

# حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی منفرد غیرخطی حاصل شده در بیولوژی، از طریق ماتریس عملیاتی چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی

محمدعلی عبادی<sup>۱</sup>، الهام السادات هاشمی‌زاده<sup>۲\*</sup>، امیرحسین رفاهی شیخانی<sup>۳</sup>

<sup>(۱)</sup> دانشجوی گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

<sup>(۳)</sup> استاد گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۲/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۰۲

## چکیده

هدف از این مقاله، ارائه رویکردی عددی جدید، برای حل معادلات دیفرانسیل منفرد غیرخطی که در زمینه‌ی بیولوژی حاصل می‌شوند، می‌باشد. این قبیل معادلات در مسائل متعدد بیولوژی نظیر انتشار اکسیژن در سلول‌های خونی، انتشار گرما از سر انسان و رشد تومورهای سرطانی ظاهر می‌شوند. در این مقاله این معادلات به کمک یک روش عددی جدید بر پایه چند جمله‌های زرنیکه<sup>۱</sup> شعاعی حل می‌شوند. در روش ارائه شده برای اولین بار ماتریس‌های عملیاتی مشتق‌گیری این توابع به دست آمده و سپس براساس ماتریس‌های عملیاتی برای مشتق توابع زرنیکه شعاعی، معادله‌ی دیفرانسیل اصلی به یک دستگاه از معادلات غیرخطی جبری تبدیل شود که به راحتی حل پذیرند. پیاده‌سازی این روش ساده و جذاب است. در پایان، مثال‌های کاربردی برای نشان دادن پیاده‌سازی روش ارائه شده و مقایسه جواب‌های به دست آمده از این روش با جواب‌های سایر روش‌های معروف ارائه و حل شده است، و نتایج حاصل از آن، حاکی از دقت و کارایی این روش عددی است.

**واژه‌های کلیدی:** مسائل مقدار مرزی منفرد غیرخطی، چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی، ماتریس عملیاتی مشتق.

**۱. مقدمه**

هدف کلی از این مقاله، معرفی یک روش عددی جدید، برای پیدا کردن جواب یک دسته از مسائل مقدار مرزی منفرد به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (\alpha + \frac{m}{x}) \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 \frac{d}{dx} y(0) = \gamma_1, \quad (2)$$

$$\alpha_2 y(1) + \beta_2 \frac{d}{dx} y(1) = \gamma_2, \quad (3)$$

این معادلات در مسائل فیزیولوژی و بیولوژی ظاهر می‌شوند. مسائل مقدار مرزی (۱)-(۳) بر حسب مقادیر مختلف  $\alpha, m$  و تابع  $f(x, y)$  به شرح زیر در زمینه‌های مختلف کاربرد دارد:

❖ اگر  $m = 0, 1, 2$  و  $\alpha = 1$ ، تابع  $f(x, y)$  می‌تواند خطی یا غیرخطی به فرم زیر باشد:

$$f(x, y) \equiv f(y) = \frac{ny}{y + \mu}, \quad (4)$$

$$n > 0, \mu > 0,$$

آنگاه معادلات (۱)-(۳) در انواع مسائل رشد تومور سرطانی رخ می‌دهد. در واقع یک مدل ریاضی برای رشد تومورها می‌باشد که در آن اندازه این تومورها وابسته به زمان است [1-6].

❖ وقتی  $\alpha = 1$  و  $m = 2$  معادلات مقدار مرزی داده شده، در مسائل انتشار اکسیژن در یک سلول کروی مورد مطالعه قرار می‌گیرد [7-9]. مسائل متشابه این با  $m = 2$  و  $\alpha = 0$  در مدلی از هدایت گرما در سر انسان با  $f(x, y)$  به صورت زیر مطرح می‌شود [10-13].

$$f(x, y) \equiv f(y) = -\delta e^{\sigma y}, \quad (5)$$

$$\sigma > 0, \delta > 0.$$

نتایج وجود و یگانگی جواب برای این مسائل در پژوهش‌های متعددی انجام پذیرفته است [14-16]. در سال‌های اخیر، پژوهشگران متعددی روی پیدا کردن

جواب‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل منفرد که در زمینه‌ی فیزیولوژی ظاهر می‌شوند، کار کرده‌اند و می‌توان این نتایج و دستاوردها را در [17-25] مشاهده کرد.

هدف از این مقاله، معرفی یک روش عددی جدید بر پایه‌ی ماتریس‌های عملیاتی برای مشتق، بر مبنای چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی برای اولین بار می‌باشد. به کمک این روش، جواب عددی برای دسته‌ای از مسائل مقدار مرزی داده شده در (۱)-(۳) که در مسائل ظاهر شده در فیزیولوژی رخ می‌دهد، به کار گرفته می‌شود. در این فرآیند مطالعه، به کمک چند جمله‌ای‌های زرنیکه‌ی شعاعی و ماتریس‌های عملیاتی مشتق این توابع، این نوع معادلات به معادلات جبری تبدیل می‌شود. برتری این روش نسبت به روش‌های موجود دیگر، پیاده‌سازی سریع و سادگی این روش می‌باشد.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲، مفاهیم و تعاریف اولیه و ویژگی‌های تابع زرنیکه و چندجمله‌ای‌های زرنیکه‌ی شعاعی و ماتریس‌های عملیاتی برای مشتق آنها بیان می‌شود. اجرا و پیاده‌سازی روش عددی جدید، روی مسائل فیزیولوژی در بخش ۳ مطرح شده است. موارد، به کارگیری روش پیشنهادی برای مسائل و مدل‌هایی که در فیزیولوژی کاربرد دارد، دقت و کارایی روش، مقایسه نتایج عددی به دست آمده با روش جدید مطرح شده با سایر روش‌های معروف، همگی در بخش ۴ ارائه می‌شود. در نهایت در بخش ۵، نتیجه‌گیری مربوط به این مقاله بیان می‌شود.

