

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM
JOURNAL OF
NEW RESEARCH
IN MATHEMATICS

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مخروط‌های مماسی در نقاط مضاعف بخش‌یاب‌های پریم-متعارف خم‌های با گونای ۷

علی بجزروانی

استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۵/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۰۹

چکیده

فرض کنید η کلافی خطی روی خم هموار X با خاصیت $\eta^2 = 0$ باشد به طوری که π_η پوشش مضاعف القا شده توسط کلاف خطی η نگاشتی اتاله باشد. همچنین فرض کنید X_η مدل پریم - تیتای خم X ، متناظر به کلاف خطی $K_X \cdot \eta$ بوده و Q ابرروی Q درجه ۲ و از رتبه ۴ و شامل X_η باشد. در این مقاله، پس از اثبات نرمال تصویری بودن مدل پریم - تیتای خم‌های با اندیس کلبفرد ۲، شرطی لازم برای مخروط مماسی بودن Q بدست می‌آوریم. تحت مفروضاتی خاص برای این شرط لازم عکسی بدست می‌آوریم. مطالعه خود را با ارائه‌ی مثالی از خم‌های با گونای ۷ و از گونالیتی ۴، در فصل ۴ تکمیل خواهیم کرد. شرط لازم و کافی بدست آمده برای مخروط مماسی بودن Q برای مطالعه‌ی این مثال از اهمیت بسزایی برخوردار است. اهمیت مثال بدست آمده در فصل ۴ تا حدود زیادی در مقدماتی بودن آن و قابل تعمیم بودن آن است.

واژه‌های کلیدی: پوشش مضاعف، خم هموار، کلاف خطی، مخروط مماسی، نرمال تصویری.

۱- مقدمه

در سرتاسر این مقاله، میدان اعداد مختلط به عنوان میدان پایه در نظر گرفته خواهد شد.

به ازای عدد صحیح و نامنفی n و خم هموار Z ، چندگونای ژاکوبی، چندگونای پیکارد از درجه n و بخش‌یاب تیتای خم Z را به ترتیب با نمادهای $J(Z)$ ، $Pic^n(Z)$ و Θ_Z نشان خواهیم داد.

۱-۱ تعریف: فرض کنید X خم هموار از گونای g ، Y خمی هموار و $\pi: Y \rightarrow X$ پوشش مضاعفی از X باشد. ریختپایی Nm که از چندگونای $Pic^{2g-2}(Y)$ به چندگونای $Pic^{2g-2}(X)$ با ضابطه‌ی

$$Nm(\mathcal{O}(q_1 + \dots + q_{2g-2})) = \mathcal{O}(\pi(q_1) + \dots + \pi(q_{2g-2})),$$

تعریف می‌شود، ریختپایی نرم القاشده از پوشش مضاعف π نامیده می‌شود که در آن

$$\mathcal{O}(q_1 + \dots + q_{2g-2})$$

کلاف خطی متناظر به بخش‌یاب $q_1 + \dots + q_{2g-2}$ است.

۱-۲ لم و تعریف: بین مجموعه‌ی کلاف‌های خطی η روی خم هموار X با خاصیت $\eta^2 = 0$ و مجموعه‌ی پوشش‌های مضاعف مانند $\pi: Y \rightarrow X$ ، که ریختپایی اتاله باشد، تناظری دوسویی موجود است.

برهان. رجوع شود به تمرین ۲، ۷، صفحه‌ی ۳۰۶ از مرجع [۵].

- پوشش مضاعف $\pi: Y \rightarrow X$ را که متناظر به کلاف خطی η با خاصیت $\eta^2 = 0$ است، پوشش مضاعف القا شده از کلافی خطی η می‌گوییم و با نماد π_η نمایش می‌دهیم.

۱-۳ قضیه و تعریف: فرض کنید η کلافی خطی روی خم هموار X با خاصیت $\eta^2 = 0$ بوده و $\pi_\eta: Y \rightarrow X$ پوشش مضاعف القا شده از آن باشد. ثابت می‌شود مجموعه‌ی

$$\mathbb{P}(\pi_\eta) := \left\{ L \in J(Y) : Nm(L) = K_X, h^0(L) \equiv 0 \pmod{2} \right\}$$

یک زیرچندگونای آبلی از چندگونای آبلی $J(Y)$ است.

برهان. مراجعه شود به فصل ۱۴ از مرجع [3].
- چندگونای $\mathbb{P}(\pi_\eta)$ ، چندگونای پریم ریختپایی π_η نامیده می‌شود.

