

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نتایج پیرامون مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار

خدیجه بای‌پور^۱، مهدی روحی^{۲*}

(^۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۱/۱۸

چکیده

در این مقاله، ضمن مقایسه‌ی مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار با مسئله‌ی مکمل تک‌مقدار، ساختار مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار و شرایط لازم و کافی برای کران‌داری و تحدب آن بررسی می‌شود. با معرفی رده‌ی جدیدی از ماتریس‌ها شرط لازم و کافی برای شدنی بودن مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار به دست می‌آید. همچنین چند کاربرد از مسئله ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: مسئله‌ی مکمل، مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار، مسئله‌ی مکمل تک‌مقدار.

۱- مقدمه

تعداد^۵ [۴]، برنامه‌ریزی مینی ماکس^۶ [۱۷] را شامل می‌شود. در اینجا به دو مورد از مسائل هم‌ارز با مسئله‌ی (2.1) اشاره می‌شود.

به‌ازای $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $q \in \mathbb{R}^n$ مسئله‌ی مکمل خطی عبارت است از یافتن $z, w \in \mathbb{R}^n$ که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} w &= Mz + q, \\ z &\geq 0, w \geq 0, \langle z, w \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

و با نماد $LCP(M, q)$ نشان داده می‌شود. با فرض

$$\Omega(x) = \{w : w = Mx + q\}$$

$$F(x, w) = w$$

مسئله‌ی (2.1) به مسئله‌ی (3.1) تقلیل می‌یابد. مسئله‌ی مکمل خطی ساده‌ترین مسئله‌ی مکمل است که به‌طور گسترده مطالعه شده است. به دلیل اینکه شرایط بهینه‌ی ضروری مرتبه اول برنامه‌ریزی درجه دوم شامل قیود نامساوی با متغیرهای نامنفی تشکیل مسئله‌ی مکمل خطی می‌دهد.

شرایط بهینگی برنامه‌ریزی درجه دوم:

$$\begin{aligned} \min \quad & C^T x + \frac{1}{2} x^T D x \\ \text{subject to} \quad & Ax \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

را در نظر بگیرید که $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^m$. مطابق [۱۳، نتیجه ۱.۱]، اگر بردار \bar{x} جواب بهینه‌ی (4.1) باشد، آن‌گاه بردار $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} C + D \bar{x} - A^T \bar{y} &\geq 0, \quad \bar{y} \geq 0, \\ \bar{y}^T (A \bar{x} - b) &= 0, \\ \bar{x}^T (C + D \bar{x} - A^T \bar{y}) &= 0. \end{aligned}$$

مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار^۱ عبارت است از یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ به‌طوری‌که

$$x \geq 0, y \geq 0, \langle x, y \rangle = 0, \quad (1.1)$$

برای بعضی $y \in \Theta(x)$ که $\Theta: \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت مجموعه-مقدار است.

مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار در تحلیل حساسیت مسائل مکمل و مسائل تعادل اقتصادی نقش مهمی بازی می‌کند [۱۶ و ۸]. با این حال مطالعه‌ی بسیار کمی درباره‌ی مسائل مکمل مجموعه-مقدار صورت گرفته است.

در واقع، (1.1) می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود، که با نماد $SVNCP(F, \Omega)$ نشان داده می‌شود و عبارت است از یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} x &\geq 0, F(x, w) \geq 0, \\ \langle x, F(x, w) \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

برای بعضی $w \in \Omega(x)$ که $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $\Omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ مجموعه-مقدار است. برای دیدن این مطلب، با فرض $\Theta(x) = \bigcup_{w \in \Omega(x)} \{F(x, w)\}$ (1.1) به (2.1) تقلیل می‌یابد. بالعکس، اگر $F(x, w) = w$ و $\Omega(x) = \Theta(x)$ آن‌گاه (2.1) به فرم (1.1) در می‌آید.

$SVNCP(F, \Omega)$ بیان‌گر مسئله‌ی مکمل غیر خطی

مجموعه-مقدار است. هنگامی که

$$M: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ که در آن } M(w)x + q(w)$$

و $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، مسئله‌ی (2.1) مسئله‌ی

مکمل خطی مجموعه-مقدار نامیده می‌شود و با نماد

$$SVLCP(M, q, \Omega)$$

مسئله‌ی $SVNCP(F, \Omega)$ ارائه شده با (2.1) مسائل

مهم و جالب بسیاری در حوزه بهینه‌سازی مثل مسئله‌ی

مکمل خطی [۷ و ۵]، مسئله‌ی مکمل خطی توسعه‌یافته^۲

[۱۰ و ۱۲]، مسئله‌ی مکمل غیرخطی [۸]، مسئله‌ی مکمل

ضمنی^۳ [۱۵]، نامساوی تغییراتی^۴ [۲]، مسئله‌ی

1. Set-valued complementarity problem
2. Extended linear complementarity problem
3. Implicit complementarity problem
4. Variational inequality

5. Equilibrium problem
6. Min-max programming

و در \bar{x} نیم‌پیوسته‌ی درونی^۲ است، هرگاه

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} M(x) \supseteq M(\bar{x}).$$

گوییم M در \bar{x} پیوسته است هرگاه در \bar{x} هم نیم‌پیوسته‌ی بیرونی و هم نیم‌پیوسته‌ی درونی باشد [۱]. نتایجی که در ادامه بیان می‌شود در بخش بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. لم زیر، به لم فاركاس^۳ معروف است.

