

## محاسبه و تحلیل دو روش برآورد قابلیت اطمینان در مدل استرس مقاومت

کاظم فیاض حیدری<sup>۱</sup>، عین اله دیری<sup>۲\*</sup>، عزت‌اله بالوئی جامخانه<sup>۳</sup>

(<sup>۱</sup>و<sup>۳</sup>) گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قائم شهر، قائم شهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۰۶

### چکیده

در این مقاله، ما یک برآورد قابلیت اطمینان در یک سیستم استرس مقاومت چند مولفه‌ای پیشنهاد می‌دهیم. قابلیت اطمینان چنین سیستمی، وقتی متغیرهای استرس مقاومت متعلق به توزیع گومپرتز با پارامتر اسکالر  $\lambda$  و پارامترهای شکل متفاوت  $\alpha$  و  $\beta$  هستند، به دست آورده می‌شود. قابلیت اطمینان سیستم با روش‌های برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی و بهترین برآوردگر صدکی در نمونه‌های گرفته شده از توزیع‌های استرس و مقاومت برآورد می‌شوند. همچنین در مراحل تحقیق، یک فاصله اطمینان مجانبی برای قابلیت اطمینان سیستم به دست می‌آید. برآوردگرهای قابلیت اطمینان به دست آمده از هر دو روش با استفاده از معیارهای میانگین اریبی، میانگین مربعات خطا و طول فاصله اطمینان از طریق شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه می‌شوند. در آخر، برای تشریح دو روش از دو مجموعه داده واقعی استفاده شده است. قبل از تحلیل داده‌ها ابتدا با استفاده از آماره آزمون نیکویی برازش کولموگوروف-اسمیرنوف نشان دادیم که توزیع گومپرتز به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود. به‌طور کلی با توجه به افزایش حجم نمونه، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که معیارهای میانگین اریبی، میانگین مربعات خطا و طول فاصله اطمینان در روش ماکسیمم درست‌نمایی نسبت به روش بهترین برآوردگر صدکی کاهشی است که دال بر کاراتر بودن روش ماکسیمم درست‌نمایی است. همچنین در این مقاله، نشان دادیم سیستم سه مولفه‌ای با حداقل دو مولفه فعال بهتر از سیستم دو مولفه‌ای با حداقل یک مولفه فعال است.

**واژه‌های کلیدی:** قابلیت اطمینان، بهترین برآوردگر صدکی، استرس-مقاومت چند مولفه‌ای، توزیع گومپرتز.

## ۱. مقدمه

به  $R_{s,k}$  قابلیت اطمینان در سیستم چند مولفه‌ای گویند. در گذشته برای برآورد قابلیت اطمینان سیستم‌های استرس-مقاومت، تحقیقات زیادی انجام شده است. مانند ساراچ اوغلو [۳] مقایسه برآوردگرها برای قابلیت اطمینان استرس مقاومت در توزیع گومپرتز، ال-موتابری و همکاران [۴] استنباط قابلیت اطمینان استرس مقاومت در توزیع لیندلی، اصغرزاده و همکاران [۵] قابلیت اطمینان استرس مقاومت در توزیع وایبول با داده‌های سانسور شده، اواد و چارف [۶]، داورزنی و همکاران [۷] و داونتین [۸]، به ترتیب برآورد  $P(X < Y)$  در توزیع بور، وایبول و نرمال، نادار و همکاران [۹] برآورد کلاسیک و بی‌زی  $P(X < Y)$ ، ركب و کاندو [۱۰] مقایسه تفاوت برآوردگرهای  $P(X < Y)$  که در همه این موارد از استرس مقاومت تک مولفه‌ای استفاده شده است. اما برای برآورد قابلیت اطمینان در سیستم‌های استرس-مقاومت چند مولفه‌ای که ابتدا توسط باتاچاریا و جانسون [۲] و پاندی برهان [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته، در سال‌های اخیر نیز مورد توجه بعضی از نویسندگان بوده است. که به چند نمونه از آن می‌توان اشاره کرد: حیدری و همکاران [۱۲] در توزیع وایبل معکوس، اریلماز و ایسچی اوغلو [۱۳] در توزیع نمایی، پاک و همکاران [۱۴] در توزیع رایلی، راثو [۱۵] در توزیع نمایی تعمیم یافته، راثو و همکاران [۱۶] در توزیع وایبل نمایی و راثو و کنتام [۱۷] در توزیع لگ لجستیک به مطالعه پرداختند.

در بخش دوم این مقاله، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $R_{s,k}$  و فاصله‌های اطمینان مجانبی آن به دست آورده می‌شوند. در بخش سوم به روش مونت کارلو، مطالعه شبیه‌سازی انجام می‌شود و برای تشریح و مقایسه روش‌های برآورد، از دو مجموعه داده واقعی استفاده می‌گردد. در بخش آخر نیز، نتیجه‌گیری بیان شده است.

توزیع گومپرتز در حوزه‌های گوناگون علوم مانند رایانه، توزیع عمر قطعات صنعتی، نظریه قابلیت اطمینان، پزشکی، بیمه و آنالیز بقا کاربرد دارد. از این رو برآورد پارامتر آن به روش‌های مختلف توصیه می‌شود. اگر  $X$  دارای توزیع گومپرتز با پارامتر اسکالر  $\lambda$  و پارامتر شکل  $\alpha$  باشد و به صورت  $Gom(\alpha, \lambda)$  نشان داده شود آنگاه تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی آن [۱] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f(x) = \alpha e^{\lambda x} e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x} - 1)}, x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (1)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x} - 1)}, x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \quad (2)$$

در این مقاله، وقتی که  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های  $Gom(\alpha, \lambda)$  و  $Gom(\beta, \lambda)$  می‌باشند، برآورد قابلیت اطمینان در مدل استرس-مقاومت چند مولفه‌ای به دست آورده می‌شود. فرض کنید یک سیستم چند منظوره با  $k$  مولفه داشته باشیم که این مولفه‌ها، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند که به ترتیب مقاومت‌های تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_k$  دارند. استرس تصادفی  $Y$  را برای هر یک از  $k$  مولفه در نظر می‌گیریم. اگر حداقل  $S$  مولفه از  $k$  مولفه، مقاومتش بر استرسش غلبه کند، آنگاه سیستم به فعالیت خود ادامه خواهد داد.