- در فصل ۱۴ از مرجع [3] همچنین ثابت می‌شود زیرمجموعه‌ی

$$\mathbb{E}(\pi_\eta) := \left\{ L \in \mathbb{P}(\pi_\eta) : h^0(L) \geq 2 \right\}$$

بخش‌یابی از چند گونای $\mathbb{P}(\pi_\eta)$ است. بخش‌یاب $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ را بخش‌یاب پریم-تیتای ریختپایی π_η می‌گویند.
- در مرجع فوق، همچنین نشان داده می‌شود که می‌توان مجموعه نقاط تکین $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ را توسط مجموعه‌ی زیر نمایش داد:

$$\{L \in \mathbb{P}(\pi_\eta) : h^0(L) \geq 4\} \cup \{L \in \mathbb{P}(\pi_\eta) : h^0(L) \geq 2 \mid \mathbb{P}(H^0(K_X \otimes \eta)) \subseteq TC_L(\Theta_Y)\},$$

که در آن $TC_L(\Theta_Y)$ مخروط مماسی Θ_Y در نقطه‌ی L است. این مجموعه را با نماد $Sing(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ نشان خواهیم داد.

- فرض کنید $\varphi_{K_X \otimes \eta}: X \rightarrow \mathbb{P}^{g-2} := \mathbb{P}(H^0(K_X \otimes \eta))$ ریختپایی حاصل از کلاف خطی $K_X \otimes \eta$ باشد. برد این ریختپایی، یعنی $\varphi_{K_X \otimes \eta}(X)$ ، مدل پریم-متعارف متناظر به η از خم X نامیده می‌شود و با نماد X_η نشان داده خواهد شد.

۱-۴ تعریف: کلاف خطی L متعلق به $Sing(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ یک نقطه‌ی تکین پایا از بخش‌یاب پریم-تیتا، $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ ، گفته می‌شود هرگاه داشته باشیم $h^0(L) \geq 4$

۱-۵ تعریف: فرض کنید Q ابررویه‌ای درجه‌ی ۲ در فضای تصویری \mathbb{P}^n باشد که توسط چندجمله‌ای مربعی F تعریف

۱-۱۳ تعریف: کلاف خطی L روی خم هموار X را پردامنه گوییم هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی p, q از خم X داشته باشیم

$$h^0(L(-p - q)) = h^0(L) - 2$$

چندگونای پریم، $\mathbb{P}(\pi_\eta)$ ، و بخش‌یاب پریم-تیتا، $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ ، دارای برخی خواص مشابه با خواص ژاکوبی و بخش‌یاب تیتای خم‌ها هستند. از جمله این که مخروط مماسی در نقاط تکینی پایای $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ ، ابررویه‌ای مربعی و شامل مدل پریم - متعارف متناظر به η از خم X است. از طرف دیگر، علی‌رغم این که $\mathbb{P}(\pi_\eta)$ در بسیاری از خواص جالب دیگر با چندگوناهای ژاکوبی خم‌ها مشترک است، در برخی خواص قابل ذکر، تفاوت‌های عمده‌ای با چندگوناهای ژاکوبی خم‌ها دارد. از جمله این که مخروط مماسی در نقاط تکینی پایای $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ ، ابررویه‌ای مربعی از رتبه‌ی حداکثر ۶ است، در حالی که مخروط‌های مماسی در حالت ژاکوبی‌ها، ابررویه‌ای مربعی از رتبه‌ی حداکثر ۴ هستند. چنین تفاوت‌هایی منجر به هندسه‌ی غنی و زمینه‌های تحقیقاتی گسترده‌ای در نظریه‌ی چندگوناهای آبلی شده‌اند.

در این مقاله به مطالعه‌ی برخی از خواص $\mathbb{P}(\pi_\eta)$ ، $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ و X_η می‌پردازیم. ابتدا در مورد خم هموار X که در وضعیت عمومی بوده و گونالیتی آن حداقل ۲ است، ثابت می‌کنیم که هر مدل پریم-متعارف آن در $\mathbb{P}^{\mathbb{G}-2}$ نرمال تصویری است.

در مورد چندگوناهای ژاکوبی خم‌ها و ابررویه‌های مربعی با رتبه‌ی حداکثر ۴ که شامل مدل متعارف خمی جبری و هموار باشند، قضیه‌ی 1.4 از مرجع [2] شرطی معادل با مخروط مماسی بودن آنها معرفی می‌کند. هدف بعدی این مقاله بدست آوردن شرطی مشابه این شرط برای ابررویه‌هایی است که مربعی و از رتبه‌ی ۴ بوده و شامل حداقل یک مدل پریم - متعارف از یک خم هموار هستند. این هدف در قضیه‌های ۲-۳ و ۳-۳ محقق می‌شود. برای اثبات این قضیه‌ها از قضیه‌ی ۱-۴، به شکلی اساسی استفاده خواهد شد.