لم ۲-۱: [۵، قضیه ۲،۷،۷] فرض کنید $b \in \mathbb{R}^m$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. آن‌گاه دقیقاً یکی از عبارات زیر برقرار است:

(الف) $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $x \geq 0, Ax = b$.

(ب) $y \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به طوری که $y^T A \geq 0, y^T b < 0$.

قضیه زیر به قضیه وایلی^۴ معروف است.

قضیه ۲-۲: [۵، قضیه ۲،۷،۱۱] فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ دستگاه $Ax > 0, x > 0$ جواب دارد اگر و فقط اگر دستگاه $y^T A \leq 0, y \geq 0, y \neq 0$ جوابی نداشته باشد.

۳- تفاوت مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار با مسئله‌ی مکمل تک‌مقدار

رده‌های متنوع ماتریس‌ها در نظریه‌ی مسئله‌ی مکمل خطی نقش‌های متفاوتی بازی می‌کنند. به‌عنوان مثال، P-ماتریس، S-ماتریس و ... برای جزئیات بیشتر به [۵۸] مراجعه کنید.

تعریف ۳-۱: ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک S-ماتریس است اگر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به طوری که $Mx > 0, x > 0$ ، به‌علاوه، بنابر [۹، تذکر ۲،۲]

اگر این شرایط به همراه شرط شدنی بودن بردار x ، گردآوری شود، LCP(M, q) به دست می‌آید که

$$z = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} C \\ -b \end{pmatrix}.$$

به ازای نگاشت $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، مسئله‌ی مکمل غیرخطی عبارت است از یافتن $z \in \mathbb{R}^n$ به طوری که

$$z \geq 0, F(z) \geq 0,$$

$$\langle z, F(z) \rangle = 0. \quad (5.1)$$

اگر

$$F(x, w) = F(x) + w$$

و

$$\Omega(x) = \{0\}$$

آن‌گاه (2.1) به فرم (5.1) تبدیل می‌شود. در سراسر این مقاله، فرض می‌شود که تابع مجموعه-مقدار $\Omega: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ دارای مقادیر بسته است، یعنی، به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی $\Omega(x)$ بسته است. همچنین مجموعه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی با $\mathbb{R}^{m \times n}$ نشان داده می‌شود. توجه شود که به ازای $x \in \mathbb{R}^n, x \geq 0$ به معنی $x_i \geq 0$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$ است.

۲- پیشنهاد

به ازای نگاشت $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sup M(x) := \{u : \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \inf \text{dist}(u, M(x)) = 0\},$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \inf M(x) := \left\{ u \begin{aligned} &: \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \text{dist}(u, M(x)) \\ &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

گوییم M در \bar{x} نیم‌پیوسته‌ی بیرونی^۱ است، هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sup M(x) \subseteq M(\bar{x}),$$

2. Inner semicontinuous
3. Farkas's lemma
4. Ville's theorem

1. Outer semicontinuous

آن‌گاه به‌ازای هر $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ از پایین کراندار،
 SVLCP(M, q, Ω) شدنی است.

تعریف ۳-۳: ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک
P-ماتریس گفته می‌شود هرگاه درمیان همه‌ی
 زیرماتریس‌های اصلی آن مثبت باشند.
 با استفاده از [۵، قضیه ۳،۳،۴] مشخصه‌ی

$$\forall x \neq 0, \exists k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \text{s.t. } x_k(Mx)_k > 0, \quad (3.3)$$

برای P-ماتریس‌ها به‌دست می‌آید. بنابر [۵، نتیجه ۳،۳،۵]
 هر P-ماتریس یک S-ماتریس است. به‌عبارت دیگر، اگر
 M در (3.3) صدق کند، آن‌گاه دستگاه زیر جواب دارد:
 $x \geq 0, \quad Mx > 0. \quad (4.3)$

برای بعضی $w \in \Omega(x)$ شرایط متناظر در مسئله‌ی
 مکمل مجموعه-مقدار

$$\forall x \neq 0, \exists k \in \{1, 2, \dots, n\}, \\ \text{s.t. } x_k(M(w)x)_k > 0, \quad (5.3)$$

و

$$x \geq 0, M(w)x > 0. \quad (6.3)$$

هستند.

مثال زیر نشان می‌دهد که شمول بیان‌شده در [۵، نتیجه
 ۳،۳،۵]، برای مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار برقرار
 نیست.

