دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

عدد تارسکی و دستگاه‌های معادلات پیکربندی

اکرم یوسف‌زاده*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مبارکه، اصفهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۱/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۱۵

چکیده

مفهوم پیکربندی گروه‌ها که بر پایه‌ی افرازهای متناهی و رشته‌های متناهی از اعضای G تعریف می‌شود، توسط رزنبلات و ویلیس بیان شده است. به هر مجموعه از پیکربندی‌های یک گروه دستگاهی متناهی از معادلات خطی موسوم به دستگاه پیکربندی نظیر می‌شود. رزنبلات و ویلیس نشان دادند که گروه گسسته‌ی G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر هر دستگاه ممکن از پیکربندی‌های G جواب نرمال داشته باشد. در این مقاله به بررسی مقایسه‌ای وجود جواب‌های نرمال چنین دستگاه‌هایی می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که اگر یک دستگاه پیکربندی جواب نداشته باشد، دستگاهی که از تظریف افراز اولیه به دست می‌آید، نیز دارای جواب نخواهد بود. تجزیه‌ی متناقض نیز که برای گروه‌های میانگین‌ناپذیر قابل بیان است بر اساس افرازها و اعضای G، تعریف می‌شود. این مفهوم دارای ارتباط نزدیکی با پیکربندی است. عدد تارسکی یک گروه میانگین ناپذیر کوچک‌ترین تعداد ممکن از پاره‌های تجزیه‌های متناقض آن گروه است. در مقاله‌ی حاضر همچنین ارتباط بین اعداد تارسکی زیرگروه‌های دو گروه با پیکربندی‌های یکسان را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: میانگین‌پذیری، تجزیه‌ی متناقض، جواب نرمال یک دستگاه، دستگاه بهنجار معادلات.

*عهده‌دار مکاتبات: Email: ayousofzade@yahoo.com

۱- مقدمه

فرض کنید G یک گروه گسسته باشد. بنا بر تعریف، G میانگین‌پذیر است اگر مجهز به یک اندازه‌ی احتمال G-پایا باشد؛ به عبارت دیگر تابع مجموعه‌ای

$$\mu: P(G) \to [0, \infty)$$

چنان وجود داشته باشد که $\mu(G) = 1$ و برای هر دو زیرمجموعه‌ی مجزای A و B از G داشته‌باشیم

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

و علاوه بر آن برای هر $g \in G$ و هر $A \subseteq G$، $\mu(gA) = \mu(A)$. این مفهوم با مفهوم تجزیه‌ی متناقض که در زیر می‌آوریم در تقابل است.

تعریف ۱،۱. افراز $\{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m\}$ از گروه G به همراه عناصر $g_1, g_2, \dots, g_n, h_1, h_2, \dots, h_m$ از این گروه را یک تجزیه‌ی متناقض برای G گوییم اگر رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$G = \coprod_{i=1}^{n} g_i A_i = \coprod_{j=1}^{m} h_j B_j,$$

نماد $\coprod$ در اینجا نشان‌دهنده‌ی اجتماع مجزای زیرمجموعه‌های G است. G را متناقض گوییم اگر دست‌کم یک تجزیه‌ی متناقض داشته‌باشد. برای مطالعه بیشتر در زمینه‌ی گروه‌های متناقض به [۱] و [۲] مراجعه کنید. قضیه‌ی زیر که به تناوب تارسکی معروف است، ناسازگاری میانگین‌پذیری و متناقض بودن G را بیان می‌کند.

قضیه ۲،۱. برای گروه G یک و تنها یکی از شرایط زیر برقرار است

۱- G میانگین‌پذیر است،

۲- G متناقض است.

برای اثباتی از این مطلب قضیه ۷ از [۳] را ببینید.