در تعریف قابلیت اطمینان سیستم چند مولفه‌ای، فرض کنید  $Y, X_1, X_2, \dots, X_k$  متغیرهای تصادفی مستقل از هم و  $G(y)$  تابع توزیع تجمعی پیوسته  $Y$  و  $F(x)$  تابع توزیع پیوسته مشترک  $X_1, X_2, \dots, X_k$  باشند. آن‌گاه با توجه به باتاچاریا و جانسون [۲]، داریم

$$= \sum_{i=S}^k \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F(y))^i (F(y))^{k-i} dG(y), \quad (3)$$

## ۲. روش‌های برآورد $R_{s,k}$

فرض کنید  $X$  (مقاومت) و  $Y$  (استرس) متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های  $Gom(\alpha, \lambda)$  و  $Gom(\beta, \lambda)$  باشد. با توجه به رابطه (۳)، قابلیت اطمینان مدل استرس-مقاومت چند مولفه‌ای برای توزیع گومپرتز به صورت زیر به دست آورده می‌شوند.

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_0^{\infty} [e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y}-1)}]^i [1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda y}-1)}]^{k-i} \beta e^{\lambda y} e^{-\frac{\beta}{\lambda}(e^{\lambda y}-1)} dy$$

با فرض  $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$  و به کمک تغییر متغیر  $t = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda x}-1)}$  داریم:

$$R_{s,k} = \nu \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} \int_0^1 (1-t)^{i+\nu-1} t^{k-i} dt = \nu \sum_{i=s}^k \binom{k}{i} B(i+\nu, k-i+1) = \nu \sum_{i=s}^k \frac{k!}{i!} \left[ \prod_{j=i}^{k-i+\nu} (k+\nu-j) \right]^{-1} \quad (4)$$

در این بخش، برآورد ماکسیمم درستنمایی و بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  به دست آورده می‌شوند و سپس  $R_{s,k}$  برآورد می‌شود. می‌دانیم که برآوردهای درستنمایی ماکسیمم دارای خاصیت پایایی هستند. اما برآوردهای دیگر دارای چنین خاصیتی نیستند. با این حال بعضی از نویسندگان برای برآورد تابعی از پارامترها به روش غیر از ماکسیمم درستنمایی، از خاصیت پایایی استفاده کردند. که می‌توان به بعضی از آن‌ها اشاره کرد. تراوادی و راتانی [۱۸] برای برآورد قابلیت اطمینان در مدل استرس-مقاومت تک مولفه‌ای بر پایه توزیع گوسی معکوس، کنتام و راثو [۱۹] برای برآورد پارامترهای توزیع لگ-لجستیک، راثو [۲۰] برای برآورد قابلیت اطمینان در مدل استرس-مقاومت چند مولفه‌ای بر پایه توزیع رایلی، علیزاده و همکاران [۲۱] برای برآورد تابع توزیع و تابع چگالی احتمال توزیع

وایبل نمایی شده و باقری و همکاران [۲۲] برای برآورد تابع توزیع و تابع چگالی احتمال توزیع پواسن-نمایی، از خاصیت پایایی در روش‌های غیر از برآورد ماکسیمم درستنمایی استفاده کردند. بنابراین در این مقاله بعد از به دست آوردن بهترین برآوردهای صدکی تک مشاهده‌ای  $\alpha$  و  $\beta$ ، بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $R_{s,k}$  با استفاده از خاصیت پایایی به دست آورده می‌شود.

### ۲-۱. برآورد ماکسیمم درستنمایی $R_{s,k}$

فرض کنید  $X$  دارای توزیع  $Gom(\alpha, \lambda)$  و  $Y$  دارای توزیع  $Gom(\beta, \lambda)$  و  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از  $X$  و  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  یک نمونه تصادفی از  $Y$  باشند. بنابر این لگاریتم تابع درستنمایی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = n \ln \alpha + m \ln \beta + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^m y_j \right) - \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1) + \frac{\beta}{\lambda} \sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1)$$

برآوردهای ماکسیمم درستنمایی  $\alpha$  و  $\beta$  که به ترتیب با نمادهای  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  نشان داده می‌شود به صورت زیر به دست آورده می‌شوند.

$$\hat{\alpha} = \frac{n\lambda}{\sum_{i=1}^n (e^{\lambda x_i} - 1)}, \quad \hat{\beta} = \frac{m\lambda}{\sum_{j=1}^m (e^{\lambda y_j} - 1)}$$

چون برآورد ماکسیمم درستنمایی  $R_{s,k}$  به کمک برآوردهای ماکسیمم درستنمایی  $\alpha$  و  $\beta$  به دست می‌آید. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌شود،  $\lambda = 1$ . بعد از به دست آوردن  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$ ، برآورد ماکسیمم درستنمایی  $R_{s,k}$  که با نماد  $\hat{R}_{s,k}$  نشان داده می‌شود به صورت زیر می‌باشد

$$\hat{R}_{s,k} = \nu \sum_{i=s}^k \frac{k!}{i!} \left[ \prod_{j=i}^{k-i+\nu} (k+\nu-j) \right]^{-1}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۵) داریم:

$$V(\hat{R}_{1,2}) = \frac{(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1)\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{v}^{\mathfrak{r}}}{[(\hat{\mathfrak{v}} + 1)(\hat{\mathfrak{v}} + 2)(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} - 1)]^{\mathfrak{r}}} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right\},$$

$$V(\hat{R}_{2,3}) = \frac{(9\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} + 3\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 39\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{w}^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{r}}}{[(\hat{\mathfrak{v}} + 1)(\hat{\mathfrak{v}} + 2)(\hat{\mathfrak{v}} + 3)(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1)]^{\mathfrak{r}}} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right\}$$