مثال ۳-۴: فرض کنید

$$\Omega(x) = \begin{cases} -1, & x_1 = 0 \\ 1, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\ M(w) = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{bmatrix}.$$

به‌ازای $x_1 \neq 0$ داریم:

$$M(w)x = (x_1, -x_2).$$

$$x_1(M(w)x)_1 = x_1^2 > 0$$

به‌ازای $x_1 = 0, x_2 \neq 0$ (چون $x \neq 0$)، پس

$$M(w)x = (-x_1, x_2)$$

$$x_2(M(w)x)_2 = x_2^2 > 0.$$

شرط فوق با شرط زیر معادل است:

$$x \geq 0, Mx > 0.$$

با این‌حال، چنین هم‌ارزی برای حالت متناظر در مسئله‌ی
 مکمل مجموعه-مقدار برقرار نیست، یعنی، برای بعضی

$$w \in \Omega(x) \\ x > 0, M(w)x > 0, \quad (1.3)$$

هم‌ارز با

$$x \geq 0, M(w)x > 0, \quad (2.3)$$

نیست. واضح است که (1.3) شرط (2.3) را نتیجه
 می‌دهد. اما عکس آن برقرار نیست.

مثال ۳-۲: فرض کنید

$$\Omega(x) = \begin{cases} \{0, 1\}, & x = (1, 0) \in \mathbb{R}^2 \\ \{0\}, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\ M(w) = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}.$$

اگر $M(w)x > 0$ آن‌گاه $w = 1$ ، و چنین حالتی تنها
 زمانی رخ می‌دهد که $x = (1, 0)$ ، بنابراین، (2.3)
 برقرار است اما (1.3) برقرار نیست.

توجه کنید که نگاهت Ω در مثال ۱ نیم‌پیوسته‌ی بیرونی
 است. بنابر [۱۸، قضیه ۴] اگر Ω نیم‌پیوسته‌ی درونی و
 $M(w)$ پیوسته باشد، آن‌گاه (1.3) و (2.3) معادل
 هستند.

بنابر [۵، گزاره ۳،۱،۵] ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک S-
 ماتریس است اگر و فقط اگر $LCP(M, q)$ به‌ازای هر
 $q \in \mathbb{R}^n$ شدنی باشد. نتیجه‌ی مشابهی برای مسئله‌ی
 مکمل خطی مجموعه-مقدار برقرار است. بنابر [۱۸،
 قضیه ۵] اگر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که
 برای بعضی $w \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}_\infty} \bigcup_{n \in \bar{N}} \Omega(Nx)$ داشته
 باشیم:

$$x \geq 0, M(w)x > 0,$$

که در آن

$$N_\infty := \{N : N = \{n, n+1, \dots\}, n \geq 1\},$$

نیمه‌یکنوای قوی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر نگاه مثبت q ، (یعنی $q(w) > 0$ به‌ازای هر w) صفر، جواب یکتای $SVLCP(M, q, \Omega)$ است.

(ب) اگر صفر، جواب یکتای $SVLCP(M, q, \Omega)$ با $q(w) > 0$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$ نیمه‌یکنوای ضعیف است.

قسمت دوم قضیه‌ی ۳-۷ بیان می‌کند که نیمه‌یکنوایی ضعیف یک شرط لازم است برای اینکه صفر، جواب یکتای $SVLCP(M, q, \Omega)$ باشد. اگرچه این شرط، یک شرط کافی برای یکتایی جواب نیست.

مثال ۳-۸: فرض کنید

$$M(w) = \begin{bmatrix} -w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Omega(x) = \{0, 1\}.$$

به‌ازای هر $x = (x_1, x_2, x_3)$ ناصفر داریم:

$$M(0)x = (x_2, x_3, x_1)$$

اگر $q = (1, 1, 1)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه با محاسبات ساده، $x = (1, 0, 0)$

$$x \geq 0, M(1)x + q \geq 0, \langle x, M(1) + q \rangle = 0,$$

صدق می‌کند، یعنی $SVLCP(M, q, \Omega)$ جواب ناصفر دارد.

توجه کنید که نگاه مجموعه-مقدار در مثال ۳-۸ پیوسته است.

تا اینجا، بعضی تفاوت‌های مهم بین مسئله‌ی مکمل تک‌مقداری و مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار را بیان کردیم. چنین تفاوت‌هایی، بدون شک، مطالعه‌ی مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار را به موضوعی چالش برانگیز و جالب تبدیل می‌کند.

بنابراین، شرط (5.3) برقرار است. اما شرط (6.3) برقرار نیست چون $M(w)x = (x_1, -x_2)$ یا $M(w)x = (-x_1, x_2)$. پس $M(w)x > 0$ نتیجه می‌دهد $x_2 < 0$ یا $x_1 < 0$ که متناقض با $x \geq 0$ است.

تعریف ۳-۵: $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس نیمه‌یکنوای^۱

گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x \geq 0$ ناصفر،

$$\exists x_k > 0 \text{ s. t. } (Mx)_k \geq 0.$$

بنابر [۳، ۹، ۳]، M نیمه‌یکنواست اگر و فقط اگر صفر، جواب یکتای $LCP(M, q)$ با $q > 0$ باشد. این نتیجه برای حالت مجموعه-مقدار هم برقرار است. قبل از آن، نیاز داریم تعمیم ویژگی نیمه‌یکنوایی را به حالت مجموعه-مقدار تعریف کنیم.