شده باشد. رتبه‌ی Q برابر رتبه‌ی دو فرمی مربعی F تعریف می‌شود.

۱-۶ نمادگذاری: فرض کنید X خمی هموار، تصویری و غیر ابربیضوی بوده و کلاف خطی K_X, η پردامنه باشد. مکان هندسی نقاط با چندگانگی ۲ در $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ را با نماد $Sing_2(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ نمایش می‌دهیم. همچنین مکان هندسی ابررویه‌های درجه‌ی ۲ و از رتبه‌ی ۴ در $\mathbb{P}(H^0(K_X, \eta))$ که شامل خم X_η هستند، با نماد $I_{X_\eta, 2}(4)$ نشان داده خواهد شد.

۱-۷ تعریف: چنانچه X خمی هموار بوده و n عددی طبیعی باشد، n -امین ضرب متقارن خم X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_d := X \times \dots \times X / S_d$$

که در آن S_n گروه متقارن از مرتبه n است. X_d چند گونایی هموار از بعد d است.

۱-۸ تعریف: به ازای اعداد طبیعی n و r با شرط $0 < 2r < d$ مجموعه‌ی X_n^r که ثابت می‌شود زیر طرحی از چندگونای هموار X_n است، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$X_n^r := \{D \in X_n \mid h^0(\mathcal{O}(D)) \geq r + 1\}$$

۱-۹ تعریف: فرض کنید \mathbf{F} بافه‌ای منسجم روی طرح تصویری X بوده و n عددی صحیح باشد. $\mathbf{F}, -n$ منظم گفته می‌شود هرگاه به ازای هر عدد طبیعی i تساوی $H^i(\mathbf{F}(m - i)) = 0$ برقرار باشد.

۱-۱۰ تعریف: کلاف خطی L روی خم هموار X را ناویژه گویند هرگاه داشته باشیم $H^1(L) = 0$.

۱-۱۱ تعریف: فرض کنید m عددی طبیعی باشد. گوییم خم X در فضای تصویری \mathbb{P}^n خم m -نرمال است هرگاه هم‌ریختی

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(m))$$

پوشا باشد.

۱-۱۲ تعریف: گوییم خم X در فضای تصویری \mathbb{P}^n نرمال تصویری است هرگاه به ازای هر عدد طبیعی m خم X در \mathbb{P}^n m -نرمال باشد.

۱-۲ لم. فرض کنید X خمی هموار بوده و L کلافی خطی روی X باشد. در این صورت L یک کلاف خطی $-n$ منظم است اگر و تنها اگر $(n-1)$ -نرمال بوده و $L(1)$ ناویژه باشد.

۲-۲ قضیه. فرض کنید X خم هموار بوده و در بین خم‌های با اندیس کلیفرد ۲ عمومی باشد. همچنین فرض کنید $\pi: Y \rightarrow X$ نگاشتی اتاله از درجه‌ی ۲ باشد که توسط کلاف خطی η ، با شرط $\eta^2 = 0$ القا شده است. در این صورت مدل پریم-متعارف خم X در \mathbb{P}^{g-2} نرمال تصویری است. همچنین کلاف خطی $K_X \cdot \eta$ روی چنین خمی، کلافی پرداخته است.

برهان. فرض کنید m عددی طبیعی باشد دنباله‌ی دقیق $0 \rightarrow I_{X_\eta}(m) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{g-2}}(m) \rightarrow \mathcal{O}_{X_\eta}(m) \rightarrow 0$ را در نظر بگیرید. در حالت $m=1$ ، با توجه به این که X_η مشمول در هیچ ابررویه‌ای از \mathbb{P}^{g-2} نمی‌باشد، لذا حکم بدیهی است. فرض کنید $m > 1$. بنابر لم ۱، ۲، برای اثبات $-m$ -نرمال بودن خم X_η کافی است ثابت کنیم خمی $(m+1)$ -منظم است. بدین منظور، با استفاده از دنباله‌ی دقیق فوق، کافی است ثابت کنیم که کلاف خطی \mathcal{O}_{X_η} بافه‌ی m -منظم است. به ازای $i \geq 2$ ، با استفاده از قضیه‌ی صفرساز گروتندیک، داریم:

$$H^i(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}(m-i)) = 0$$

به ازای $i=1$ ، با استفاده از قضیه‌ی ریمان^۱ -خ^۲ و قضیه‌ی دوگانی سیر ایزومرفیسم‌های زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} H^1(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}(m-1)) &\cong \\ H^1(X_\eta, (m-1)K_X \cdot \eta) &\cong \\ (H^0(X, (-i+1)K_X \cdot \eta))^v &= 0, \end{aligned}$$

که در آن V^v نمایشگر دوگان فضای برداری V است.