## ۲. تعاریف پایه برای تابع زرنیکه و چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی و ویژگی‌های آنها

در این قسمت، ابتدا تابع زرنیکه و چندجمله‌ای‌های زرنیکه را تعریف می‌کنیم و سپس روابط بازگشتی برای این چندجمله‌ای‌ها را یادآوری می‌کنیم. در نهایت، ماتریس‌های عملیاتی برای مشتقات بر مبنای چند جمله‌ای‌های زرنیکه بیان می‌شود.

### ۲.۱. تابع زرنیکه

چندجمله‌ای‌های زرنیکه، مجموعه‌ای از توابع متعامد و پیوسته روی دایره‌ای واحد می‌باشند. این توابع متعامد را

مقادیر  $n$  و  $m$  همیشه مقداری صحیح و در رابطه  $n - |m| = \text{even}, m \leq n$  صدق می کنند.

بطور کلی، چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی از چند جمله‌ای‌های معروف ژاکوبی توسعه و گسترش یافته است. لذا می‌توان آنها را به صورت دیگری در زیر بیان و معرفی کرد

$$R_n^{|m|}(r) = (-1)^{\frac{(n-m)}{2}} r^m P_{\frac{(n-m)}{2}}^{(m,0)}(1-r^2) \quad (11)$$

از آنجا که  $k \in \mathbb{Z}, n = m + 2k$ ، بنابراین رابطه پایین را می‌توان نتیجه گرفت

$$R_{m+2k}^{|m|}(r) = (-1)^k r^m P_k^{(m,0)}(1-r^2) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{(m+2k-s)!}{s!(m+k-s)!(k-s)!} r^{m+2(k-s)} \quad (12)$$

جدول (۱) زیر، چندجمله‌ای‌های ابتدایی زرنیکه شعاعی با سمت‌های<sup>۲</sup> ثابت  $m = 0, 1$  به نمایش می‌گذارد.

شکل‌های (۱) و (۲)، نمودار چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی  $R_n^m(r)$ ،  $n = |m| + 2k, m \leq n$ ، با سمت‌های ثابت  $m = 0, 1$  نشان می‌دهد.

می‌توان در مختصات قطبی بیان کرد. تابع زرنیکه از حاصل ضرب توابع مثلثاتی و چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی به دست می‌آیند [26]. توابع زرنیکه به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$z_n^m(r, \theta) = N_n^m R_n^m(r) \Theta(m\theta), \quad (6)$$

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

از آنجا که  $N_n^m$  عامل نرمال‌سازی برای این توابع هستند، بنابراین داریم:

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}} \quad (7)$$

که در اینجا  $\delta_{m0}$  تابع معروف کرونگر<sup>۱</sup> به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{m0} = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}, \quad (8)$$

و همچنین تابع مثلثاتی  $\Theta(m\theta)$  و به صورت زیر بیان می‌شود

$$\Theta(m\theta) = \begin{cases} \cos(m\theta), & m \geq 0 \\ -\sin(m\theta), & m < 0 \end{cases} \quad (9)$$

## ۲.۲. چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی و روابط بازگشتی

در این قسمت، چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی را تعریف و روابط بازگشتی و خاصیت مربوط به آن را یادآوری می‌کنیم [27].

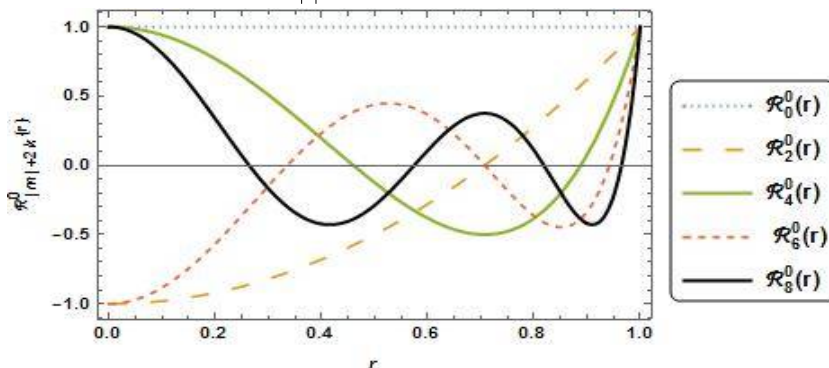
چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{(n-m)}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left[\frac{(n+m)}{2} - s\right]! \left[\frac{(n-m)}{2} - s\right]!} r^{n-2s} \quad (10)$$

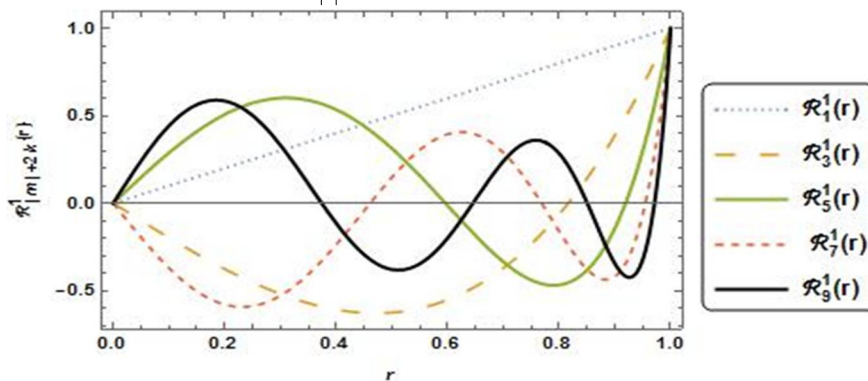
جدول (۱)