تعریف ۳-۶: مجموعه‌ی ماتریس‌های

$$\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$$

(الف) نیمه‌یکنوای قوی^۲ گفته می‌شود هرگاه به‌ازای

هر $x \geq 0$ ناصفر، به‌ازای هر $w \in \Omega(x)$

$$\exists x_k > 0 \text{ s. t. } (M(w)x)_k \geq 0.$$

(ب) نیمه‌یکنوای ضعیف^۳ گفته می‌شود هرگاه به‌ازای

هر $x \geq 0$ ناصفر، برای بعضی $w \in \Omega(x)$

$$\exists x_k > 0 \text{ s. t. } (M(w)x)_k \geq 0.$$

مشابه مسئله‌ی مکمل خطی تک‌مقداری، نتایجی برای مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار به‌دست آمده است که در آن نیمه‌یکنوایی نقش ایفا می‌کند.

قضیه ۳-۷: [۱۸، قضیه ۱۰] برای $SVLCP(M, q, \Omega)$

عبارات زیر برقرار هستند:

(الف) اگر مجموعه‌ی ماتریس‌های

$$\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$$

1. Semimonotone
2. Strongly semimonotone
3. Weakly semimonotone

قضیه ۴-۲: فرض کنید $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ و مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ C_+ -ماتریس باشد. آن‌گاه $SVLCP(M, q, \Omega)$ شدنی است اگر و فقط اگر برای بعضی $w \in \Omega(x)$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$[x \geq 0, M(w)x \geq 0, x^T M(w)x = 0] \Rightarrow [x^T q(w) \geq 0] \quad (1.4)$$

برهان. فرض کنید (1.4) برقرار باشد. اگر مسئله، شدنی نباشد، آن‌گاه به ازای هر $w \in \Omega(x)$ بنابر لم ۱، بردار $v \geq 0$ وجود دارد به طوری که $v^T M(w) \leq 0, v^T q(w) < 0$.

چون مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ C -ماتریس است، داریم $v^T M(w)v = 0$ و چون مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ C_+ -ماتریس است، $M(w)v = -M^T(w)v \geq 0$ ، که متناقض با رابطه‌ی (1.4) است. بنابراین مسئله باید شدنی باشد.

بالعکس، اگر مسئله شدنی باشد و اگر برداری باشد به طوری که برای بعضی $w \in \Omega(x)$ در $v^T M(w)v = 0, M(w)v \geq 0, M^T(w)v = -M(w)v \leq 0$

چون $M(w)$ یک C_+ -ماتریس است. در نتیجه $v^T q(w) \geq 0$ چون $SVLCP(M, q, \Omega)$ شدنی است. ■

۵- بررسی ساختار مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار

مجموعه‌ی جواب $SVNCP(F, \Omega)$ را با $SOL(F, \Omega)$ نشان می‌دهیم، و نماد $SOL(F_w)$ برای نشان دادن مجموعه‌ی جواب $NCP(F_w)$ به کار می‌رود. در ادامه مشخصه‌ای برای مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار بیان می‌کنیم.

۴- شرط لازم و کافی برای شدنی بودن مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار

به‌ازای $SVLCP(M, q, \Omega)$ مجموعه‌های $FEA(M, q, \Omega) = \{x: \exists w \in \Omega(x), x \geq 0, M(w)x + q(w) \geq 0\}$

$$SOL(M, q, \Omega) = \{x: x \in FEA(M, q, \Omega), \langle x, M(w)x + q(w) \rangle = 0\}$$

به ترتیب **مجموعه‌ی شدنی^۱** و **مجموعه‌ی جواب^۲** نامیده می‌شوند. به‌وضوح، برای هر مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار، شمول $SOL(M, q, \Omega) \subseteq FEA(M, q, \Omega)$

برقرار است اما عکس مطلب در کل درست نیست. به ازای مسئله مکمل خطی مجموعه-مقدار داده شده، اگر مجموعه‌ی شدنی (به ترتیب، مجموعه‌ی جواب) ناتهی باشد، مسئله را **شدنی^۳** (به ترتیب، **حل‌پذیر^۴**) می‌نامند. در ادامه با تعریف رده‌ی جدیدی از ماتریس‌ها، شرط لازم و کافی برای شدنی بودن مسئله مکمل خطی مجموعه-مقدار ارائه می‌دهیم.

تعریف ۴-۱: مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$

(الف) **C -ماتریس** گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر $w \in \Omega(x)$ داشته باشیم:

$$x^T M(w)x \geq 0, \forall x \geq 0,$$

(ب) **C_+ -ماتریس** گفته می‌شود هرگاه C -ماتریس باشد و به‌ازای هر $w \in \Omega(x)$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$[x^T M(w)x = 0, x \geq 0] \Rightarrow [(M + M^T)(w)x = 0]$$

1. Feasible set
2. Solution set
3. Feasible
4. Solvable

$$\begin{aligned} x \geq 0, F(x, w) \geq 0, \langle x, F(x, w) \rangle &= 0, \\ G(x, w) \geq 0, H(x, w) &= 0, \end{aligned}$$

که معادل است با یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ و $w \in \mathbb{R}^m$ که در

$$\begin{aligned} x \geq 0, F(x, w) \geq 0, \langle x, F(x, w) \rangle &= 0, \\ 0 \geq 0, G(x, w) \geq 0, \langle 0, G(x, w) \rangle &= 0, \\ \alpha \geq 0, H(x, w) \geq 0, \langle \alpha, H(x, w) \rangle &= 0, \end{aligned}$$

صدق کنند. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} F(x, w) \\ G(x, w) \\ H(x, w) \end{pmatrix} \geq 0, \\ \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F(x, w) \\ G(x, w) \\ H(x, w) \end{pmatrix} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

■ که نتیجه‌ی مورد نظر است.