در تعریف ۱،۱ عدد $m + n$ را عدد تارسکی تجزیه‌ی متناقض مربوطه می‌گوییم. کوچکترین عدد تارسکی ممکن برای تجزیه‌های متناقض گروه G را عدد تارسکی این گروه نامیده با $\tau(G)$ نشان می‌دهیم. در حالتی که G میانگین‌پذیر باشد، می‌نویسیم $\tau(G) = \infty$. به آسانی دیده می‌شود که همواره $\tau(G) \geq 4$. از طرفی گروه G دارای عدد تارسکی ۴ است اگر و تنها اگر یک کپی از گروه $\mathbb{F}_2$ یعنی گروه غیرآبلی آزاد با ۲ مولد را در بر داشته باشد [۱۲]. تا سال ۲۰۱۵ این‌ها تنها گروه‌هایی بودند که عدد تارسکی‌شان به دقت مشخص شده بود؛ تا این که در [۴] نویسندگان برای اولین بار گروه‌هایی با اعداد تارسکی ۵ و ۶ معرفی کردند.

اگر G یک گروه گسسته، $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ یک افراز متناهی و $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ رشته‌ای از عناصر G باشد، $(n+1)$-تایی $C = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ از اعداد $m, \dots ,2,1$ یک پیکربندی متناظر با زوج $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ است هرگاه عضو $x_0 \in G$ چنان وجود داشته باشد که برای هر عدد $j \in \{1, \dots, n\}$ داشته باشیم $g_j x_0 \in E_{c_j}$.

فرض کنید که $C = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ یک پیکربندی باشد. مجموعه‌های زیر نقش مهمی در تعاریف و قضایای بعدی بر عهده دارند

$$x_0(C) = E_{c_0} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} g_j^{-1} E_{c_j}\right)$$
$$x_j(C) = g_j\, x_0(C).$$

مجموعه‌ی تمام پیکربندی‌های متناظر با $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ را با $Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ نشان می‌دهیم و در ادامه، منظورمان از $Con(G)$ خانواده‌ی همه‌ی $Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ها می‌باشد. دیده می‌شود که برای هر $j \in \{0,1, \dots, n\}$ خانواده‌ی

$$\{x_j(C),\ C \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})\}$$

افرازی برای G تشکیل می‌دهد [۵].

متناظر با زوج $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ دستگاهی متناهی از معادلات خطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sum_{\substack{C \in Con(\mathcal{G},\mathcal{E}) \\ x_j(C) \subseteq E_i}} z_C = \sum_{\substack{C \in Con(\mathcal{G},\mathcal{E}) \\ x_0(C) \subseteq E_i}} z_C,$$

که در آن $(1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m)$. هر z_C متغیری نظیر به یک پیکربندی $C \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ است. این دستگاه را که با $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ نشان داده

می‌شود، دستگاه پیکربندی متناظر با $(\mathcal{G},\mathcal{E})$ می‌گوییم. یک جواب $(z_C)_C$ از این دستگاه، نرمال نام دارد اگر برای هر C، $z_C \geq 0$ و علاوه بر آن $\sum z_C = 1$. واضح است که $Eq(\mathcal{G},\mathcal{E})$ جواب نرمال دارد اگر و تنها اگر جوابی از اعداد نامنفی داشته باشد که همزمان صفر نیستند.

تعریف پیکربندی گروه‌ها را اولین بار رزنبلات و ویلیس در سال ۲۰۰۱ ارائه کردند [۵]. از مهم‌ترین نتایج آن مقاله قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۳،۱. گروه G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر همه‌ی دستگاه‌های پیکربندی G جواب نرمال داشته باشند.

با توجه به قضیه‌ی بالا این پرسش مطرح است که ارتباط بین تجزیه‌ی متناقض یک گروه میانگین‌ناپذیر و پیکربندی‌های آن چگونه مشخص می‌شود. این پرسش در مراجع [۶–۸]به تفصیل بررسی شده است. در [۷] با یک شرط اضافه، روشی ساختاری برای محاسبه‌ی کران بالای عدد تارسکی یک گروه آمده است.

روشی که در آن مقاله به کارگرفته شده است، به شدت به انتخاب دستگاهی بستگی دارد که دارای جواب نرمال نیست. در بخش اول مقاله‌ی حاضر ارتباط بین وجود جواب دستگاه‌های پیکربندی یک گروه را با توجه به افرازهای مختلف و رشته‌های مختلف از اعضای آن گروه بررسی می‌کنیم.