$m$	$n$	$R_n^m(r)$
0	0	1
	2	$-1+2r^2$
	4	$1-6r^2+6r^4$
	6	$-1+12r^2-30r^4+20r^6$
	8	$1-20r^2+90r^4-140r^6+70r^8$
1	1	$r$
	3	$-2r+3r^3$
	5	$3r-12r^3+10r^5$
	7	$-4r+30r^3-60r^5+35r^7$
	9	$5r-60r^3+210r^5-280r^7+126r^9$
2	2	$r^2$
	4	$-3r^2+4r^4$
	6	$6r^2-20r^4+15r^6$
	8	$-10r^2+60r^4-105r^6+56r^8$
	10	$15r^2-140r^4+420r^6-504r^8+210r^{10}$

شکل (۱): چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی  $R_{|m|+2k}^m(r)$  با سمت ثابت  $m=0$



شکل (۲): چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی  $R_{|m|+2k}^m(r)$  با سمت ثابت  $m=1$



و همچنین داریم

$$\int_0^1 R_n^m(r) R_k^m(r) r dr = \frac{\delta_{nk}}{2(n+1)} \quad (16)$$

هر تابع  $f \in L^2[0,1]$  را می‌توان به وسیله چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی بسط و گسترش داد بنابراین داریم:

$$f(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i R_{|m|+2i}^m(r) \quad (17)$$

و ضرایب  $a_i$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$a_i = 2(|m| + 2i + 1) \int_0^1 w(r) f(r) R_{|m|+2i}^m(r) dr, \quad (18)$$

$i=0,1,\dots$

در اینجا  $w(r) = r$  تابع وزنی می‌باشد. در عمل، فقط  $(N+1)$  چندجمله‌ای‌های ابتدایی زرنیکه شعاعی را در نظر می‌گیریم لذا داریم:

$$f(r) = \sum_{i=0}^N a_i R_{|m|+2i}^m(r) = A^T R(r) \quad (19)$$

بردار  $A$ ، بردار ضرایب چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی و بردار  $R(r)$  چندجمله‌ای‌های پایه زرنیکه شعاعی می‌باشد پس داریم:

$$A = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T, \quad (20)$$

$$R(r) = [R_{|m|}^m(r), R_{|m|+2}^m(r), \dots, R_{|m|+2N}^m(r)]^T \quad (21)$$

#### ۲.۴. ماتریس عملیاتی مشتق

مشتق بردار

$$R(r) = [R_{|m|}^m(r), R_{|m|+2}^m(r), \dots, R_{|m|+2M}^m(r)]^T$$

را می‌توان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dR(r)}{dr} = D^{(1)} R(r), \quad (22)$$

ماتریس  $D^{(1)}$ ، ماتریس عملیاتی مشتق مرتبه  $(M+1) \times (M+1)$  و درایه‌های آن با  $d_{ij}$  نمایش داده می‌شود.

چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی، یک عنصر شعاعی از تابع زرنیکه تعریف شده در قسمت قبل می‌باشد و در رابطه تعامد زیر صدق می‌کنند

$$\int_0^1 R_n^m(r) R_k^m(r) dr = \frac{\delta_{nk}}{2(n+1)} \quad (13)$$

عنصر یا قسمت شعاعی، دو اندیسی است، به طوری که اندیس  $n$  درجه شعاعی و اندیس  $m$  مرتبه سمتی چندجمله‌ای زرنیکه شعاعی را نشان می‌دهد. همچنین  $n$  مقداری صحیح مثبت و  $m$  عددی صحیح و در رابطه زیر صدق می‌کنند:  $n = |m| + 2k$ ،  $m \leq n$ ، طبق کتاب کینتر [28]، روابط بازگشتی مربوط به چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی را به صورت زیر یادآوری می‌کنیم:

$$R_n^m(r) = \frac{1}{K_1} [(K_2 r^2 + K_3) R_{n-2}^m(r) + K_4 R_{n-4}^m(r)] \quad (14)$$

$, n = m + 4, m + 6, \dots$

ضرایب  $K_4, K_3, K_2, K_1$  به صورت زیر می‌باشد. [29]

$$K_1 = \frac{(n+m)(n-m)(n-2)}{2},$$

$$K_2 = 2n(n-1)(n-2),$$

$$K_3 = -m^2(n-1) - n(n-1)(n-2),$$

$$K_4 = \frac{-n(n+m-2)(n-m-2)}{2},$$

#### ۲.۳. تابع تقریب

چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی از مرتبه  $n$  با سمت  $m$  روی بازه  $T = [0,1]$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$R_{|m|+2k}^m(r) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{(m+2k-s)!}{s!(m+k-s)!(k-s)!} r^{m+2(k-s)} \quad (14)$$

$$, n \geq m, n = |m| + 2k,$$

در این قسمت، مسئله مقدار مرزی منفرد غیرخطی به فرم (۱) با شرایط (۲) و (۳) را با استفاده از چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی حل می‌کنیم.