نتیجه‌ی قبل مشخص می‌کند که مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار متفاوت از مسئله‌ی مکمل تک‌مقداری است، چون محدود است به اینکه بعضی مولفه‌های جواب باید مثبت یا صفر باشند، که در حالت تک‌مقداری، چنین محدودیتی مورد نیاز نیست.

زمانی که بردار صفر تنها جواب $LCP(M, 0, \Omega)$ باشد، آن‌گاه (1.4) به‌وضوح برقرار است. ماتریس‌ها با این ویژگی با نماد مشخصی نشان داده می‌شوند.

تعریف ۳-۵: مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$ **R₀-ماتریس** نامیده می‌شود هرگاه $SOL(M, 0, \Omega) = \{0\}$ رده‌ی چنین ماتریس‌هایی با نماد R_0 نشان داده می‌شود. نتیجه‌ی بعدی ارتباط رده‌ی R_0 با کراندارگی مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار به علاوه کراندارگی مجموعه‌های تراز^۱ برنامه‌ریزی درجه دوم را نشان می‌دهد.

قضیه ۴-۵: برای مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$

یادآوری می‌کنیم که وارونگاشت مجموعه-مقدار $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ به صورت $M^{-1}(y) := \{x: y \in M(x)\}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۵-۱: برای $SVNCP(F, \Omega)$ داریم:

$$SOL(F, \Omega) = \bigcup_{w \in \mathbb{R}^m} [SOL(F_w) \cap \Omega^{-1}(w)].$$

برهان. در واقع، نتیجه‌ی مورد نظر از

$$\begin{aligned} SOL(F, \Omega) &= \{x: \exists w \in \mathbb{R}^m, x \in \\ &SOL(F_w), w \in \Omega(x)\} = \{x: \exists w \in \mathbb{R}^m, x \in \\ &SOL(F_w), x \in \Omega^{-1}(w)\} \\ &= \bigcup_{w \in \mathbb{R}^m} [SOL(F_w) \cap \Omega^{-1}(w)]. \end{aligned}$$

به‌دست می‌آید، که تساوی دوم از تعریف نگاشت وارون حاصل می‌شود. ■

حالت خاصی که نگاشت مجموعه-مقدار Ω فرم ضمنی دارد، را در نظر می‌گیریم، برای مثال،

$$\Omega(x) = \{w: H(x, w) = 0, G(x, w) \geq 0\},$$

که در آن $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{l_1}$ و همچنین $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{l_2}$ در این حالت مشخصه‌ی زیر برای مجموعه‌ی جواب به‌دست می‌آید.

قضیه ۵-۲: اگر

$$\Omega(x) = \{w: H(x, w) = 0, G(x, w) \geq 0\},$$

آن‌گاه

$$SOL(F, \Omega) = \bigcup_{w \in \mathbb{R}^m} \{x: (x, 0, \alpha)^T \in SOL(\Theta_w), \alpha \in \mathbb{R}^{l_2}_{++}, 0 \in \mathbb{R}^{l_1}\},$$

که به صورت $\Theta_w: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+l_1+l_2}$

$$\Theta_w(x) := (F(x, w), G(x, w), H(x, w))^T$$

تعریف می‌شود.

برهان. با توجه به اینکه مسئله‌ی (2.1) عبارت است از یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ و $w \in \mathbb{R}^m$ به‌طوری‌که

داریم:

$$\begin{aligned} x^T(M(w)y + q(w)) &= \\ y^T(M(w)x + q(w)) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

برهان. بنابر یکنوایی $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ و با توجه به اینکه $x, y \in \text{SOL}(M, q, \Omega)$ به‌ازای $w \in \Omega(x) \cap \Omega(y)$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - y)^T M(w)(x - y) \\ &= x^T(M(w)x + q(w)) \\ &\quad - x^T(M(w)y + q(w)) \\ &\quad + y^T(M(w)x + q(w)) \\ &\quad + y^T(M(w)y + q(w)) \\ &= -x^T(M(w)y + q(w)) - y^T(M(w)x + q(w)) \leq 0. \end{aligned}$$

چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است در نتیجه باید (1.5) برقرار باشد. ■

قضیه‌ی ۵-۶ نشان می‌دهد که $\text{SOL}(M, q, \Omega)$ با مجموعه‌ی ماتریس‌های یکنوا، محدب است. به علاوه، اگر مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ یکنوا باشد، آن‌گاه (1.5) به‌ازای هر دو جواب x و y از $\text{SVLCP}(M, q, \Omega)$ برقرار است. در حقیقت، شرط (1.5) تحدب مجموعه‌ی جواب یک $\text{SVLCP}(M, q, \Omega)$ دلخواه را مشخص می‌کند.

قضیه ۵-۷: فرض کنید $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. به‌ازای مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ موارد زیر معادل هستند:

(الف) مجموعه‌ی $\text{SOL}(M, q, \Omega)$ محدب است.
 (ب) به‌ازای هر $x, y \in \text{SOL}(M, q, \Omega)$ که $\Omega(x) \cap \Omega(y) \neq \emptyset$ رابطه‌ی (1.5) برقرار است.