همچنین وقتی که  $n \rightarrow \infty$  و  $m \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه:

$$\frac{R_{s,k} - \hat{R}_{s,k}}{\sqrt{V(\hat{R}_{s,k})}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

۰/۹۵ برای  $R_{2,3}$  و  $R_{1,2}$  عبارتند از:

$$\hat{R}_{1,2} \pm \frac{1.96(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1)\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{v}^{\mathfrak{r}}}{[(\hat{\mathfrak{v}} + 1)(\hat{\mathfrak{v}} + 2)(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} - 1)]^{\mathfrak{r}}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}},$$

$$\hat{R}_{2,3} \pm \frac{1.96(9\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} + 3\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 39\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{w}^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{r}}}{[(\hat{\mathfrak{v}} + 1)(\hat{\mathfrak{v}} + 2)(\hat{\mathfrak{v}} + 3)(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1)]^{\mathfrak{r}}} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

## ۲-۲. بهترین برآورد صدکی تک‌مشاهده‌ای

فرض کنید  $U_1, U_2, \dots, U_n$ ، ...،  $U_n$  آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی  $X_1, X_2, \dots, X_n$  از توزیع  $Gom(\alpha, \lambda)$  و  $W_1, W_2, \dots, W_n$  آماره‌های ترتیبی نمونه تصادفی  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  از توزیع  $Gom(\beta, \lambda)$  باشند. اگر آماره ترتیبی  $k$ ام یعنی  $U_k$  صدک مرتبه  $p$  توزیع  $Gom(\alpha, \lambda)$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$p = F(U_k) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\lambda}(e^{\lambda U_k} - 1)} \quad (۶)$$

که در آن  $k = [np]$  است، البته وقتی  $np$  عددی صحیح باشد. و در صورتی که  $np$  عددی صحیح نباشد، آن‌گاه  $k = [np] + 1$  می‌شود. از رابطه (۶) برآوردی برای  $\alpha$  که با نماد  $\alpha^*$  نشان داده می‌شود به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\alpha^* = \frac{-\log(1-p)}{\frac{e^{\lambda U_k} - 1}{\lambda}} = \frac{\log(-\log(1-p^*))}{\log Z_k} \quad (۷)$$

که در آن داریم:

اکنون فاصله اطمینان مجانبی  $\hat{R}_{s,k}$  به دست آورده می‌شود. ابتدا واریانس مجانبی  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$V(\hat{\alpha}) = \left\{ E \left[ -\frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} \right] \right\}^{-1} = \frac{\alpha^{\mathfrak{r}}}{n},$$

$$V(\hat{\beta}) = \left\{ E \left[ -\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} \right] \right\}^{-1} = \frac{\beta^{\mathfrak{r}}}{m}$$

با توجه به راثو [۲۳]، واریانس مجانبی  $\hat{R}_{s,k}$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$V(\hat{R}_{s,k}) = V(\hat{\alpha}) \left( \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha} \right)^{\mathfrak{r}} + V(\hat{\beta}) \left( \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \beta} \right)^{\mathfrak{r}} \quad (۵)$$

چون مشتق‌گیری از  $R_{s,k}$  نسبت به  $\alpha$  و  $\beta$  در حالت کلی مشکل است، بنابراین می‌توان به ازای  $S$  و  $k$  مشخص، این مشتقات را به دست آورد. مثلاً به ازای  $(s, k) = (1, 2), (2, 3)$  داریم:

$$R_{1,2} = \frac{1}{(\mathfrak{v} + 1)(\mathfrak{v} + 2)(\mathfrak{w} - 1)^{\mathfrak{r}}},$$

$$R_{2,3} = \frac{\mathfrak{v}}{(\mathfrak{v} + 1)(\mathfrak{v} + 2)(\mathfrak{v} + 3)(\mathfrak{w} + 1)^{\mathfrak{r}}}$$

در این صورت با فرض  $\hat{\mathfrak{v}} = \frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \hat{R}_{1,2}}{\partial \alpha} = \frac{\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{v}^{\mathfrak{r}}}{\hat{\alpha}(\hat{\mathfrak{v}} + 1)^{\mathfrak{r}}(\hat{\mathfrak{v}} + 2)^{\mathfrak{r}}(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} - 1)^{\mathfrak{r}}},$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{1,2}}{\partial \beta} =$$

$$\frac{\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} + 1}{\hat{\alpha}(\hat{\mathfrak{v}} + 1)^{\mathfrak{r}}(\hat{\mathfrak{v}} + 2)^{\mathfrak{r}}(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} - 1)^{\mathfrak{r}}}$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{2,3}}{\partial \alpha} = \frac{9\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} + 3\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 39\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{w}^{\mathfrak{r}}}{\hat{\alpha}(\hat{\mathfrak{v}} + 1)^{\mathfrak{r}}(\hat{\mathfrak{v}} + 2)^{\mathfrak{r}}(\hat{\mathfrak{v}} + 3)^{\mathfrak{r}}(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1)^{\mathfrak{r}}},$$

$$\frac{\partial \hat{R}_{2,3}}{\partial \beta} = \frac{6 - 9\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}} - 3\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} - 39\mathfrak{v}^{\mathfrak{r}}}{\hat{\alpha}(\hat{\mathfrak{v}} + 1)^{\mathfrak{r}}(\hat{\mathfrak{v}} + 2)^{\mathfrak{r}}(\hat{\mathfrak{v}} + 3)^{\mathfrak{r}}(\mathfrak{w}^{\mathfrak{r}} + 1)^{\mathfrak{r}}}$$

به دست می‌آید و واریانس مجانبی آن نیز به صورت زیر است.

$$V(\tilde{\beta}) = \frac{1.969467\beta^2}{m} \quad (10)$$

چون بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $R_{s,k}$  به کمک بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $\alpha$  و  $\beta$  به دست می‌آید. بنابر این بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌شود  $\lambda = 1$ . بعد از به دست آوردن  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$ ، با فرض  $\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$  و با توجه به رابطه (۴)، بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $R_{s,k}$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\tilde{R}_{s,k} = \tilde{\nu} \sum_{i=s}^k \frac{k!}{i!} \left[ \prod_{j=0}^{k-i+\tilde{\nu}} (k + \tilde{\nu} - j) \right]^{-1}$$