با استفاده از معادله (۱۹) تابع مجهول  $f(r)$  را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

$$f(r) = A^T R(r) \quad (28)$$

بردارهای  $A$  و  $R(r)$  در معادلات (۲۰) و (۲۱) تعریف شده‌اند. با استفاده از معادلات (۲۲) و (۲۷) می‌توان روابط زیر را نتیجه گرفت:

$$f'(r) = A^T R'(r), \quad (29)$$

و همچنین داریم:

$$f''(r) = A^T R''(r) = A^T (D^{(1)})^2 R(r) \quad (30)$$

با قرار دادن معادلات (۲۸) و (۲۹) و (۳۰) در معادله (۱) داریم

$$\begin{aligned} & A^T (D^{(1)})^2 R(r) + \\ & \left(\alpha + \frac{m}{r}\right) A^T D^{(1)} R(r) \\ & = f(r, A^T R(r)), \end{aligned} \quad (31)$$

همچنین با استفاده از معادلات (۲) و (۳) و (۲۸) و (۲۹) می‌توان نوشت:

$$\alpha_1 A^T R(0) + \beta_1 A^T D^{(1)} R(0) = \gamma_1, \quad (32)$$

$$\alpha_2 A^T R(1) + \beta_2 A^T D^{(1)} R(1) = \gamma_2, \quad (33)$$

معادلات (۳۲) و (۳۳) دو معادله خطی هستند. با توجه به اینکه بردار  $A$  در معادله (۲۸) دارای  $(M+1)$  مجهول است لذا، معادله (۳۱) را در  $(M-1)$  نقطه  $r_i$  در بازه  $[0, 1]$ ، که ریشه‌های چند جمله‌ای‌های چیبیشف هستند مرتب می‌کنیم، بنابراین دستگاه معادلات غیرخطی زیر حاصل می‌شود:

با استفاده از روابط (۱۴) تا (۲۸) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} R(r) = \\ & \frac{d}{dr} [R_{|m|}^m(r), R_{|m|+2}^m(r), \dots, R_{|m|+2M}^m(r)]^T \\ & = \begin{bmatrix} (d/dr)R_{|m|}^m(r) \\ (d/dr)R_{|m|+2}^m(r) \\ \vdots \\ (d/dr)R_{|m|+2i}^m(r) \\ \vdots \\ (d/dr)R_{|m|+2M}^m(r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

حالا توابع  $\frac{d}{dr} R_{|m|+2i}^m(r), i=0, 1, \dots, M$  را به کمک پایه‌های زرنیکه شعاعی تقریب زده می‌شود. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} R_{|m|+2i}^m(r) \approx \sum_{j=0}^M d_{ij} R_{|m|+2j}^m(r), \quad (24) \\ & i = 0, 1, \dots, M \\ & d_{ij} = (2(m+2j)+2) \\ & \int_0^1 w(r) \frac{d}{dr} R_{|m|+2i}^m(r) \cdot R_{|m|+2j}^m(r) dr \quad (25) \\ & 1 \leq i \leq M+1, \quad 1 \leq j \leq M+1 \end{aligned}$$

بنابراین، ماتریس عملیاتی مشتق به صورت زیر است:

$$D^{(1)} = [d_{ij}], \quad i=0, 1, \dots, M, \quad j=0, 1, \dots, M \quad (26)$$

با استفاده از معادله (۲۲) براحتی می‌توان نوشت:

$$\frac{d^n R(r)}{dr^n} = (D^{(1)})^n R(r) \quad (27)$$

۳. پیاده‌سازی روش چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی روی مسائل فیزیولوژی

شرایط مرزی، برای این مساله به صورت زیر می باشد  
 $y'(0) = 0$  ,  $5y(1)+y'(1)=5$ ,

جدول (۲)، نتایج عددی را برای مقادیر مختلف نقاط، با طول گام یکسان  $h = 0.1$  که در ستون اول جدول آمده است، نشان می دهد. جواب های روش جدید را با نتایج حاصل از مراجع [17]، [18] و [30] در این جدول مقایسه شده است.

**مثال ۲:** مسئله مقدار مرزی دو نقطه منفرد زیر را در نظر می گیریم

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) = -e^x,$$

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

جواب واقعی برای این مسئله به صورت زیر می باشد.

$$y(x) = 2 \ln\left(\frac{c+1}{cx^2+1}\right)$$

که در اینجا  $c = 3 - 2\sqrt{2}$ .

$$A^T (D^{(1)})^2 R(r_i) +$$

$$\left(\alpha + \frac{m}{r_i}\right) A^T D^{(1)} R(r_i) \quad (34)$$

$$= f(r_i, A^T R(r_i)),$$

$$i = 1, \dots, M - 1$$

حال، با ترکیب معادلات (۳۲) و (۳۳) و (۳۴) یک دستگاه از  $(M + 1)$  معادله غیرخطی نتیجه می شود که این دستگاه را می توان به روش تکراری نیوتن حل کرد [24,25]. برای حل این دستگاه از نرم افزار متمیتیکا<sup>۱۱</sup> استفاده شده است.

#### ۴. نتایج عددی

در این قسمت، روش عددی پیشنهادی را روی سه مدل کاربردی که در زمینه فیزیولوژی است، پیاده سازی و ارائه می کنیم. کارایی، عملکرد و نتایج به دست آمده با این روش عددی جدید را با سایر روش ها در مراجع [17-20] مقایسه می شود.

**مثال ۱:** مساله انتشار اکسیژن زیر را در نظر می گیریم:

$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) = \frac{0.76129y}{y+0.03119},$$