اگر در تعریف پیکربندی، $\mathcal{G}$ را مولد بگیریم و فرض کنیم دو گروه G_1 و G_2 به گونه‌ای باشند که داشته‌باشیم $Con(G_1) = Con(G_2)$، این دو گروه را هم‌پیکر می‌گوییم. هم‌پیکر بودن دو گروه باعث می‌شود که بسیاری از ویژگی‌های نظریه گروهی هر یک به دیگری منتقل شود. به عنوان مثال مطالعه‌ی [۹–۱۱] را پیشنهاد می‌کنیم.

در [۸] ثابت شده است که دو گروه هم‌پیکر به ناچار اعداد تارسکی برابر دارند. در بخش دوم این مقاله نتیجه‌ای تازه برای اعداد تارسکی زیرگروه‌های گروه‌های هم‌پیکر به دست می‌آوریم.

نوع دیگری از پیکربندی موسوم به پیکربندی دوطرفه در [۱۲] معرفی شده‌است. این تعریف کار با پیکربندی را بسیار ساده‌تر می‌کند. در واقع در گروه‌هایی که دارای پیکربندی‌های دوطرفه یکسان هستند، ضرب عناصری خاص از یک گروه از چپ و راست در سایر عناصر آن گروه با عناصر نظیر آن در گروه دیگر مشابه است و بدین ترتیب دو گروه رفتار یکسانی را از بسیاری از جنبه‌ها از خود نشان می‌دهند. اخیرا مقالات دیگری در این رابطه نوشته شده است که می‌توان از آن جمله به [۱۳] اشاره کرد. مطالعات دیگری نیز در سال‌های اخیر در زمینه پیکربندی گروه‌ها صورت گرفته‌است که از بین آن‌ها به [۱۵–۱۴] اشاره می‌کنیم.

۲. دستگاه‌های پیکربندی

فرض کنید π یک جایگشت از اعداد $\{1,2,\dots,t\}$ باشد و P_π را ماتریس حاصل از تاثیر π بر ماتریس همانی از بعد t بگیرید؛ در واقع P_π به گونه‌ای است که برای هر ماتریس M، $P_\pi M$ از اِعمال π بر سطرهای M به دست می‌آید. همچنین $T=(t_{ij})$ را ماتریسی مربعی از بعد t بگیرید که

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & i \geq j \text{ اگر} \\ 0, & i < j \text{ اگر} \end{cases}$$

گیریم $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_t \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_t \end{pmatrix}$ دوماتریس با درایه‌های ۰ و ۱ باشند به طوری که بردار $\sum_{i=1}^{t}(B_i - A_i)$ فقط شامل درایه‌های مثبت است. در این صورت دستگاه $(A-B)X=0$ را بهنجار می‌گوییم اگر جایگشتی مانند π وجود داشته باشد به گونه‌ای که هر یک از درایه‌های ماتریس $TP_\pi(\mathrm{B}-\mathrm{A}) - \mathrm{P}_{(1\,2\dots t)\pi}\mathrm{A}$ کمتر از -1 نباشد.

شرط بالا که در [۷] آمده و شرطی پیچیده به نظر می‌رسد، در عمل برای بیشتر دستگاه‌های واجد شرایط و فاقد جواب نامنفی ناصفربرقرار است. گرچه مثال‌هایی وجود دارد که آن را در حالت کلی رد می‌کند، این پرسش مطرح است که اگر دستگاه$Eq(\mathcal{G},\mathcal{E})$ از گروه گسسته‌ی G جواب نرمال نداشته باشد، آیا این دستگاه بهنجار است؟ به این پرسش تا کنون پاسخ داده نشده است اما در

این بخش بر این فرضیم که این شرط برای دستگاه‌های پیکربندی فاقد جواب نرمال برقرار است.
قضیه‌ی زیر بیانی متفاوت از [۴، لم ۴،۱] است ([۳] را هم ببینید).