با توجه به روابط (۵)، (۹) و (۱۰) واریانس مجانبی  $\tilde{R}_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (1, 2), (2, 3)$  برابر است با:

$$V(\tilde{R}_{1,2}) = \frac{1.969467(\tilde{\nu}^2 + 1 + \tilde{\nu}^2 + \tilde{\nu})^2}{[(\tilde{\nu}+1)(\tilde{\nu}+2)(\tilde{\nu}-1)]^2} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right\}, V(\tilde{R}_{2,3}) = \frac{1.969467(9\tilde{\nu}^4 + 38\tilde{\nu}^3 + 39\tilde{\nu}^2 - 6\tilde{\nu})^2}{[(\tilde{\nu}+1)(\tilde{\nu}+2)(\tilde{\nu}+3)(\tilde{\nu}+1)]^2} \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right\}$$

فاصله اطمینان ۰/۹۵ برای  $R_{1,2}$  و  $R_{2,3}$  براساس بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای به صورت زیر است.

$$\tilde{R}_{1,2} \pm \frac{2.750619(\tilde{\nu}^2 + 1 + \tilde{\nu}^2 + \tilde{\nu})}{[(\tilde{\nu}+1)(\tilde{\nu}+2)(\tilde{\nu}-1)]^2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}, \tilde{R}_{2,3} \pm \frac{2.750619(9\tilde{\nu}^4 + 38\tilde{\nu}^3 + 39\tilde{\nu}^2 - 6\tilde{\nu})}{[(\tilde{\nu}+1)(\tilde{\nu}+2)(\tilde{\nu}+3)(\tilde{\nu}+1)]^2} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

### ۳. تحلیل داده‌ها

#### ۳-۱. مطالعه شبیه‌سازی

در این زیر بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو نتایجی برای کارایی  $R_{s,k}$  به دست می‌آوریم. بر اساس شیوه باتاچاریا و جانسون [۲]، از هر کدام از

$$p^* = 1 - e^{-(1-p)} \quad , \quad Z_k = -\exp\left(\frac{e^{\lambda U_k} - 1}{\lambda}\right)$$

$\alpha^*$  را یک برآورد صدکی تک مشاهده‌ای (دوبی [۲۴]) گویند. اگر  $p^*$  طوری به دست آورده شود که  $V(\alpha^*)$  مینیمم شود، آن‌گاه برآورد حاصل از جایگزاری  $p^*$  اپتیمم در رابطه (۷) را بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای گویند. با توجه به دوبی [۲۴]،  $\alpha^*$  دارای توزیع نرمال مجانبی با واریانس زیر است.

$$V(\alpha^*) = \frac{\alpha^* p^*}{n(1-p^*)[\log(1-p^*)] \left\{ \log[-\log(1-p^*)] \right\}^2} \quad (8)$$

اکنون  $p^*$  طوری تعیین می‌شود تا  $V(\alpha^*)$  مینیمم شود که به حل معادله

$$\log(1-p^*) \log[-\log(1-p^*)] + 2p \log[-\log(1-p^*)] + 2p^* = 0$$

منجر می‌شود و به روش تکرار نیوتن-رافسون،  $p^* = 0.1121$  به دست می‌آید که با جایگزاری آن در رابطه (۷)، بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $\alpha$  که با نماد  $\tilde{\alpha}$  نشان داده می‌شود به صورت

$$\tilde{\alpha} = \frac{0.1260798\lambda}{e^{\lambda U_k} - 1}$$

نتیجه می‌شود. همچنین با توجه به رابطه (۸)، واریانس مجانبی  $\tilde{\alpha}$  برابر است با:

$$V(\tilde{\alpha}) = \frac{1.969467\alpha^2}{n} \quad (9)$$

اگر  $W_k$  آماره ترتیبی  $k$ ام، صدک مرتبه  $p$ ام توزیع  $Gom(\beta, \lambda)$  باشد، آن‌گاه بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $\beta$  که با  $\tilde{\beta}$  نشان داده می‌شود به صورت

$$\tilde{\beta} = \frac{0.1260798\lambda}{e^{\lambda W_k} - 1}$$

آورده شده است. همچنین مقدار واقعی قابلیت اطمینان در مدل استرس مقاومت چند مولفه‌ای به ازای مقادیر متفاوت داده شده  $(\alpha, \beta)$  و به ازای  $(s, k) = (1, 2)$ ، برابر  $0.1333$ ،  $0.1093$ ،  $0.0832$ ،  $0.0555$ ،  $0.0351$ ،  $0.0236$ ،  $0.0167$  و به ازای  $(s, k) = (2, 3)$ ، برابر  $0.1523$ ،  $0.1431$ ،  $0.1279$ ،  $0.1042$ ،  $0.0791$ ،  $0.0608$  و  $0.0476$  می‌باشند. با توجه به این مقادیر، واضح است که در هر دو حالت  $(s, k)$ ، به ازای  $\alpha$  ثابت، با افزایش  $\beta$  مقدار واقعی  $R_{s,k}$  کاهش ولی به ازای  $\beta$  ثابت، با افزایش  $\alpha$ ، مقدار واقعی  $R_{s,k}$  افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش  $\lambda$ ، مقدار  $R_{s,k}$  نیز افزایش می‌یابد.