جدول (۲): جواب های تقریبی برای مثال ۱

$x$	روش ارائه شده جدید با $n = 15$	روش مقاله [30] با $n = 15$	روش مقاله [17] با $n = 20$	روش مقاله [18] با $n = 60$
۰.۰	۰.۸۲۹۱۹۱۵۰۱۴۵۱۰۹۶۴	۰.۸۲۸۴۸۳۲۹۰۳۵۹۶۸	۰.۸۲۸۴۸۳۲۹۴۸۱۳۵۵	۰.۸۲۸۴۸۳۲۷۹۵۸۰۲
۰.۱	۰.۸۲۹۹۳۲۸۱۱۳۲۴۸۲۶۷	۰.۸۲۹۷۰۶۰۹۲۴۳۳۸۰	۰.۸۲۹۷۰۶۰۹۶۸۸۷۹۰	۰.۸۲۹۷۰۶۰۷۵۲۱۸۸۴
۰.۲	۰.۸۳۳۵۳۷۸۵۵۳۴۴۸۲۶۶	۰.۸۳۳۳۷۴۷۳۳۵۹۱۰۰	۰.۸۳۳۳۷۴۷۳۸۰۴۳۰۸	۰.۸۳۳۳۷۴۷۱۶۹۱۰۸۹
۰.۳	۰.۸۳۹۶۷۰۵۱۵۴۹۷۳۶۴۰	۰.۸۳۹۴۸۹۹۱۳۹۵۳۷۰	۰.۸۳۹۴۸۹۹۱۸۳۳۹۸۶	۰.۸۳۹۴۸۹۸۹۸۱۴۳۸۳
۰.۴	۰.۸۴۲۱۷۷۳۲۰۰۱۱۰۶۴	۰.۸۴۸۰۵۲۷۸۴۹۹۶۰۶	۰.۸۴۸۰۵۲۷۸۸۷۶۰۵۱	۰.۸۴۸۰۵۲۷۷۰۳۶۱۶۵
۰.۵	۰.۸۵۹۲۲۶۵۸۴۹۶۷۸۷۴۹	۰.۸۵۹۰۶۴۹۲۷۱۶۹۲۳	۰.۸۵۹۰۶۴۹۲۷۵۳۰۳۲	۰.۸۵۹۰۶۴۹۱۳۹۷۴۳۴
۰.۶	۰.۸۷۲۷۰۷۱۳۸۳۶۹۷۱۹۴	۰.۸۷۲۵۲۸۳۱۹۹۵۸۲۸	۰.۸۷۲۵۲۸۳۱۵۶۹۸۵۵	۰.۸۷۰۵۲۸۳۰۸۴۱۸۵۳
۰.۷	۰.۸۸۸۵۹۰۱۳۶۴۴۵۲۷۰	۰.۸۸۸۴۴۵۳۰۵۶۲۳۱۹	۰.۸۸۸۴۴۵۲۹۹۴۹۷۰۲	۰.۸۸۸۴۴۵۲۹۵۸۹۹۲۷
۰.۸	۰.۹۰۶۹۸۷۳۹۸۴۱۹۷۸۸۰	۰.۹۰۶۸۱۸۵۴۸۰۶۶۸۰	۰.۹۰۶۸۱۸۵۴۱۷۹۹۶۵	۰.۹۰۶۸۱۸۵۴۰۲۶۲۹۷
۰.۹	۰.۹۲۷۸۲۲۵۸۲۰۳۷۳۴۵۴	۰.۹۲۷۶۵۰۹۸۸۳۶۵۵۸	۰.۹۲۷۶۵۰۹۸۳۰۵۲۵۶	۰.۹۲۷۶۵۰۹۸۲۵۲۶۰
۱.۰	۰.۹۵۱۱۰۹۵۰۶۵۰۴۹۷۲۲	۰.۹۵۰۹۴۵۷۹۸۴۹۶۴۸	۰.۹۵۰۹۴۵۷۹۴۸۰۵۲۳	۰.۹۵۰۹۴۵۷۹۴۶۱۰۵۶

جواب برای این مسئله را با شرایط زیر لحاظ می‌کنیم  
 $y'(0) = 0$  ,  $y(1)+y'(1)=0$ ,

جدول (۳)، خطاهای عددی روش عددی ارائه شده جدید با مرتبه‌های مختلف راه، با روش مقاله [17]، [30] برای مثال ۲ مقایسه می‌کند.

جدول ۴، نتایج عددی را با روش پیشنهادی جدید توضیح و تفسیر می‌کند و جواب‌های عددی را با سایر روش‌های ذکر شده در مراجع [19,20,30] مقایسه می‌کند.

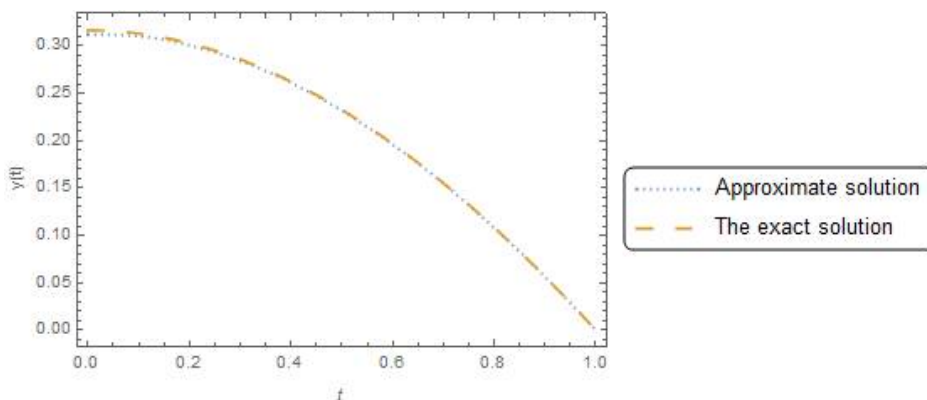
**مثال ۳:** مسئله مدل هدایت گرما در سر انسان را در نظر می‌گیریم:

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) = -e^{-y}$$

جدول (۳): خطاهای عددی برای مثال ۲

$x$	روش جدید با $n = 15$	روش مقاله [30] با $n = 15$	روش مقاله [30] با $n = 20$	رویکرد دوم مقاله [17] با $n = 20$
۰.۰	۰.۰۰۴۴۹۴۴۸۰	$3.88 \times 10^{-16}$	$2.22 \times 10^{-16}$	$2.00 \times 10^{-6}$
۰.۱	۰.۰۰۲۹۱۱۴۲۰	$3.88 \times 10^{-16}$	$3.23 \times 10^{-16}$	$1.99 \times 10^{-6}$
۰.۲	۰.۰۰۲۰۰۸۶۵۰	$3.23 \times 10^{-16}$	$4.99 \times 10^{-16}$	$1.97 \times 10^{-6}$
۰.۳	۰.۰۰۱۶۲۰۷۴۰	$3.88 \times 10^{-16}$	$2.07 \times 10^{-16}$	$1.94 \times 10^{-6}$
۰.۴	۰.۰۰۱۲۳۸۳۹۰	$2.22 \times 10^{-16}$	$3.88 \times 10^{-16}$	$1.83 \times 10^{-6}$
۰.۵	۰.۰۰۰۹۵۹۵۸۹	$6.10 \times 10^{-16}$	$4.44 \times 10^{-16}$	$1.78 \times 10^{-6}$
۰.۶	۰.۰۰۰۷۵۳۵۳۸	$8.32 \times 10^{-17}$	$8.32 \times 10^{-17}$	$1.67 \times 10^{-6}$
۰.۷	۰.۰۰۰۴۷۱۶۱۰	$4.44 \times 10^{-16}$	$3.23 \times 10^{-16}$	$1.34 \times 10^{-6}$
۰.۸	۰.۰۰۰۳۳۴۹۰۳	$8.32 \times 10^{-17}$	$2.25 \times 10^{-16}$	$9.20 \times 10^{-7}$
۰.۹	۰.۰۰۰۱۷۰۶۸۵	$1.94 \times 10^{-16}$	$1.24 \times 10^{-16}$	$4.57 \times 10^{-7}$
۱.۰	$6.64074 \times 10^{-18}$	$1.96 \times 10^{-17}$	$7.11 \times 10^{-18}$	۰

نمودار (۳): جواب واقعی و جواب تقریبی برای  $n = 15$





جدول (۴): جواب‌های تقریبی برای مثال ۳

$x$	روش ارائه شده جدید با $n = 15$	روش مقاله [30] با $n = 15$	روش مقاله [19] با مرتبه چهار	روش مقاله [18]
۰.۰	۰.۳۶۶۴۴۶۴۴۵۸	۰.۳۶۷۵۱۶۸۱۵۱	۰.۳۶۷۵۱۸۱۰۷۴	۰.۳۶۷۵۱۶۹۷۱۰
۰.۱	۰.۳۶۵۷۴۵۲۶۹۴	۰.۳۶۶۳۶۳۲۹۲	۰.۳۶۶۳۶۳۷۵۶۱	۰.۳۶۶۳۶۲۵۶۹۷
۰.۲	۰.۳۶۲۳۳۵۰۳۹۲	۰.۳۶۲۸۹۴۰۶۶۱	۰.۳۶۲۸۹۵۹۳۷۸	۰.۳۶۲۸۹۴۱۰۶۶
۰.۳	۰.۳۵۶۵۱۸۷۰۷۱	۰.۳۵۷۰۹۷۵۴۵۷	۰.۳۵۷۰۹۹۱۴۲۹	۰.۳۵۷۰۹۷۵۸۴۲
۰.۴	۰.۳۴۸۳۷۹۷۶۰۷	۰.۳۴۸۹۴۸۲۰۶	۰.۳۴۸۹۴۹۹۰۳	۰.۳۴۸۹۴۸۴۶۱۲
۰.۵	۰.۳۳۷۸۴۰۶۳۲۵	۰.۳۳۸۴۱۲۱۴۸۷	۰.۳۳۸۴۱۳۶۵۸۱	۰.۳۳۸۴۱۲۱۸۹۳
۰.۶	۰.۳۲۴۸۴۸۴۴۸۷	۰.۳۲۵۴۴۳۵۲۲۴	۰.۳۲۵۴۴۵۰۰۱۹	۰.۳۲۵۴۴۳۵۶۳۱
۰.۷	۰.۳۰۹۴۱۴۲۲۸۶	۰.۳۰۹۹۸۶۰۴۰۲	۰.۳۰۹۹۸۷۸۵۶۷	۰.۳۰۹۹۸۶۰۸۱۰
۰.۸	۰.۲۹۱۳۶۶۲۴۰۶	۰.۲۹۱۹۷۱۱۰۳۰	۰.۲۹۱۹۷۸۹۶۵۴	۰.۲۹۱۹۷۱۱۴۴۰
۰.۹	۰.۲۷۰۶۹۷۵۳۷۷	۰.۲۷۱۳۱۷۰۱۰۱	۰.۲۷۱۳۱۸۵۶۳۷	۰.۲۷۱۳۱۷۰۵۱۲
۱.۰	۰.۲۴۷۳۰۱۹۱۳۵	۰.۲۴۷۷۲۷۷۲۳۳	۰.۲۴۷۷۲۷۲۸۳۷	۰.۲۴۷۷۲۷۷۶۴۶

مثال ۴: مسئله مقدار مرزی دو نقطه منفرد زیر مفروض شده است:

۱.  $y(0) = \ln(\frac{1}{4})$ ,  $y(1)+5y'(1)=\ln(\frac{1}{5})-5$

۲.  $y'(0) = 0$ ,  $y(1)+5y'(1)=\ln(\frac{1}{5})-5$

$$y''(x) + (1 + \frac{h}{x})y'(x) = \frac{5x^3(5x^5e^y - h - 4 - x)}{4 + x^5}$$

جواب واقعی برای این مسئله بصورت

$$y(x) = \ln(\frac{1}{4+x^5})$$

جداول (۵) و (۶) به ترتیب، ماکزیمم خطای قدرمطلق برای حالت‌های  $h < 1$  و  $h \geq 1$  به نمایش می‌گذارد.