۱-۱۴ قضیه. فرض کنید $\pi: Y \rightarrow X$ پوششی مضاعف و اتاله از خم X باشد. اگر \tilde{p} و \tilde{q} نقاطی از خم Y و $L_{\tilde{p}, \tilde{q}}$ خط گذرنده بر این دو نقطه، واقع در \mathbb{P}^{2g-2} بوده و به ازای نقطه‌ای مانند p از X داشته باشیم

$$\pi^{-1}(p) = \{\tilde{p}, \tilde{q}\}$$

آنگاه تساوی $\varphi_{K_X \cdot \eta}(\pi(p)) = L_{\tilde{p}, \tilde{q}} \cap \mathbb{P}^{g-2}$ برقرار خواهد بود.

برهان. مراجعه شود به Claim 1 از مرجع [7].

مقاله را با ارائه‌ی مثالی از خم‌های ۴-گونال و مدلی پریم-متعارف از آنها در فصل ۴ به اتمام می‌رسانیم. یادآوری می‌کنیم که اغلب مثال‌های صریح موجود از چندگوناهای پریم عبارتند از ژاکوبی‌ها، چندگوناهای پریم خم‌های ۳-گونال، چندگوناهای پریم خم‌های دوبیضوی و چندگوناهای پریم خم‌های درجه‌ی ۵ هموار مسطح. مثال درست شده در فصل ۴ از این لحاظ حائز اهمیت است که اولاً متفاوت از همه‌ی این ساختارها و مثال‌های موجود بوده و ثانیاً شگرد استفاده شده در ساختار آن قابل تعمیم به خم‌های مسطح با گونالیتی‌های بالاتر است. متذکر می‌شویم که با تغییراتی جزئی در تکنیک استفاده شده در این مثال، می‌توان آن را به خم‌های با گونالیتی‌های بالاتر نیز تعمیم داد. لذا، با ساختاری مشابه با ساختار مثال حاضر، می‌توان مثالی از چند گوناهای پریم خم‌های با گونالیتی بالاتر درست کرد.

۲. نرمال تصویری بودن خم‌های عمومی با اندیس کلیفرد ۲

ادواردو سرنزی و هربرت لنتق در مرجع [4] ثابت کرده‌اند که مدل متعارف-پریم خم‌های با اندیس کلیفرد حداقل ۳ در فضای تصویری متعارف-پریم، نرمال تصویری هستند. در این بخش گام بعدی از کار سرنزی و لنتق را تکمیل می‌کنیم. ابتدا لم زیر را، به دلیل ساده بودن برهان آن، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

¹ Riemann

²Roch

این نامساوی، قضیه‌ی کمف^۱-ریمان نامساوی $\deg(\tilde{Q}) \geq 6$ را ایجاب می‌کند که مجدداً با استفاده از قضیه‌ی کمف-ریمان نامساوی $\deg(Q) \geq 3$ از آن نتیجه خواهد شد. نامساوی آخر در تناقض با تساوی $\deg(Q) = 2$ است. لذا تساوی $h^0(L) = 4$ حاصل خواهد شد.

بالعکس اگر L یک تکنیکی پایا از $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ با خاصیت $h^0(L) = 4$ باشد، نتیجه‌ی 6.2.5 از مرجع [5] به همراه قضیه‌ی کمف - ریمان مجدداً ایجاب می‌کنند که $\deg(Q) = 2$ و $X_\eta \subset Q \subset \mathbb{P}(H^0(K_X \cdot \eta))$. این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

۳-۲ قضیه. فرض کنید $L \in \text{Sing}_2(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ و $Q \in I_{X_\eta, 2}(4)$ مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ در نقطه‌ی L باشد. در این صورت یکی از خانواده‌های خط‌کشی کننده‌ی Q یک سری خطی کامل، g_d^1 ، روی خم X_η می‌برد که در آن $g - 1 \leq d \leq g - 3$ و به ازای کلافی خطی مانند T ، تساوی $K_X \otimes T = \mathcal{O}(g_d^1)$ برقرار است.