توزیع‌های متغیر مقاومت و متغیر استرس که به ترتیب دارای توزیع‌های  $Gom(\beta, \lambda)$  و  $Gom(\alpha, \lambda)$  می‌باشند به ازای مقادیر متفاوت  $(\alpha, \beta)$ ، مانند  $(3, 1.5)$ ،  $(2.5, 1.5)$ ،  $(2, 1.5)$ ،  $(1.5, 1.5)$ ،  $(1.5, 2)$ ،  $(1.5, 2.5)$  و  $(1.5, 3)$ ، نمونه تصادفی به حجم‌های  $15$ ،  $20$ ،  $25$ ،  $30$ ،  $35$ ،  $40$  تولید می‌کنیم. سپس برآورد ماکسیمم درستنمایی و بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (1, 2)$ ،  $(2, 3)$  به دست آورده می‌شود. میانگین اریبی و میانگین مربع خطا و میانگین طول فاصله اطمینان  $0.95$  برآورد‌های  $R_{s,k}$  براساس این  $3000$  نمونه، به ازای  $(s, k) = (1, 2)$  در جدول ۱ تا ۳ و به ازای  $(s, k) = (2, 3)$  نیز در جدول ۴ تا ۶

جدول ۱. میانگین اریبی برآوردهای  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (1, 2)$  و مقادیر متفاوت  $(\alpha, \beta)$

Method	$(n, m)$	$(3, 1.5)$	$(2.5, 1.5)$	$(2, 1.5)$	$(1.5, 1.5)$	$(1.5, 2)$	$(1.5, 2.5)$	$(1.5, 3)$
MLE	$(15, 15)$	0.1359	0.1129	0.0877	0.0608	0.0395	0.0277	0.0201
	$(20, 20)$	0.1368	0.1124	0.0863	0.0589	0.0267	0.0386	0.0188
	$(25, 25)$	0.1347	0.1114	0.0858	0.0584	0.0378	0.0256	0.0181
	$(30, 30)$	0.1345	0.1113	0.0856	0.0577	0.0377	0.0254	0.0180
	$(35, 35)$	0.1341	0.1112	0.0849	0.0573	0.0364	0.0249	0.0175
	$(40, 40)$	0.1338	0.1110	0.0842	0.0567	0.0363	0.0247	0.0172
BSPE	$(15, 15)$	0.1382	0.1154	0.0894	0.0634	0.0422	0.0299	0.0222
	$(20, 20)$	0.1379	0.1144	0.0891	0.0416	0.0617	0.0287	0.0203
	$(25, 25)$	0.1357	0.1129	0.0881	0.0599	0.0399	0.0271	0.0194
	$(30, 30)$	0.1352	0.1127	0.0871	0.0589	0.0391	0.0261	0.0190
	$(35, 35)$	0.1347	0.1122	0.0862	0.0585	0.0377	0.0260	0.0187
	$(40, 40)$	0.1345	0.1119	0.0857	0.0582	0.0376	0.0259	0.0183

جدول ۲. میانگین مربع خطای برآوردهای  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (1, 2)$  و مقادیر متفاوت  $(\alpha, \beta)$ 

Method	$(n, m)$	$(3, 1.5)$	$(2.5, 1.5)$	$(2, 1.5)$	$(1.5, 1.5)$	$(1.5, 2)$	$(1.5, 2.5)$	$(1.5, 3)$
MLE	$(15, 15)$	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۲۱
	$(20, 20)$	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۴
	$(25, 25)$	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۱۸	۰/۰۰۰۱۰
	$(30, 30)$	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۴۴	۰/۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۱۵	۰/۰۰۰۰۸
	$(35, 35)$	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۴۲	۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۰۰۱۲	۰/۰۰۰۰۷
	$(40, 40)$	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳۵	۰/۰۰۰۱۹	۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۰۶
BSPE	$(15, 15)$	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳۸
	$(20, 20)$	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۲۷
	$(25, 25)$	۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۲۰
	$(30, 30)$	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۱۵
	$(35, 35)$	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۰۳۸	۰/۰۰۰۲۱	۰/۰۰۰۱۴
	$(40, 40)$	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳۳	۰/۰۰۰۱۹	۰/۰۰۰۱۰

جدول ۳. میانگین طول فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآوردهای  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (1, 2)$  و مقادیر متفاوت  $(\alpha, \beta)$ 

Method	$(n, m)$	$(3, 1.5)$	$(2.5, 1.5)$	$(2, 1.5)$	$(1.5, 1.5)$	$(1.5, 2)$	$(1.5, 2.5)$	$(1.5, 3)$
MLE	$(15, 15)$	۰/۰۸۹۰	۰/۰۸۸۵	۰/۰۸۸۳	۰/۰۷۲۲	۰/۰۵۸۲	۰/۰۴۷۱	۰/۰۳۸۲
	$(20, 20)$	۰/۰۷۸۹	۰/۰۷۷۵	۰/۰۷۲۹	۰/۰۶۲۹	۰/۰۴۰۷	۰/۰۵۰۶	۰/۰۳۲۳
	$(25, 25)$	۰/۰۷۱۲	۰/۰۷۰۰	۰/۰۶۵۸	۰/۰۵۶۸	۰/۰۴۵۵	۰/۰۳۵۸	۰/۰۲۸۴
	$(30, 30)$	۰/۰۶۵۵	۰/۰۶۴۳	۰/۰۶۰۶	۰/۰۵۲۰	۰/۰۴۱۷	۰/۰۳۲۹	۰/۰۲۶۲
	$(35, 35)$	۰/۰۶۰۸	۰/۰۵۹۹	۰/۰۵۶۲	۰/۰۴۸۳	۰/۰۳۸۲	۰/۰۳۰۲	۰/۰۲۳۹
	$(40, 40)$	۰/۰۵۷۱	۰/۰۵۶۲	۰/۰۵۲۷	۰/۰۴۵۲	۰/۰۳۵۷	۰/۰۲۸۴	۰/۰۲۲۴
BSPE	$(15, 15)$	۰/۱۲۶۱	۰/۱۲۴۳	۰/۱۱۶۳	۰/۱۰۱۴	۰/۰۸۱۷	۰/۰۶۶۱	۰/۰۵۳۷
	$(20, 20)$	۰/۱۱۰۷	۰/۱۰۸۸	۰/۱۰۲۳	۰/۰۷۱۱	۰/۰۸۸۳	۰/۰۵۷۱	۰/۰۴۵۳
	$(25, 25)$	۰/۱۰۰۰	۰/۰۹۸۲	۰/۰۹۲۴	۰/۰۷۹۸	۰/۰۶۳۸	۰/۰۵۰۲	۰/۰۳۹۲
	$(30, 30)$	۰/۰۹۱۹	۰/۰۹۰۲	۰/۰۸۵۱	۰/۰۷۳۰	۰/۰۵۸۶	۰/۰۴۶۱	۰/۰۳۶۳
	$(35, 35)$	۰/۰۸۵۴	۰/۰۸۴۰	۰/۰۷۸۸	۰/۰۶۷۸	۰/۰۵۳۵	۰/۰۴۲۵	۰/۰۳۳۵
	$(40, 40)$	۰/۰۸۰۲	۰/۰۷۸۹	۰/۰۷۳۹	۰/۰۶۳۴	۰/۰۵۰۲	۰/۰۳۹۸	۰/۰۳۱۶