جواب تقریبی این مسئله را، با روش جدید با در نظر گرفتن شرایط ویژه زیر در دو حالت زیر بدست می‌آوریم:

جدول (۵): ماکزیمم خطاهای قدر مطلق در جواب برای مثال ۴ با  $h = 0.25$ ,  $h = 0.75$

$m$	حالت (1) $h = 0.25$	حالت (1) $h = 0.75$	حالت (2) $h = 0.25$	حالت (2) $h = 0.75$
5	$1.31208 \times 10^{-4}$	$1.73352 \times 10^{-4}$	$8.23285 \times 10^{-4}$	$8.10914 \times 10^{-4}$
10	$4.49913 \times 10^{-5}$	$4.09675 \times 10^{-1}$	$8.33417 \times 10^{-5}$	$8.29653 \times 10^{-5}$
15	$3.35557 \times 10^{-6}$	$3.62037 \times 10^{-6}$	$6.20416 \times 10^{-6}$	$8.81984 \times 10^{-6}$
20	$5.08941 \times 10^{-2}$	$1.6058 \times 10^{-1}$	$5.44382 \times 10^{-2}$	$1.18944 \times 10^{-1}$

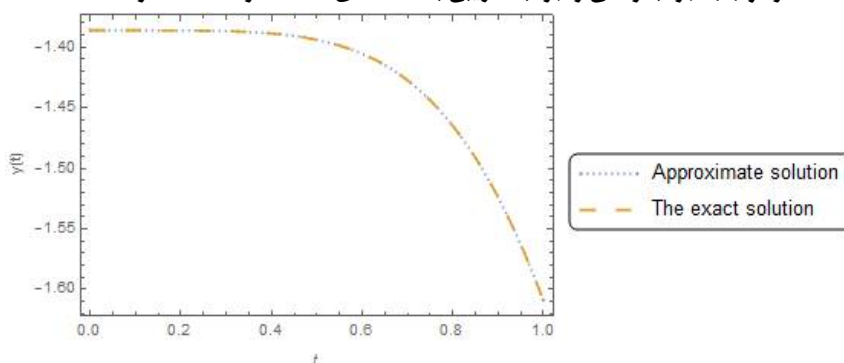
جدول (۶): ماکزیمم خطاهای قدر مطلق در جواب برای مثال ۴ با  $h = 1$ ,  $h = 2$

$m$	حالت (1) $h = 1$	حالت (1) $h = 2$	حالت (2) $h = 1$	حالت (2) $h = 2$
۵	$1.84462 \times 10^{-4}$	$1.87495 \times 10^{-4}$	$8.83408 \times 10^{-4}$	$1.23505 \times 10^{-3}$
۸	$6.31004 \times 10^{-4}$	$5.94611 \times 10^{-5}$	$2.46414 \times 10^{-4}$	$2.68139 \times 10^{-4}$
۱۵	$3.38567 \times 10^{-6}$	$2.10792 \times 10^{-6}$	$9.54896 \times 10^{-6}$	$1.11313 \times 10^{-5}$
۲۰	$7.56783 \times 10^{-1}$	$4.90419 \times 10^{-2}$	$1.32685 \times 10^{-1}$	$1.51248 \times 10^{-1}$

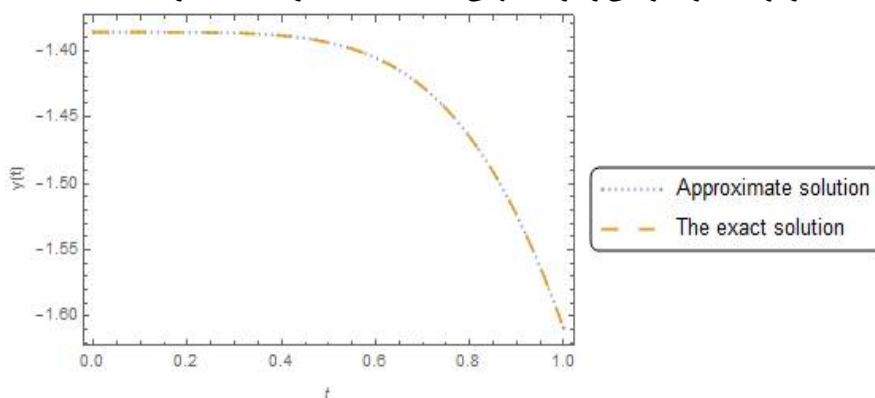
همچنین نمودار (۴) همگرایی جواب تقریبی به جواب واقعی را برای  $n=15$  در حالت (1) با  $h=1$  نشان می‌دهد.

این جداول و نتایج بدست آمده، دلایل محکم و قاطعی بر دقت و کارایی رویکرد جدید نسبت به مقایسه با روش‌های عددی دیگر در مراجع [19-20] می‌باشد. و

نمودار (۴): جواب واقعی و جواب تقریبی با سمت‌های  $z=0$  و  $n=15$  و  $h=1$



نمودار (۵): جواب واقعی و جواب تقریبی با سمت  $z=0$  و  $n=15$  و  $h=0.25$



### نتیجه‌گیری

این مقاله، یک روش عددی جدید، بر پایه چند جمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی برای جواب عددی یک دسته از مسائل مقدار مرزی که در زمینه‌های بیولوژی و فیزیولوژی ایجاد می‌شود، ارائه می‌دهد. در این مقاله به کمک چندجمله‌ای‌های زرنیکه شعاعی با سمت ثابت و ماتریس عملیاتی مشتق آنها، این‌گونه مسائل مقدار مرزی به یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل شدند، تا بتوان آنها را به آسانی حل نمود. پیاده‌سازی و اجرای این روش عددی جدید نسبت به سایر روش‌های موجود، حکایت از آن دارد، که این فرآیند مطالعاتی از دقت و کارایی بالایی برخوردار می‌باشد.