برهان. اگر $Q = Q_L \in I_{X_\eta, 2}(4)$ مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ در \tilde{L} باشد، آنگاه یکی از خانواده‌های خط‌کشی کننده‌ی آن یک g_d^1 ، روی X_η القا خواهد کرد. به ازای بخش‌یاب دلخواه E ، که به عنوان عضوی از سری خطی g_d^1 در نظر گرفته می‌شود، تساوی $\dim(\langle E \rangle) = g - 3$ مستقیماً از شکل هندسی قضیه‌ی ریمان-رخ نتیجه می‌شود. این تساوی به راحتی نامساوی $d = \deg(E) \geq g - 3$ را نتیجه می‌دهد. به ازای هر بخش‌یاب \tilde{E} ، که عضوی از فضای Y_{2g-2}^3 است، با قرار دادن $\tilde{L} := \mathcal{O}(\tilde{E})$ فضای خطی $\langle E \rangle$ منطبق بر فضای خطی $\langle \tilde{E} \rangle \cap \mathbb{P}(H^0(K_X \cdot \eta))$ خواهد شد، مراجعه شود به مرجع [6]. به ازای هر نقطه‌ی p از خم X_η با قرار دادن $\pi_\eta^{-1}(p) = \{\tilde{p}, \tilde{q}\}$ و با بکار بردن قضیه‌ی (1.14) معلوم می‌شود که $p \in \text{Supp}(E)$ اگر و تنها اگر $\{\tilde{p}, \tilde{q}\} \subseteq \text{Supp}(\tilde{E})$. نامساوی دوم، یعنی $d \leq g - 1$

ایزومورفیسمی‌های فوق اثبات m -نرمال بودن X_η در \mathbb{P}^{g-2} را تکمیل می‌کنند. برای اثبات پدانه بودن کلاف خطی $K_X \cdot \eta$ ، توجه داریم که به ازای نقاطی مانند x و y از X ، برقراری تساوی $h^0(K_X \cdot \eta(-x - y)) = 1 - h^0(K_X \cdot \eta)$ وجود اعضایی از X مانند z و w را ایجاب می‌کند به طوری که z, y, x و w در روابط $2x + 2y \sim 2z + 2w \in g_4^1$ و $x + y \not\sim z + w$ زیر صدق می‌کنند. این با عمومی بودن خم X در تناقض است.

۳. مماس‌های مخروطی از رتبه ۴

فرض کنید X خمی هموار، تصویری و غیر ابربیسوی بوده و $\pi_\eta: Y \rightarrow X$ پوشش اتاله‌ی مضاعف القا شده توسط کلاف خطی η باشد که توان دوم η برابر کلاف خطی بدیهی، یعنی \mathcal{O}_X ، بوده و کلاف خطی $K_X \cdot \eta$ پدانه باشد. مکان هندسی نقاط با چندگانگی ۲ در $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ را با نماد $\text{Sing}_2(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ نمایش می‌دهیم. همچنین مکان هندسی ابررویه‌های درجه‌ی ۲ و از رتبه‌ی ۴ در $\mathbb{P}(H^0(K_X \cdot \eta))$ که شامل خم X_η هستند، با نماد $I_{X_\eta, 2}(4)$ نشان داده خواهد شد.

۳-۱ قضیه. فرض کنید $L \in \text{Sing}_2(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ در نقطه‌ی L ، ابررویه‌ای مربعی در $\mathbb{P}(H^0(K_X \cdot \eta))$ بوده و شامل X_η است اگر و فقط اگر L تکنیکی پایا بوده و داشته باشیم: $h^0(L) = 4$.

برهان. فرض کنیم $L \in \text{Sing}_2(\mathbb{E}(\pi_\eta))$ و Q مخروط مماسی $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ در نقطه‌ی تکراری L و \tilde{Q} مخروط مماسی بخش‌یاب تیتای خم Y در نقطه‌ی L باشد. اگر ابررویه‌ای مربعی در $\mathbb{P}(H^0(K_X \cdot \eta))$ و شامل X_η باشد آنگاه طبق نتیجه‌ی 6.2.5 از مرجع [5] خواهیم داشت $h^0(L) \geq 4$. در صورت برقراری نامساوی اکید $h^0(L) > 4$ ، بنابر زوج بودن $h^0(L)$ ، نامساوی $h^0(L) \geq 6$ نیز برقرار خواهد بود. براساس

¹Kempf

نتیجه‌ی مستقیم این نکته است.