جدول ۴. میانگین اریبی برآوردهای  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (2, 3)$  و مقادیر متفاوت  $(\alpha, \beta)$ 

Method	$(n, m)$	$(3, 1.5)$	$(2.5, 1.5)$	$(2, 1.5)$	$(1.5, 1.5)$	$(1.5, 2)$	$(1.5, 2.5)$	$(1.5, 3)$
MLE	$(15, 15)$	۰/۰۱۴۱۱	۰/۰۱۳۲۳	۰/۰۱۱۸۹	۰/۰۰۹۷۵	۰/۰۰۷۵۶	۰/۰۰۵۸۴	۰/۰۰۴۵۴
	$(20, 20)$	۰/۰۱۴۲۳	۰/۰۱۳۳۸	۰/۰۱۱۹۷	۰/۰۰۹۸۰	۰/۰۰۷۵۰	۰/۰۰۵۸۰	۰/۰۰۴۴۳
	$(25, 25)$	۰/۰۱۴۳۳	۰/۰۱۳۴۰	۰/۰۱۲۰۲	۰/۰۰۹۸۲	۰/۰۰۷۴۷	۰/۰۰۵۷۹	۰/۰۰۴۴۲
	$(30, 30)$	۰/۰۱۴۴۰	۰/۰۱۳۴۹	۰/۰۱۲۱۳	۰/۰۰۹۸۶	۰/۰۰۷۴۲	۰/۰۰۵۷۲	۰/۰۰۴۴۰
	$(35, 35)$	۰/۰۱۴۴۵	۰/۰۱۳۵۱	۰/۰۱۲۱۴	۰/۰۰۹۸۷	۰/۰۰۷۴۰	۰/۰۰۵۶۹	۰/۰۰۴۳۸
	$(40, 40)$	۰/۰۱۴۴۹	۰/۰۱۳۶۳	۰/۰۱۲۳۹	۰/۰۱۱۲۰	۰/۰۰۷۳۷	۰/۰۰۵۶۰	۰/۰۰۴۳۶

BSPE	(۱۵,۱۵)	۰/۰۱۳۷۶	۰/۰۱۲۹۵	۰/۰۱۱۶۷	۰/۰۰۹۷۲	۰/۰۰۷۶۴	۰/۰۰۵۸۶	۰/۰۰۴۷۶
	(۲۰,۲۰)	۰/۰۱۳۹۲	۰/۰۱۳۱۱	۰/۰۱۱۷۶	۰/۰۰۹۷۴	۰/۰۰۷۵۳	۰/۰۰۵۸۰	۰/۰۰۴۵۷
	(۲۵,۲۵)	۰/۰۱۴۰۸	۰/۰۱۳۲۷	۰/۰۱۱۸۹	۰/۰۰۹۸۰	۰/۰۰۷۴۹	۰/۰۰۵۹۰	۰/۰۰۴۵۵
	(۳۰,۳۰)	۰/۰۱۴۲۳	۰/۰۱۳۳۵	۰/۰۱۲۰۶	۰/۰۰۹۸۲	۰/۰۰۷۴۵	۰/۰۰۵۸۳	۰/۰۰۴۴۸
	(۳۵,۳۵)	۰/۰۱۴۲۸	۰/۰۱۳۳۶	۰/۰۱۲۰۸	۰/۰۰۹۸۳	۰/۰۰۷۴۲	۰/۰۰۵۷۳	۰/۰۰۴۴۱
	(۴۰,۴۰)	۰/۰۱۴۳۰	۰/۰۱۳۵۰	۰/۰۱۲۱۱	۰/۰۰۹۹۷	۰/۰۰۷۴۰	۰/۰۰۵۷۰	۰/۰۰۴۳۹

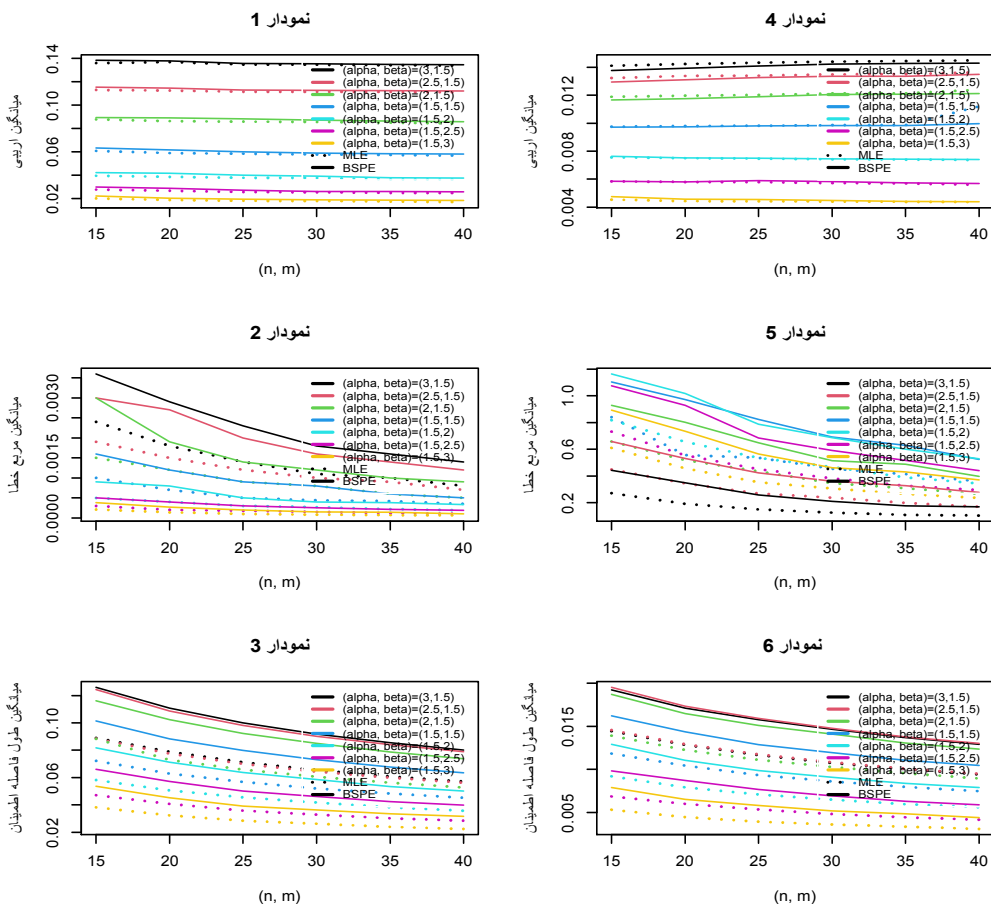
جدول ۵. میانگین مربع خطای برآوردهای  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (۲, ۳)$  و مقادیر متفاوت  $(\alpha, \beta)$  بر حسب  $۱۰^{-\alpha}$