285– 287, 1975

## فهرست منابع

- [11] J.B. Garner, R. Shivaji, Diffusion problems with mixed non-linear boundary condition, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 148, pp. 422–430, 1990
- [12] B.F. Gray, The distribution of heat sources in the hu-man head: a theoretical consideration, *J. Theor. Biol.*, vol. 82 pp. 473– 476, 1980
- [13] R.C. Duggan, A.M. Goodman, Point wise bounds for nonlinear heat conduction model for the human head, *Bull. Math. Biol.*, vol. 48 (2), pp. 229–236, 1989
- [14] R.K. Pandey, On a class of weakly regular singular two point boundary value problems II, *J. Differential Equations*, vol. 127, pp. 110-123, 1996
- [15] M.M. Chawla, P.N. Shivkumar, On the existence of so-lution of a class of singular two--point nonlinear boun-dary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 19, pp. 379–388, 1987
- [16] R.D. Russell, L.F. Shampine, Numerical methods for singular boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 12, pp. 13-36, 1975
- [17] S.A. Khuri, A. Sayfy, A novel approach for the solution of a class of singular boundary value problems arising in physi- ology, *J. Math. Comput. Model.*, vol. 52, pp. 626–636, 2010
- [18] Hikmet Caglar, Nazan Caglar, Mehmet Ozer, B-spline solu-tion of non-linear singular boundary valueproblems arising in physiology, *Chaos Solitons Fractals*, vol. 39, pp. 1232-1237, 2009
- [19] J. Rashidinia, R. Mohammadi, R. Jalilian, The numerical solution of non-linear singular boundary value problems
- [1] J.A. Adam, A simplified mathematical model of tumor growth, *Math. Biosci.*, vol.81, pp.224–229, 1986
- [2] J.A. Adam, A mathematical model of tumor growth II: effect of geometry and spatial non-uniformity on stability, *Math. Biosci.* vol.86, pp.183–211, 1987
- [3] J.A. Adam, S.A. Maggelakis, Mathematical model of tumor growth IV: effect of necrotic core, *Math. Biosci.*, vol. 97, pp. 121–136, 1989
- [4] A.C. Burton, Rate of growth of solid tumor as a prob-lem of diffusion, *Growth*, vol.30 , pp.157–176, 1966
- [5] H.P. Greenspan, Models for the growth of solid tumor as a problem by diffusion, *Stud. Appl. Math.*, vol.52, pp.317–340, 197
- [6] N.S. Asaithambi, J.B. Goodman, Point wise bounds for a class of singular diffusion problems in physiology, *Appl. Math. Comput.*, vol. 30 , pp.215–222, 1989
- [7] H.S. Lin, Oxygen diffusion in a spherical cell with non-linear oxygen uptake kinetics, *J. Theor. Biol.*, vol. 60, pp.449–457, 1976
- [8] D.L.S. McElwain, A re-examination of oxygen diffusion in a spherical cell with MichaelisMenten oxygen uptake kinetics, *J. Theor. Biol.*, vol. 71, pp.255–263, 1978
- [9] N. Rashevsky, *Mathematical Biophysics*, vol. 1, Dover, New York, 1960
- [10] U. Flesch, The distribution of heat sources in the human head: a theoretical consideration, *J. Theor. Biol.*, vol. 54, pp.

- [25] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, B. Basirat, Computational method based on Bernstein operational matrices for nonlinear Volterra- Fredholm- Hammerstein integral equations, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, vol. 17, pp.52–61, 2012
- [26] Mahajan VN. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils. *JOSA*. 1981 Jan 1; 71 (1): 75-85
- [27] Noll RJ. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *JOsA*. 1976 Mar 1; 66(3):207-11.
- [28] Kintner EC. On the mathematical properties of the Zernike polynomials. *Journal of Modern Optics*. 1976 Aug 1; 23(8):679-80.
- [29] Frieden BR. VIII Evaluation, Design and Extrapolation Methods for Optical Signals, Based on Use of the Prolate Functions. *Progress in optics*. 1971 Dec 31; 9:311-407.
- [30] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh , Numerical Solution of Nonlinear Singular Ordinary Differential Equations Arising in Biology Via Operational Matrix of Shifted Legendre Polynomials, *Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, vol .73(3), pp. 95-104, 2011
- arising in physiology, *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 185, pp. 360–367, 2007
- [20] R.K. Pandey, Arvind K. Singh, On the convergence of a finite difference method for a class of singular boundary value problems arising in physiology, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 166, pp. 553–564, 2004
- [21] A. Saadatmandi, M. Dehghan, A new operational matrix for solving fractional-order differential equations, *J. Comput. Math. Appl.*, vol. 59, pp. 1326–1336, 2010
- [22] K. Maleknejad, B. Basirat, E. Hashemizadeh, Hybrid Legendre polynomials and Block-Pulse functions approach for nonlinear Volterra–Fredholm integro-differential equations, *Comput. Math. Appl.*, vol. 61, pp. 2821–2828, 2011
- [23] K. Maleknejad, E. Hashemizadeh , A numerical approach for Hammerstein integral equations of mixed type using operational matrices of hybrid functions, *Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, vol .73(3), pp. 95-104, 2011
- [24] K. Maleknejad, S. Sohrabi, H. Derili, A new computational method for solution of non-linear Volterra-Fredholm integro-differential equations, *Int. J. Appl. Math.*, vol. 87(2), pp. 327–338, 2010