برای اثبات کامل بودن سری خطی g_d^1 ، فرض کنید به ازای بخش‌یابی مانند $D \in |g_d^1|$ داشته باشیم $|D| \subseteq |g_d^1|$. توجه داریم که بخش‌یاب مثبتی مانند Γ وجود دارد به طوری که $|\tilde{L}| = |\pi_\eta^*(D) + \Gamma|$. با فرض غیر کامل بودن سری خطی g_d^1 ، تساوی‌های

$$\tilde{Q} \cap \mathbb{P}^{g-2} = [\cup_{\tilde{D} \in |\tilde{L}|} \langle \tilde{D} \rangle] \cap \mathbb{P}^{g-2} = \mathbb{P}^{g-2},$$

برقرار خواهند بود که با مخروط مماسی پایا بودن \tilde{Q} در تناقض هستند. همچنین توجه داریم که با توجه به نامساوی $h^0(K_X - 2g_d^1) \geq 1$ کلاف خطی $T := K_X - 2g_d^1$ در تساوی ادعا شده در صورت قضیه صدق می‌کند. در حالت $d = g - 1$ قضیه‌ی ۲-۳ دارای عکسی به شکل زیر است:

۳-۳ قضیه. فرض کنید $Q \in I_{X, \eta, 2}(4)$ دارای این خاصیت باشد که یکی از خانواده‌های خط‌کشی کننده‌ی آن یک سری خطی کامل، g_{g-1}^1 ، روی خم X_η می‌برد به طوری که تساوی $\mathcal{O}(g_{g-1}^1) = K_X$ برقرار است. با این مفروضات Q یک مخروط مماسی از $\mathbb{E}(\pi_\eta)$ خواهد بود.

برهان. با قرار دادن $\tilde{L} := \pi^*(g_{g-1}^1)$ از تساوی $\tilde{L} \in \mathbb{E}(\pi_\eta)$ نتیجه می‌شود $\mathcal{O}(g_{g-1}^1) = K_X$. همچنین توجه داریم که

$$h^0(\tilde{L}) = h^0(g_{g-1}^1) + h^0(g_{g-1}^1 \cdot \eta)$$

از ابررویه بودن Q در \mathbb{P}^{g-2} ، نتیجه می‌شود که هر کدام از فضاهای خط‌کشی کننده‌ی Q یک \mathbb{P}^{g-4} داخل \mathbb{P}^{g-2} است. لذا با استفاده از قضیه‌ی ریمان-رخ هندسی معلوم می‌شود که $h^0(g_{g-1}^1 \cdot \eta) = 2$ از این تساوی نتیجه می‌شود $h^0(\tilde{L}) = 4$ ، که به نوبه‌ی خود تعلق $\tilde{L} \in \text{Sing}_2 \mathbb{E}(\pi_\eta)$ را ایجاد می‌کند.

با استفاده از قضیه‌ی (1.14)، به ازای هر فضای خطی مانند Λ در Q با شرط $\Lambda = \langle D \rangle$ ، با قرار دادن $\tilde{\Lambda} =$

$\langle \pi^*(D) \rangle$ خواهیم داشت: $\tilde{\Lambda} \cap \mathbb{P}^{g-2} = \Lambda$. لذا با

استفاده‌ی مجدد از قضیه‌ی (1.14)، تساوی $\tilde{Q} \cap \mathbb{P}^{g-2} = Q$ نتیجه می‌شود که اثبات را کامل می‌کند.

۴. مثالی از خم‌های متعارف - پریم با گونای 7 و گونالیتی 4

فرض کنید X خم مسطح هموار درجه‌ی دوم باشد به طوری که نقاط هم‌خط \bar{x} ، \bar{y} و \bar{z} تنها نقاط تکینگی گرهی برای X باشند. همچنین فرض کنید $i: C \rightarrow X$ نرمال‌سازی X باشد. با استفاده از فرمول درجه-گونا بدست می‌آوریم:

$$g(C) = 7$$

با فرض $i^{-1}(\bar{y}) = \{y_1, i^{-1}(\bar{x}) = \{x_1, x_2\}$ و $y_2\}$ و همچنین با قراردادن $H = i^*(O_X(1))$

$\Delta = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2$ سری خطی $|5H - \Delta|$ را روی خم C و نیز بخش‌یاب $D_{12} \in C_{12}$ را طوری در نظر می‌گیریم که داشته باشیم $2D_{12} \in |5H - \Delta|$. با این فرض‌ها قرار می‌دهیم $\eta = 2H - D_{12}$. بدیهی است که $K_C = 3H - \Delta$ همچنین با استفاده از هم‌خط بودن نقاط \bar{x} ، \bar{y} و \bar{z} معلوم می‌شود که $\eta^2 = 0$. خم C خمی هموار و 4-گونال است.