برهان. (الف) \Leftarrow (ب). فرض کنید x و y جواب‌هایی از $\text{SVLCP}(M, q, \Omega)$ باشند به طوری که $\Omega(x) \cap \Omega(y) \neq \emptyset$ بنابر فرض محدب بودن مجموعه‌ی جواب، به‌ازای هر $0 < \lambda < 1$ بردار $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ همچنین جواب $\text{SVLCP}(M, q, \Omega)$ است. بنابراین به‌ازای

(الف) مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ R_0 -ماتریس است.

(ب) به‌ازای هر $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ از پایین کراندار و هر $s, t \in \mathbb{R}$ با $s > 0$ مجموعه‌ی تراز $L(s, t) = \{z \geq 0 : \exists w \in \Omega(x), M(w)z + q(w) \geq 0, sz^T M(w)z + z^T q(w) \leq t\}$

کراندار است.

(ج) به‌ازای هر $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ از پایین کراندار، مجموعه‌ی $\text{SOL}(M, q, \Omega)$ کراندار است.

برهان. (الف) \Leftarrow (ب). فرض کنید مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ R_0 -ماتریس باشد اما مجموعه‌ی $L(s, t)$ برای بعضی $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، $s > 0$ بی‌کران باشد. فرض کنید $\{z^k\}$ دنباله‌ای بی‌کران از بردارها در $L(s, t)$ باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر نقطه‌ی حدی دنباله‌ی $\frac{z^k}{\|z^k\|}$ (که کراندار است) جواب ناصفری از $\text{SVLCP}(M, 0, \Omega)$ است.

(ب) \Leftarrow (ج). کفایت توجه کنید که $\text{SOL}(M, q, \Omega)$ برابر با مجموعه‌ی تراز $L(1, 0)$ است. (ج) \Leftarrow (الف). اگر z جواب ناصفری از $\text{SVLCP}(M, 0, \Omega)$ باشد، آن‌گاه هر مضرب ناصفری از z نیز جوابی از آن می‌باشد. ■

تعریف ۵-۵: مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ را یکنوا گویند، هرگاه به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $\forall w \in \Omega(x)$ $x^T M(w)x \geq 0$. قضیه‌ی زیر ویژگی مجموعه‌ی جواب $\text{SVLCP}(M, q, \Omega)$ با مجموعه‌ی ماتریس‌های یکنوا را بیان می‌کند.

قضیه ۶-۵: فرض کنید $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ و مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ یکنوا باشد. اگر x و y دو جواب $\text{SVLCP}(M, q, \Omega)$ باشند به طوری که $\Omega(x) \cap \Omega(y) \neq \emptyset$ آن‌گاه به‌ازای $w \in \Omega(x) \cap \Omega(y)$

در عمل حدود ۱۰ تا ۲۵)، و احتمال مربوط به هر بازه در توزیع آغازین، فراوانی نسبی در طی آن بازه در نظر گرفته می‌شود.

فرض کنید I_1, \dots, I_n بازه‌های تقاضا و $p = (p_1, \dots, p_n)$ بردار احتمال‌های مربوط به آن‌ها در توزیع کنونی باشد. برای هر $i = 1, \dots, n$ فرض کنید r_i فراوانی نسبی در I_i روی k دوره‌ی اخیر در زمان به‌روزرسانی باشد (اگر دوره یک روز است، برای مثال k می‌تواند حدود ۵۰ باشد). فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_n)$ نشان‌دهنده‌ی بردار احتمال به‌روز شده باشد. $r = (r_1, \dots, r_n)$ یک تقریب x است، اما براساس تنها k مشاهده می‌باشد. می‌توانید یک تقریب x را \bar{y} در نظر بگیرید که جواب بهینه‌ی مسئله‌ی درجه دوم زیر است:

$$\begin{aligned} \min & \beta \sum_{i=1}^n (p_i - y_i)^2 + (1 - \beta) \sum_{i=1}^n (r_i - y_i)^2 \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^n y_i = 1, y_i \geq 0, \\ & \forall 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

که β یک وزن است. معمولاً $0 < \beta < 1$ عملکرد خوبی دارد. دلیل اینکه وزن برای عبارت دوم در تابع هدف طوری انتخاب می‌شود که تابع هدف کوچک شود، این است که بردار فراوانی نسبی r براساس تعداد کمی از مشاهدات به‌دست آمده است. چون تابع هدف درجه دوم در این مدل، مجموع وزن‌دار مربع خطاهای پیش‌بینی شده روی همه‌ی بازه‌های تقاضا است، ردیابی تغییرات رشد در توزیع تقاضا تأثیرگذار است، زمانی که در هر دوره سفارش استفاده شود. روش‌های سفارش بهینه بر پایه‌ی توزیع‌های تقاضای گسسته در [۱۴] بحث شده است.