Method	$(n, m)$	(۳,۱.۵)	(۲.۵,۱.۵)	(۲,۱.۵)	(۱.۵,۱.۵)	(۱.۵,۲)	(۱.۵,۲.۵)	(۱.۵,۳)
MLE	(۱۵,۱۵)	۰/۲۷۱۲	۰/۴۴۸۴	۰/۶۵۷۴	۰/۸۳۹۹	۰/۸۱۷۳	۰/۷۳۱۴	۰/۶۰۹۸
	(۲۰,۲۰)	۰/۱۹۲۰	۰/۳۴۴۳	۰/۵۱۸۶	۰/۵۵۶۵	۰/۶۵۵۹	۰/۵۵۴۸	۰/۴۵۶۸
	(۲۵,۲۵)	۰/۱۴۹۹	۰/۲۶۸۶	۰/۴۳۴۶	۰/۵۳۵۷	۰/۵۳۵۲	۰/۴۵۰۶	۰/۳۵۳۰
	(۳۰,۳۰)	۰/۱۲۶۰	۰/۲۳۷۵	۰/۳۴۶۰	۰/۴۵۴۲	۰/۴۶۶۹	۰/۳۸۲۱	۰/۳۰۶۲
	(۳۵,۳۵)	۰/۱۰۸۹	۰/۱۹۸۸	۰/۳۰۸۱	۰/۴۱۳۹	۰/۳۸۹۱	۰/۳۲۶۹	۰/۲۶۵۴
	(۴۰,۴۰)	۰/۱۰۴۲	۰/۱۶۹۲	۰/۲۶۵۷	۰/۳۵۸۹	۰/۳۴۳۶	۰/۲۹۴۹	۰/۲۳۶۲
BSPE	(۱۵,۱۵)	۰/۴۴۲۲	۰/۶۵۸۳	۰/۹۲۷۴	۱/۱۰۲	۱/۱۶۴	۱/۰۷۴	۰/۸۹۲۹
	(۲۰,۲۰)	۰/۳۴۷۹	۰/۵۳۰۴	۰/۸۰۲۲	۰/۹۷۱۴	۱/۰۱۸	۰/۹۲۷۲	۰/۷۳۴۳
	(۲۵,۲۵)	۰/۲۵۸۶	۰/۴۲۳۵	۰/۶۴۹۳	۰/۸۲۲۶	۰/۷۸۶۸	۰/۶۸۵۳	۰/۵۶۵۲
	(۳۰,۳۰)	۰/۲۰۹۱	۰/۳۶۰۴	۰/۵۱۳۷	۰/۶۹۲۱	۰/۶۸۶۱	۰/۵۹۱۴	۰/۴۶۰۹
	(۳۵,۳۵)	۰/۱۷۷۶	۰/۳۲۷۸	۰/۴۸۷۶	۰/۶۲۹۳	۰/۶۰۰۹	۰/۵۱۶۳	۰/۴۲۹۶
	(۴۰,۴۰)	۰/۱۶۹۰	۰/۲۷۵۹	۰/۳۹۷۰	۰/۵۲۲۸	۰/۵۲۷۸	۰/۴۴۰۷	۰/۳۶۹۷

جدول ۶. میانگین طول فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآوردهای  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (۲, ۳)$  و مقادیر متفاوت  $(\alpha, \beta)$