در واقع پس‌کشی خطوط گذرنده از هر کدام از نقاط \bar{x} ، \bar{y} یا \bar{z} یک g_4^1 روی C تولید می‌کنند. با استفاده از قضیه‌ی مارتنس^۱ - مامفرد^۲ معلوم می‌شود $\dim(W_6^1(C)) \leq 2$. دو نوع سری خطی g_6^1 روی خم C وجود دارند. نوع اول، از خطوط واقع در \mathbb{P}^2 حاصل می‌شوند. همچنین به ازای نقاط عمومی p و q خم‌های مسطح مربعی گذرنده از p و q نیز گذرنده از ۲ نقطه از سه نقطه‌ی \bar{x} ، \bar{y} و \bar{z} سری خطی g_6^1 روی خم C ایجاد می‌کنند. به عبارت دیگر

$$g_6^1 = 2H - x_1 - x_2 - y_1 - y_2 - p - q$$

این سری‌ها نوع دوم سری‌های خطی g_6^1 را روی خم C ایجاد می‌کنند. می‌توان دید که هر سری خطی g_6^1 روی C به یکی از این دو شکل بدست می‌آید.

¹ Martens

² Mumford

براساس قضیه‌ای از فرانچسکو سوری^۱، وجود خم‌های تحویل‌ناپذیر از درجه‌ی d با تعداد مشخصی، δ ، تکینگی معمولی در بازهای مشخص از d و δ ثابت می‌شود.

مراجعه شود به [7]. از طرف دیگر این قضیه در مورد وجود چنین خم‌هایی، که حداقل سه تا از تکینگی‌های آنها هم‌خط باشند، پاسخی نمی‌دهد. لذا ثابت می‌کنیم که گردایه‌ی خم‌های تحویل‌ناپذیر از درجه‌ی 6 که دارای 3 نقطه‌ی تکینگی هم‌خط باشند، مجموعه‌ای ناتهی است. به عبارت دیگر ثابت می‌کنیم:

۱- قضیه ξ . خم تحویل‌ناپذیری مانند X از درجه‌ی 6 با سه نقطه‌ی تکینگی هم‌خط در \mathbb{P}^2 وجود دارد به طوری که خم نرمال شده‌ی آن، C ، دارای بخش‌یابی مانند $D_{12} \in |5H - \Delta|$ است به طوری که $2D_{12} \in |5H - \Delta|$. همچنین با نمادهای فوق، کلاف خطی $K_X \cdot \eta$ یک کلاف خطی پردامنه است.

برنامه. فرض کنید Q_1 و Q_2 خم‌های مربعی و مسطح باشند به طوری که فقط در یک نقطه‌ی t برهم مماس باشند. طبق قضیه‌ی بزوا^۲، این خم‌ها در دو نقطه‌ی دیگر مانند \bar{x} و \bar{y} با چندگانگی 1 همدیگر را قطع خواهند کرد. فرض کنید $l_{\bar{x}, \bar{y}}$ خط گذرنده از این دو نقطه باشد. به ازای هر نقطه مانند \bar{z} از $l_{\bar{x}, \bar{y}}$ خطوطی مانند L_1 و L_2 مار بر \bar{z} موجودند به طوری که L_1 بر Q_1 و L_2 بر Q_2 مماس هستند. حال خم تحویل‌پذیر X_1 با تعریف

فرض کنید $h = Q_1 \cdot Q_2 \cdot L_1 \cdot L_2$ خمی از درجه 6 بوده و دارای تعداد 3 تا نقطه‌ی تکینگی معمولی و هم‌خط است. فرض کنید Q فضای خم‌های مربعی مسطح مار بر نقاط \bar{x} ، \bar{y} و t باشد و همچنین فرض کنید Q_1 فضای خم‌هایی از Q باشد که در نقطه‌ی t بر هم مماس هستند. در این صورت $\dim(Q_1) \geq 1$. با انتخاب یک جفت دیگر از خم‌های مربعی مانند \bar{Q}_1 ، \bar{Q}_2 از Q_1 که مجزا از Q_1 و Q_2 هستند و نیز با انتخاب خطوط \bar{L}_1 ، \bar{L}_2 مشابه با انتخاب خطوط L_1 و L_2 و متمایز از آنها، قرار می‌دهیم:

توجه داریم که خمی مسطح و از درجه‌ی 6 مانند F موجود است که از نقاط p_1, p_2, \dots, p_{12} گذشته و در نقاط p_4, \dots, p_{12} بر خم T مماس است. برای ارائه اثباتی از این واقعیت، اولاً متذکر می‌شویم که فضای خم‌های مسطح و از درجه‌ی 6 فضایی 27 بعدی است. از طرف دیگر مار بودن بر نقاط p_1, p_2, \dots, p_{12} و مماس بودن در نقاط p_4, \dots, p_{12} و نیز داشتن سه نقطه‌ی تکینگی هم‌خط \bar{x} ، \bar{y} و \bar{z} حداکثر 24 شرط روی خم‌های مسطح و از درجه‌ی 6 تحمیل خواهد کرد. این ملاحظه وجود خم مطلوب F را به اثبات می‌رساند.