قضیه ۱،۲. اگر $G = \coprod_{i=1}^{n} g_i A_i = \coprod_{j=1}^{m} h_j B_j$ معرف یک تجزیه‌ی متناقض از گروه G باشد، آنگاه گروه تولید شده توسط $\{g_1, g_2, \ldots, g_n, h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ میانگین‌ناپذیر است.
فرض کنید $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ رشته‌ای از عناصر G باشد. در زیر گروه تولید شده توسط $\mathcal{G}$ را با $< \mathcal{G} >$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲،۲. اگر دستگاه $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ دارای جواب نرمال نباشد، آن‌گاه G دارای یک تجزیه‌ی متناقض است که ضرایب آن از گروه $< \mathcal{G} >$ می‌آیند.
اثبات: اثبات قضیه‌ی [۷، قضیه ۳،۱] را ببینید.
به این ترتیب نتیجه‌ی زیر بی درنگ از دو قضیه‌ی بالا به دست می‌آید.
نتیجه ۳،۲. اگر $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ جواب نرمال نداشته باشد، گروه $< \mathcal{G} >$ گروهی میانگین‌ناپذیر است.
این نتیجه به ویژه بیان می‌کند که برای به دست آوردن تجزیه‌ی متناقض یک گروه با روشی که در [۷] آمده لازم است به دنبال دستگاه‌هایی مثل $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ باشیم که $< \mathcal{G} >$ میانگین‌پذیر نیست.

تعریف ۴،۲. فرض کنید $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$ افرازی از گروه G باشد. افراز جدیدی از گروه G مانند $\mathcal{E}' = \{E'_1, E'_2, \ldots, E'_t\}$ را یک تظریف برای $\mathcal{E}$ می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی $1 \le p \le t$ عدد $1 \le q \le m$ چنان وجود داشته باشد که $E'_p \subseteq E_q$.
برای اثبات قضایای بعد نیاز به دو نماد داریم که این دو نماد را در قالب دو تعریف به ترتیب زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۵،۲. فرض کنید $\mathcal{E}'$ یک تظریف برای افراز $\mathcal{E}$ از گروه G باشد

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E}')$$

و

$$D = (d_0, d_1, \ldots, d_n) \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})$$

دو پیکربندی به گونه‌ای باشند که برای هر j، $E'_{c_j} \subseteq E_{d_j}$. در این صورت می‌نویسیم $C \ll D$.

تعریف ۶،۲. فرض کنید G یک گروه باشد، $g_1, \ldots, g_s \in G$ و همچنین $n \le s$

$$\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

و

$$\mathcal{G}' = (g_1, g_2, \ldots, g_s).$$

در این صورت $\mathcal{G}$ را تحدیدی از $\mathcal{G}'$ می‌گوییم.
گیریم پیکربندی $C = (\mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n) \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ و پیکربندی $\mathrm{D} = (\mathrm{d}_0, \mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_\mathrm{n}, \ldots, \mathrm{d}_\mathrm{s}) \in Con(\mathcal{G}', \mathcal{E})$ چنان باشند که برای هر n ≥ j ≥ 0، $\mathrm{c}_\mathrm{j} = d_j$. در این صورت می‌نویسیم $C \preccurlyeq D$.
در زیر ارتباط بین وجود جواب دستگاه $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ را با دستگاه‌هایی پیدا می‌کنیم که از تظریف $\mathcal{E}$ یا تحدید $\mathcal{G}$ به دست می‌آیند. ابتدا حکمی را در رابطه با دستگاه‌های حاصل از تظریف افراز یک زوج پیکربندی می‌آوریم.

