^2 - 1)^\alpha(x^2 - 4).$$

اکنون قضیه ۱-۶ قسمت (۴) نتیجه می‌دهد  $G$  یا یک گراف پنج راسی غیر ستاره است و یا یکی از گراف‌های  $K(k, t; l), K'(k, t; l), L(t, l)$  یا  $T(r, k)$  است.

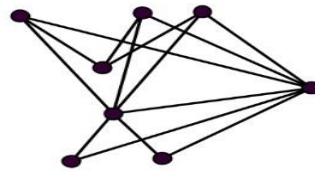
ابتدا فرار دهید  $n = 5$  در این صورت بنابر قضیه ۲-۲،  $G = G_1$  یا  $G = G_2$ .

سپس فرض کنید  $n \geq 6$ . اگر  $G$  یک گراف  $K(k, t; l)$  یا  $K'(k, t; l)$  باشد، آن‌گاه داریم  $n = k + t + 2$ . اکنون با توجه به ساختار این گراف‌ها و آن‌جایی که  $\Delta = 3$ ، نتیجه می‌شود  $k, t \leq 3$  و  $k + t \leq 5$ . شکل (۱) را ملاحظه کنید. لذا این گراف‌ها شش و یا هفت راسی هستند. از طرفی بنابر قضیه ۲-۴ هیچ گراف هفت راسی از نوع گراف‌های  $K(k, t; l)$  یا  $K'(k, t; l)$  صحیح تطابقی نیست. حال با استفاده از قضیه ۳-۲ نتیجه می‌شود  $G = K'(2, 2; 0)$ .

$$\mu(G, x) = x^8 - 14x^6 + 49x^4 - 36x^2.$$

پس  $m = 14$  و  $p(G, 2) = 49$  و  $p(G, 3) = 36$  و اثبات تمام است. ■

**تذکر ۲-۶:** عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست. برای این منظور گراف هشت راسی زیر را در نظر بگیرید. این گراف دارای تطابق سه یالی بوده و اندازه آن برابر چهارده است ولی صحیح تطابقی نیست.



توجه کنید در قضیه ۲-۵، نشان دادیم اگر یک گراف هشت راسی، صحیح تطابقی باشد، آن‌گاه تعداد تطابق‌های دو یالی آن برابر ۴۹ است. در حالی که در گراف فوق با استفاده از لم ۱-۹ داریم:

$$p(G, 2) = \binom{14}{2} - \sum_{i=1}^8 \binom{d_i}{2} = 47.$$

در این‌جا  $d_1, \dots, d_8$  دنباله درجات رئوس گراف هستند. این گراف دارای دو راس از درجه ۶، چهار راس از درجه ۳ و دو راس از درجه ۲ است.

**مثال ۲-۷:** [۱۳] گراف زیر هشت راسی است و صحیح تطابقی است.



داریم

$$\mu(G, x) = x^8 - 14x^6 + 49x^4 - 36x^2 = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9).$$

**قضیه ۲-۸:** فرض کنید  $G$  گرافی همبند با حداقل سه راس باشد و  $\Delta(G) \leq 3$ . اگر  $G$  صحیح تطابقی باشد،

اگر  $G$  یک گراف  $L(t, l)$  باشد، آن‌گاه داریم  $n = t + 4$ . حال با توجه به ساختار این گراف ملاحظه می‌شود  $t = 2$  و لذا  $n = 6$ . شکل (۱) را ملاحظه کنید. از طرفی طبق قضیه ۲-۳، یک گراف  $L(t, l)$  از مرتبه شش نمی‌تواند صحیح تطابقی باشد.

اگر  $G$  یک گراف  $T(r, k)$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mu(T(r, k), x) = x^{r(k-1)+1}(x^2 - r - k)(x^2 - k)^{r-1}.$$

اکنون با مقایسه چندجمله‌ای فوق با  $\mu(G, x)$  نتیجه می‌شود  $k = 1$  و  $r + k = 4$  بنابراین  $r = 3$  و  $G = T(3, 1)$ .

اگر  $G$  یک گراف  $S(r, s)$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mu(S(r, s), x) = x(x^2 - s - 1)(x^2 - 1)^{r-1},$$

لذا  $n = 2r + 1$  و  $r \leq s$  چون  $n \geq 6$  و  $r \geq 3$ . حال با مقایسه چندجمله‌ای فوق با  $\mu(G, x)$  نتیجه می‌شود  $s + 1 = 4$ . لذا  $s = r = 3$  و  $G = S(3, 3)$ . از طرفی به راحتی می‌توان دید  $T(3, 1) \cong S(3, 3)$ .

در نهایت اگر  $\Delta = 2$ ، آن‌گاه  $G$  یک دور یا یک مسیر است و بنابر قضیه ۱-۳ صحیح تطابقی نیست. ■

## فهرست مراجع

- [9] S. Akbari, P. Csikvári, A. Ghafari, S. Khalashi Ghezelahmad and M. Nahvi, Graphs with integer matching polynomial zeros, *Discrete Appl. Math.*, 224 (2017), 1-8.
- [10] O.J. Heilmann and E.H. Lieb, Theory of monomer-dimer systems, *Commun. Math. Physics*, 25 (1972), 190-232.
- [11] E. Ghorbani, Graphs with few matching roots, *Graphs Combin.* 29 (2013), 1377-1381.
- [1] C.D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, Inc., 1993.
- [2] C.D. Godsil, Algebraic matching theory, *Electron. J. Combin.*, 2 (1995), 1-14.
- [3] C.D. Godsil and I. Gutman, On the theory of the matching polynomial, *J. Graph Theory*, 5(2) (1981), 137-144.
- [4] I. Gutman, The matching polynomial, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 6 (1979), 75-91.
- [5] I. Gutman and F. Harary, Generalizations of the matching polynomial, *Utilitas Math.*, 24 (1983), 97-106.
- [12] C.Y. Ku and W. Chen, An analogue of the Gallai-Edmond structure theorem for non-zero roots of the matching polynomial, *J. Combin. Theory Ser. B*, 100 (2010), 119-127.
- [13] S. Khalashi Ghezelahmad, On matching integral graphs, *Mathematical Sciences*, 13 (2019), 387-394.
- [6] I. Gutman and S. Wagnerb, The matching energy of a graph, *Discrete Appl. Math.*, 160 (2012), 2177-2187.
- [7] F. Harary and A.J. Schwenk, Which graphs have integral spectra? *Graphs and Combinatorics.*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 406 (1974), 45-51.
- [8] K.T. Balin'ska, D. Cvetkovic', Z. Radosavljevic', S.K. Simic' and D. Stevanovic', A survey on integral graphs, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, 13 (2002), 42-65.