با نمادهای پاراگراف قبل، بدیهی است که بخش‌یاب $D_{12} := p_1 + \dots + p_{12}$ بخش‌یابی است که دارای خواص مطلوب قضیه است.

¹ Francesco Severi

²Bezout

³Bertini

نتیجه می‌شود که به ازای هر $D \in |g_6^1|$ داریم
 $dim(\langle D \rangle) = 3$ که از آن نتیجه می‌شود
 $dim(Q) = dim(\cup_{D \in |g_6^1|} \langle D \rangle) = 4$
 و $deg(Q) = 2, rank(Q) \leq 4$ بنابراین
 $\mathcal{O}(g_6^1) = K_X$ تساوی مربعی است. نتیجه‌ای مستقیم از نیم-متعارف بودن سری g_6^1 است.
 حال مماس مخروطی بودن Q به وضوح از قضیه‌ی ۳.۳ نتیجه خواهد شد.

۲-۴ لم. با نمادهای فوق فرض کنید g_6^1 سری خطی از نوع دوم باشد. در این صورت

$$h^0(K_C \cdot \eta - g_6^1) \leq 3$$

برهان. با یک محاسبه سراسر است به سادگی معلوم می‌شود که

$$K_C \cdot \eta - g_6^1 \sim 3H - D_{12} + p + q - z_1 - z_2$$

با استفاده از "در وضعیت عمومی بودن" نقاط p و q معلوم می‌شود:

$$h^0(3H - D_{12} + p + q - z_1 - z_2) = h^0(3H - D_{12} - z_1 - z_2) \leq h^0(3H - D_{12}).$$

همچنین با استفاده از متناهی بودن درجه‌ی نگاشت جمعی $|3H - D_{12}| \times |3H - D_{12}| \rightarrow |6H - 2D_{12}|$ با ضابطه‌ی $(D_1, D_2) \mapsto D_1 + D_2$ معلوم می‌شود که

$$2h^0(3H - D_{12}) - 2 \leq h^0(6H - 2D_{12}) - 1.$$

با استفاده از فرض متعلق بودن بخش‌یاب $2D_{12}$ به سری خطی $|5H - \Delta|$ و هم ارز خطی بودن Δ با $|H|$ معلوم می‌شود $h^0(6H - 2D_{12}) = 6$. این تساوی اثبات حکم را تکمیل می‌کند.

۳-۴ قضیه. با نمادهای فوق، فرض کنید g_6^1 سری خطی از نوع دوم و نیم-متعارف بوده و داشته باشیم:

$$2z_1 + 2z_2 \sim 2p + 2q$$

همچنین فرض کنید z_1 نقطه‌ای ثابت از سری خطی $|2H - D_{12}|$ بوده ولی z_2 نقطه‌ای ثابت از این سری خطی نباشد. آنگاه، در صورت برقراری تساوی

$$Q = h^0(2H - D_{12}) = 3 \quad \text{واریتته‌ی}$$

$\cup_{D \in g_6^1} \langle D \rangle$ یک مخروط مماسی از $\mathbb{E}(\pi_1)$ در \mathbb{P}^5 خواهد بود.

برهان. با استفاده از شکل هندسی قضیه‌ی ریمان-رخ و تساوی‌های

$$h^0(K_C \cdot \eta - g_6^1) = h^0(3H - D_{12} - z_1 - z_2) = h^0(3H - D_{12} - z_2) - 1 = 2$$

Divisors on a Prym Theta Divisor,
Transactions of the A. M. S.

فهرست منابع

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, Ph. Griffiths, J. Harris (1985). Geometry of Algebraic Curves. I Grundlehren.
- [2] E. Arbarello, J. Harris (1981). Canonical Curves and Quadrics of rank 4, Compositio mathematica.
- [3] Ch. Birkenhake, H. Lange (2004). Complex Abelian Varieties (Second Edition). I Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.
- [4] L. Gruson, R. Lazarsfeld, C. Peskine (1983). On a Theorem of Castelnuovo and the equations defining Space Curves; Invent. Math.
- [5] R. Hartshorne (1977). Algebraic Geometry, Springer Verlag.
- [6] H. Lange, E. Sernesi (1996). Quadrics containing a Prym-Canonical Curve, J. Algebraic Geometry.
- [7] S.C. Martin (2009). Singularities of the Prym theta divisor, Annales of Mathematics
- [8] E. Sernesi (2006). Deformations of Algebraic Curves, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.
- [9] R. Smith, R. Varley (2001). A Riemann Singularities Theorem for Prym Theta Divisors, with applications, Pacific Journal of Mathematics.
- [10] R. Smith, R. Varley (2001). The Curve of "Prym Canonical" Gauss