قضیه ۷،۲. اگر $\mathcal{E}'$ تظریفی از افراز $\mathcal{E}$ باشد همچنین $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ رشته‌ای از اعضای G بوده و $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E}')$ دارای جواب نرمال باشد، آن‌گاه $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ نیز دارای جواب نرمال خواهد بود.
اثبات: فرض کنید

$$C = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E}')$$

و

$$D = (d_0, d_1, \ldots, d_n) \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})$$

دو پیکربندی به گونه‌ای باشند که $C \ll D$. بنابر تعریف پیکربندی می‌بینیم که برای هر $C \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E}')$، پیکربندی $D \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ به گونه‌ای وجود دارد که $\mathrm{x}_0(\mathrm{C}) \subseteq \mathrm{x}_0(\mathrm{D})$ ؛ لذا

$$Con(\mathcal{G}, \mathcal{E}') = \coprod_{D \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E})} \{C \in Con(\mathcal{G}, \mathcal{E}'),\ \ C \ll D\}.$$

حال فرض کنید (z_c) جوابی نرمال برای دستگاه $Eq(\mathcal{G},\mathcal{E}')$ باشد و برای پیکربندی $D \in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})$ قرار دهید $z_D = \sum_{C \ll D} z_c$. خواهیم دید $z_D \geq 0$ و

$$\sum_{D\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})} z_D = \sum_{D\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})} \sum_{C\ll D} z_c = \sum_{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E}')} z_c = 1.$$

به علاوه با توجه به تعریف دستگاه پیکربندی

$$\sum_{\substack{D\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_0(D)\subseteq E_i}} z_D = \sum_{\substack{D\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_0(D)\subseteq E_i}} \sum_{C\ll D} z_c = \sum_{\substack{E'_p\subseteq E_i\\ E'_p\in\mathcal{E}'}} \sum_{\substack{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E}')\\ x_0(C)\subseteq E'_p}} z_c = \sum_{\substack{E'_p\subseteq E_i\\ E'_p\in\mathcal{E}'}} \sum_{\substack{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E}')\\ x_j(C)\subseteq E'_p}} z_c = \sum_{\substack{D\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_j(D)\subseteq E_i}} \sum_{C\ll D} z_c = \sum_{\substack{D\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_j(D)\subseteq E_i}} z_D.$$

بنابراین (z_D) یک جواب نرمال برای $Eq(\mathcal{G},\mathcal{E})$ است. در ادامه به مقایسه‌ی وجود جواب دستگاه‌های با افرازهای یکسان و رشته‌های متفاوت می‌پردازیم. فرض کنید $n \le s$،

$$\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

و

$$\mathcal{G}' = (g_1, g_2, \dots, g_s)\ .$$

می‌خواهیم بدانیم که برای یک افراز دلخواه $\mathcal{E}$ از G، چه ارتباطی بین جواب‌های دو دستگاه $Eq(\mathcal{G},\mathcal{E})$ و $Eq(\mathcal{G}',\mathcal{E})$ وجود دارد.
اگر $\mathcal{G}$ تحدیدی از $\mathcal{G}'$ باشد و $Eq(\mathcal{G}',\mathcal{E})$ جواب نرمالی نداشته باشد، بنابر نتیجه ۳،۲، $< \mathcal{G}' >$ میانگین‌ناپذیر است. حال اگر $< \mathcal{G} >$ را میانگین‌پذیر بگیریم، $Eq(\mathcal{G},\mathcal{E})$ به یقین جواب نرمال خواهد داشت. قضیه زیر صورتی از عکس این مطلب را بیان می‌کند.

قضیه ۸،۲. فرض کنید $n, s \in \mathbb{N}$، $n \le s$، $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$، $\mathcal{G}' = (g_1, g_2, \dots, g_s)$ و $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$ یک افراز دلخواه از G باشد. در این صورت اگر $Eq(\mathcal{G}',\mathcal{E})$ جواب نرمال داشته باشد، آن‌گاه $Eq(\mathcal{G},\mathcal{E})$ نیز جواب نرمال خواهد داشت.
اثبات: فرض کنید C و D به گونه‌ای باشند که $C \preccurlyeq D$. می‌دانیم که برای هر $1 \le i \le m$ و هر $0 \le j \le n$،

$$E_i = \coprod_{\substack{D\in Con(\mathcal{G}',\mathcal{E})\\ x_j(D)\subseteq E_i}} x_0(D) = \coprod_{\substack{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_j(C)\subseteq E_i}} x_0(C).$$