جواب بهینه‌ی برنامه‌ی درجه دوم بالا $\bar{y} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-1}, \bar{w}_n)$ است که $\bar{w} = (\bar{w}_j)$ و $\bar{z} = (\bar{z}_j)$ جواب مسئله‌ی مکمل خطی با داده‌های

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

و

$w \in \Omega(x) \cap \Omega(y)$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= z^T (M(w)z + q(w)) \\ &= (\lambda x + (1 - \lambda)y)^T (M(w)\lambda x + \\ & \quad (1 - \lambda)y + q(w)) \\ &= (\lambda x + (1 - \lambda)y)^T (\lambda (M(w)x + q(w)) + \\ & \quad ((1 - \lambda)(M(w)y + q(w))) \\ &= \lambda(1 - \lambda) (x^T (M(w)y + q(w)) + \\ & \quad y^T (M(w)x + q(w))) \end{aligned}$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است. بنابراین باید (1.5) برقرار باشد.

(ب) \Leftarrow (الف). به آسانی با معکوس بحث قسمت نخست، نتیجه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آید. ■

۶- کاربرد

۶-۱- مدل برنامه‌ریزی درجه دوم محدب

چون شرایط بهینه‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم محدب تشکیل مسئله‌ی مکمل خطی می‌دهد، هر کاربرد شامل برنامه‌ریزی درجه دوم محدب یک کاربرد برای مسئله‌ی مکمل خطی ارائه می‌دهد. در اینجا، یک کاربرد توصیف شده توسط مورتی [۱۴]، در مدیریت زنجیره‌ای موجودی بیان می‌شود.

یک موضوع مهم در مدیریت زنجیره‌ای موجودی، پیش‌بینی تقاضا برای هر آیتم و تعیین زمان برای قرار دادن سفارشات و مقدار سفارشات می‌باشد. توزیع تقاضا به‌طور معمول توزیع نرمال فرض می‌شود. این فرض، مزیت‌های نظری زیادی دارد. مهم‌ترین مزیت این است که توزیع نرمال به‌وسیله‌ی تنها دو پارامتر، میانگین^۱ و انحراف استاندارد^۲ کاملاً مشخص می‌شود. بنابراین، زمانی که توزیع تغییر می‌کند، فقط نیاز است مقادیر این دو پارامتر در مدل‌ها تغییر یابد.

یک استراتژی این است که توزیع تقاضا را با استفاده از نمودار هیستوگرام داده‌های قبلی تقریب می‌زنند. در این تقریب که توزیع تقاضای گسسته نامیده می‌شود، دامنه‌ی تغییرات تقاضا، به تعدادی بازه‌های تقاضا تقسیم می‌شود

1. Mean
2. Standard deviation

(۵) در طی مسیر بیرونی و y_i نشانگر مقدار حمل شده در طی مسیر درونی باشد. مجموعه‌ی جریان‌های $x = (x_i)$ و $y = (y_i)$ شدنی است اگر در شرایط $x, y \geq 0, x + y \geq d$ صدق کنند که $d = (d_i)$.

بردارهای جریان x و y می‌توانند ترافیک روی هر راه شبکه را تعیین کنند. برای مثال، راه بیرونی بین شهرهای ۳ و ۴ جریانی برابر $x_1 + x_2 + x_3$ خواهد داشت. تاخیر در راه k توسط ترافیک کلی روی راه تعیین می‌شود و تابعی محدب از جریان ترافیک فرض می‌شود. تاخیر برای یک مسیر داده شده، برابر مجموع تاخیرهای همه‌ی راه‌های تشکیل دهنده‌ی آن مسیر می‌باشد. از این مطلب، نتیجه می‌شود که برای هر شهر i تاخیر O_i در طی مسیر بیرونی توسط بردار جریان x و تاخیر I_i در طی مسیر درونی توسط بردار جریان y تعیین می‌شود. بنابراین می‌توان دو تابع $O(x) = (O_i(x))$ و $I(y) = (I_i(y))$ را تعریف کرد.

تاخیر موثر بین دو شهر، برابر با ماکسیمم تاخیر میان مسیرها با جریان ناصفر بین دو شهر تعریف می‌شود. هر شهر یک استراتژی حمل در جهت مینیمم کردن تاخیر موثر به شرط اینکه استراتژی‌های حمل از دیگر شهرها ثابت باقی بماند، انتخاب می‌کند. این استراتژی، مینیمم زمانی است که هر چیزی در طی مسیری با کمترین تاخیر حمل شود، یا زمانی که هر دو مسیرهای درونی و بیرونی تاخیر یکسانی داشته باشند. برای دیدن این مطلب، توجه کنید که اگر تاخیر برای مسیر درونی کمتر از تاخیر برای مسیر بیرونی باشد، حمل کننده می‌تواند تاخیر موثر را با حمل بیشتر در طی مسیر درونی، بهبود ببخشد. این کار ترافیک در مسیر بیرونی را کاهش می‌دهد، که تاخیر در مسیر بیرونی کاهش و بنابراین کاهش ترافیک موثر نتیجه می‌شود.

یک الگوی تعادل ترافیک زمانی که هر پنج شهر به طور بهینه در حال حمل کردن باشند به طوری که استراتژی‌های حمل از دیگر شهرهای باقیمانده ثابت باشد، پدیدار می‌شود. از بحث بالا، این مطلب با شرایط مکمل زیر معادل است:

$$\begin{aligned} 0 \leq O(x) - u, x \geq 0, x^T(O(x) - u) &= 0, \\ 0 \leq I(y) - u, y \geq 0, y^T(I(y) - u) &= 0, \end{aligned}$$

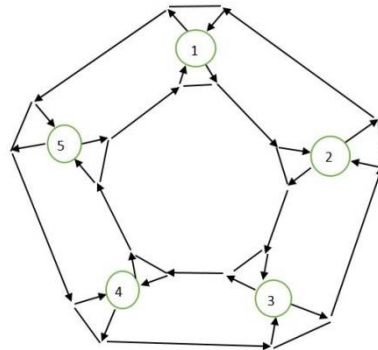
$$q = \begin{pmatrix} -1 - \beta(p_1 - p_n) - (1 - \beta)(r_1 - r_n) \\ -1 - \beta(p_2 - p_n) - (1 - \beta)(r_2 - r_n) \\ \vdots \\ -1 - \beta(p_{n-1} - p_n) - (1 - \beta)(r_{n-1} - r_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

می‌باشد. این مسئله، از مرتبه کوچک است، و می‌تواند خیلی راحت با استفاده از الگوریتم لولایی مکمل^۱ حل شود. در مدیریت زنجیره‌های موجودی، چنین مدلی برای هر آیتم در هر دوره‌ی سفارش حل می‌شود.

۲،۶- تعادل ترافیک

مثال تعادل ترافیک زیر از [۶] ارتباط بین تعادل و مکمل را نشان می‌دهد.

مسئله شامل پنج شهر، شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۵ می‌باشد، که به وسیله شبکه‌ای از راه‌های یک‌طرفه به هم متصل شده‌اند (شکل را ببینید).



هر شهر i باید مقدار d_i از یک محصول را به سومین شهر در جهت عقربه‌های ساعت از خودش حمل کند. برای مثال، شهر ۱ به شهر ۴، شهر ۲ به شهر ۵، و الی آخر. به طور طبیعی، هدف این است که محصول در کوتاه‌ترین زمان ممکن حمل شود.

از شکل، واضح است که برای هر شهر، تنها دو کوتاهترین مسیر ممکن وجود دارد: حمل در جهت خلاف عقربه‌های ساعت در طول حلقه بیرونی یا حمل در جهت عقربه‌های ساعت در طول حلقه درونی. فرض کنید x_i نشانگر مقدار حمل شده از شهر i به شهر $i+3$ (به پیمانه

که متغیر $u \in \mathbb{R}^5$ نشانگر تاخیر موثر می‌باشد. توجه کنید که u مکمل با قید تقاضاست. به‌خصوص، اگر تاخیر موثر صفر باشد، تنها می‌تواند عرضه‌ی اضافی وجود داشته باشد.

شرایط توصیف شده در بالا منجر به مسئله‌ی مکمل غیرخطی با $z := (x, y, u)$ و

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} O(x) - u \\ I(y) - u \\ x + y - d \end{pmatrix}$$

می‌شود.

فهرست منابع

- [11] G. Isac, *Topological Methods in Complementarity Theory, Nonconvex Optimization and Its Applications*, Springer, 2000.
- [12] O. L. Mangasarian and J. S. Pang, The extended linear complementarity problem, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Application* **16**(1995), 359–368.
- [13] K. G. Murty, *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*, Sigma Series in Applied Mathematics, Heldermann Verlag, Berlin, 1988.
- [14] K. G. Murty, Supply chain management in the computer industry, Manuscript, Department of IOE, University of Michigan, Ann Arbor, (1998).
- [15] J. S. Pang, The implicit complementarity problem, in *Nonlinear Programming*, O. L. Mangasarian, R. R. Meyer, and S. M. Robinson, Eds., Academic Press, New York, (1981), 487–518.
- [16] J. S. Pang and M. Fukushima, *Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multileader-follower games*, *Computational Management Science*. **2**(2005), 21–56.
- [17] E. Polak, *Optimization: Algorithms and Consistent Approximation*, Springer, New York, NY, USA, 1997.
- [18] J. Zhou, J. S. Chen and G. M. Lee, *On set-valued complementarity problems*, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2013, Article ID 105930, 11 pages, 2013.
- [1] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [2] D. Aussel, N. Hadjisavvas, *On quasi-monotone variational inequalities*, *Journal of Optimization Theory and Applications*. **121**(2004), 445–450.
- [3] H. H. Bauschke, and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, (2011).
- [4] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, *Math. Student* **63**(1994), 123–145.
- [5] R. W. Cottle, J. S. Pang and R. E. Stone, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, New York, 1992.
- [6] S. P. Dirkse, M. C. Ferris, *MCPLIB : a collection of nonlinear mixed complementarity problems*, *Optimization Methods & Software* **5**(1995), 319–345.
- [7] B. C. Eaves, *The linear complementarity problem*, *Management Science*. **17**(1971), 612–634.
- [8] F. Facchinei and J. S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Volume I and II, Springer, New York, 2003.
- [9] M. Fiedler and V. Ptak, Some generalizations of positive definiteness and monotonicity, *Numerical Mathematics* **9**(1966), 163–172.
- [10] M.S.Gowda, On the extended linear complementarity problem, *Mathematical Programming* **72**(1996), 33–50.