حال اگر $(z_D)_D$ جوابی نرمال برای $Eq(\mathcal{G}',\mathcal{E})$ فرض شود و قرار دهیم $z_C = \sum_{C\preccurlyeq D} z_D$، آن‌گاه $(z_C)_C$ یک جواب نرمال برای $Eq(\mathcal{G},\mathcal{E})$ خواهد بود؛ زیرا

$$\sum_{\substack{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_0(C)\subseteq E_i}} z_C = \sum_{\substack{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_0(C)\subseteq E_i}} \sum_{C\preccurlyeq D} z_D = \sum_{\substack{D\in Con(\mathcal{G}',\mathcal{E})\\ x_0(D)\subseteq E_i}} z_D = \sum_{\substack{D\in Con(\mathcal{G}',\mathcal{E})\\ x_j(D)\subseteq E_i}} z_D = \sum_{\substack{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_j(C)\subseteq E_i}} \sum_{C\preccurlyeq D} z_D = \sum_{\substack{C\in Con(\mathcal{G},\mathcal{E})\\ x_j(C)\subseteq E_i}} z_C.$$

اثبات نرمال بودن این جواب ساده است.

تعریف ۹،۲. فرض کنید G یک گروه باشد. می‌گوییم زوج $(\mathcal{G}',\mathcal{E}')$ یک تظریف از زوج $(\mathcal{G},\mathcal{E})$ است اگر یکی از دو حالت زیر را داشته باشیم

۱. $\mathcal{G}$ تحدیدی از $\mathcal{G}'$ باشد و $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

۲. $\mathcal{E}'$ یک تظریف برای $\mathcal{E}$ باشد و $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$.

با استفاده از تعریف بالا دو قضیه ۷،۲ و ۸،۲ را به طور خلاصه می‌توان به شکل زیر نوشت.

قضیه ۲،۱۰. اگر $(\mathcal{G}', \mathcal{E}')$ تظریفی از $(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ بوده و دستگاه معادلات $Eq(\mathcal{G}', \mathcal{E}')$ دارای جواب نرمال باشد، آنگاه $Eq(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ نیز جواب نرمال خواهد داشت.

۳. گروه‌های هم‌پیکر و عدد تارسکی

براساس قضیه ۱،۲، اگر G تجزیه‌ی متناقضی داشته باشد که ضرایب آن مجموعه‌ی $\mathcal{G}$ را تشکیل دهند، آن‌گاه گروه $H =< \mathcal{G} >$ میانگین‌ناپذیر است. با نگاهی به اثبات آن قضیه می‌بینیم که $\tau(H) \leq \tau(G)$. از طرف دیگر بنابر [۱۶، قضیه ۵،۸،۱۳] چون H زیرگروهی از G است، داریم $\tau(G) \leq \tau(H)$. پس نتیجه زیر به دست می‌آید.

گزاره ۱،۳. برای هر گروه میانگین‌ناپذیر G که $\tau(G) = t$، زیرگروه t–مولده‌ی H چنان وجود دارد که $\tau(H) = t$.

در [۸] نشان داده شده است که گروه‌های هم‌پیکر اعداد تارسکی برابر دارند؛ ولی در مورد عدد تارسکی زیر گروه‌های آن‌ها مطلبی ثابت نشده است. در این‌جا ارتباطی بین عدد تارسکی برخی از زیرگروه‌های دو گروه هم‌پیکر را به دست می‌آوریم. ابتدا قضیه‌ی زیر را که نقش کلیدی در اثبات قضیه ۳،۳ دارد می‌آوریم.

قضیه ۲،۳. [۴، قضیه A] فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی نرمال از G و از اندیس متناهی باشد. در این صورت

$$\tau(H) - 2 \leq [G : H](\tau(G) - 2)$$

قضیه ۳،۳. فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه میانگین ناپذیرِهم‌پیکر باشند. اگر H_1 زیرگروهی نرمال از G_1 باشد که دارای اندیس متناهی p است، آن‌گاه G_2 دارای زیرگروهی نرمال چون H_2 است که $\frac{G_2}{H_2} \cong \frac{G_1}{H_1}$ و

$$\frac{1}{\mathrm{p}} \leq \frac{\tau(H_1) - 2}{\tau(H_2) - 2} \leq p.$$

اثبات: وجود H_2 با ویژگی $\frac{G_2}{H_2} \cong \frac{G_1}{H_1}$ حکم [۹، لم ۶،۳] است. برای چنین گروهی بنابر [۴، قضیه A] برای $i = 1,2$، داریم

$$\tau(H_i) - 2 \leq p\big(\tau(G_i) - 2\big).$$

اما بنابر [۸] $\tau(G_1) = \tau(G_2)$. پس با استفاده از [۱۶، قضیه ۵،۸،۱۳] داریم

$$\tau(H_2) - 2 \leq p\big(\tau(G_1) - 2\big) \leq p\big(\tau(H_1) - 2\big)$$

به شیوه‌ای مشابه

$$\tau(H_1) - 2 \leq p\big(\tau(H_2) - 2\big)$$

در نتیجه

$$\frac{1}{\mathrm{p}} \leq \frac{\tau(H_1) - 2}{\tau(H_2) - 2} \leq p.$$

در حالت خاص اگر $p = 2$ و H_1 دارای عدد تارسکی ۵ باشد،

$$4 \leq \tau(H_2) \leq 8.$$

فهرست منابع

[1] A. I. T. Paterson, Amenability, Mathematical servey Surveys and Monographs Vol. 29 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1988).

[2] S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 24 (Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1985).

[3] T. G. Ceccherini-Silberstein, R. I. Grigorchuk and P. de la Harpe, Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and for discrete metric spaces, Proceding of the Steklov Institute of Mathematics, 224 (1999) 57–97.

[4] M. Ershov, G. Golan and M. Sapir, The Tarski numbers of groups, Advances in Mathematics, 284 (2015) 21–53.

[5] J. M. Rosenblatt and G. A. Willis, Weak convergence is not strong for amenable groups, Canadian Mathematical Bulletin, 44 (2) (2001) 231–241.

[6] A. Rejali and A. Yousofzadeh, Configuration of groups and paradoxical decompositions, Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin, 18 (2011) 157–172.

[7] A. Yousofzadeh, A constructive way to compute the Tarski number of a group, Journal of Algebra and its Applications, 17, (1) (2018), 1850139 (28 pages).

[8] A. Yousofzadeh, A. Tavakoli and A. Rejali, On configuration graph and paradoxical decomposition, Journal of Algebra and its Applications, 13, (2) (2014), 1350086, (11pages).

[9] A. Abdollahi, A. Rejali and G. A. Willis, Group properties characterized by configuration, Illinois Journal of Mathematics, 48 (3) (2004) 861–873

[10] A. Abdollahi, A. Rejali and A. Yousofzadeh, Configuration of nilpotent groups and isomorphism, Journal of Algebra and its Applications, 8 (3) (2009) 339–350.

[11] A. Tavakoli, A. Rejali, A. Yousofzadeh and A. Abdollahi, A note about configuration of a group, Matematika, 19 (1) (2001) 3-23.

[12] A. Rejali and A. Yousofzadeh, Group Properties Characterized by Two-sided Configurations, Algebra Colloquium, 17 no. 4 (2010) 583–594.

[13] A. Rejali and M. Soleimani Malekan, Two-sided Configuration equivalence and Isomorphism. arXiv preprint arXiv: 1512. 03021 (2015).

[14] A. Rejali and M. Soleimani Malekan, Solubility of groups can be characterized by configuration, New York J. Math., 23 (2017), 1427-1445.

[15] A. Rejali and M. Soleimani Malekan, Strong Configuration Equivalence and Isomorphism. arXiv preprint arXiv: 1510. 07209 (2015).

[16] M. Sapir, Combinatorial Algebra: Syntax and Semantics (Springer International Publishing, Switzerland, 2014).