Method	$(n, m)$	(۳,۱.۵)	(۲.۵,۱.۵)	(۲,۱.۵)	(۱.۵,۱.۵)	(۱.۵,۲)	(۱.۵,۲.۵)	(۱.۵,۳)
MLE	(۱۵,۱۵)	۰/۰۱۴۴۳	۰/۰۱۴۵۶	۰/۰۱۳۹۱	۰/۰۱۱۸۴	۰/۰۰۹۲۰	۰/۰۰۶۸۶	۰/۰۰۵۳۲
	(۲۰,۲۰)	۰/۰۱۲۸۵	۰/۰۱۲۹۳	۰/۰۱۲۲۶	۰/۰۱۰۴۴	۰/۰۰۷۹۲	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۴۴۶
	(۲۵,۲۵)	۰/۰۱۱۶۶	۰/۰۱۱۷۵	۰/۰۱۱۱۱	۰/۰۰۹۳۴	۰/۰۰۷۰۹	۰/۰۰۵۳۵	۰/۰۰۳۹۳
	(۳۰,۳۰)	۰/۰۱۰۷۴	۰/۰۱۰۸۴	۰/۰۱۰۲۸	۰/۰۰۸۶۱	۰/۰۰۶۴۹	۰/۰۰۴۸۲	۰/۰۰۳۶۱
	(۳۵,۳۵)	۰/۰۱۰۰۳	۰/۰۱۰۰۸	۰/۰۰۹۵۵	۰/۰۰۷۹۷	۰/۰۰۵۹۶	۰/۰۰۴۴۴	۰/۰۰۳۳۵
	(۴۰,۴۰)	۰/۰۰۹۴۲	۰/۰۰۹۵۱	۰/۰۰۸۹۵	۰/۰۰۷۴۷	۰/۰۰۵۶۱	۰/۰۰۴۱۶	۰/۰۰۳۰۹
BSPE	(۱۵,۱۵)	۰/۰۱۹۲۳	۰/۰۱۹۵۴	۰/۰۱۸۷۰	۰/۰۱۶۲۴	۰/۰۱۲۹۲	۰/۰۰۹۸۳	۰/۰۰۷۹۱
	(۲۰,۲۰)	۰/۰۱۷۱۰	۰/۰۱۷۳۲	۰/۰۱۶۴۹	۰/۰۱۴۳۸	۰/۰۱۱۰۷	۰/۰۰۸۷۱	۰/۰۰۶۵۳
	(۲۵,۲۵)	۰/۰۱۵۷۸	۰/۰۱۵۹۲	۰/۰۱۵۱۱	۰/۰۱۲۸۶	۰/۰۰۹۸۸	۰/۰۰۷۶۸	۰/۰۰۵۸۲
	(۳۰,۳۰)	۰/۰۱۴۶۵	۰/۰۱۴۷۶	۰/۰۱۴۱۲	۰/۰۱۱۹۶	۰/۰۰۹۰۹	۰/۰۰۶۹۲	۰/۰۰۵۱۹
	(۳۵,۳۵)	۰/۰۱۳۶۹	۰/۰۱۳۷۵	۰/۰۱۳۰۵	۰/۰۱۱۰۷	۰/۰۰۸۳۹	۰/۰۰۶۲۸	۰/۰۰۴۸۵
	(۴۰,۴۰)	۰/۰۱۲۹۰	۰/۰۱۳۰۲	۰/۰۱۲۳۵	۰/۰۱۰۴۵	۰/۰۰۷۸۹	۰/۰۰۵۸۹	۰/۰۰۴۴۲





برآورد، با افزایش حجم نمونه افزایش و با افزایش  $\nu$  کاهش می‌یابد. هرچند که میانگین اریبی بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای  $R_{\nu,3}$  نسبت به میانگین اریبی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی آن کوچک‌تر است، اما کوچک‌تر بودن میانگین مربع خطای برآورد  $R_{\nu,3}$  در حالت روش برآورد درست‌نمایی ماکسیمم (جدول ۵) دلیل بر کاراتر بودن روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R_{\nu,3}$  نسبت به روش دیگر برآورد آن است که با توجه به جدول ۶، کوچک‌تر بودن میانگین طول فاصله اطمینان  $0.95$  برآورد  $R_{\nu,3}$  در روش برآورد درست‌نمایی، گواهی بر این مطلب است.

جدول‌های ۵ و ۶ بیان‌کننده آن است که میانگین مربع خطای برآورد  $R_{\nu,3}$  در روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی و میانگین طول فاصله اطمینان  $0.95$

با مطالعه نتایج شبیه‌سازی در می‌یابیم که: (۱) جدول‌های ۱ تا ۳ بیان‌کننده آن است که میانگین اریبی، میانگین مربع خطا و میانگین طول فاصله اطمینان برآورد  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (1, 2)$  در هر دو روش برآورد، با افزایش  $\nu$  کاهش می‌یابد. همچنین این معیارها با افزایش حجم نمونه، کاهش می‌یابد. از طرفی کوچک‌تر بودن میانگین اریبی، میانگین مربع خطا و میانگین طول فاصله اطمینان برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $R_{\nu,3}$  نسبت به روش بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای آن، دلیل بر کاراتر بودن روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی است. نتایج در نمودار ۱ تا ۳ رسم شده است.

جدول ۴ بیان‌کننده آن است که میانگین اریبی برآورد  $R_{s,k}$  به ازای  $(s, k) = (2, 3)$  در هر دو روش

مجموعه داده‌ها که از هینکلی [۲۵] گرفته شده است، شامل ۳۰ مقدار بارش باران (بر حسب اینچ) در ماه مارس در شهر مینیاپولیس سنت‌پل است. دومین مجموعه داده‌ها مربوط به طول عمر ۳۰ دستگاه از یک نوع مشخص می‌باشد که از سیلویا [۲۶] گرفته شده است. هر دو مجموعه داده‌ها در جدول ۷ آورده شده است. قبل از تحلیل داده‌ها ابتدا با استفاده از آماره آزمون نیکویی برازش کولموگوروف-اسمیرنوف نشان می‌دهیم که توزیع گومپرتز به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود. با توجه به جدول ۸ که شامل برآورد ماکسیمم درستنمایی پارمترهای شکل و اسکالر توزیع گومپرتز و مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با  $p$ -مقدار مربوطه می‌باشد، نتیجه گرفته می‌شود که توزیع گومپرتز به خوبی به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود.

به کمک هر دو مجموعه داده‌ها، برآورد ماکسیمم درستنماییو بهترین برآورد صدکی تک‌مشاهده‌ای پارمترهای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $R_{s,k}$  و فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآورد  $R_{s,k}$  به ازای  $(s,k) = (1,2), (2,3)$  محاسبه شده و در جدول ۹ داده شده است.

برآورد آن در هر دو روش برآورد، در حالت  $1 \leq v$  افزایشی و در حالت  $v \geq 1$  کاهش می‌خواهند بود. اما میانگین مربع خطای برآورد  $R_{v,p}$  در روش بهترین برآورد صدکی تک‌مشاهده‌ای در حالت  $\frac{v}{3} \leq \frac{v}{3}$  افزایشی و در غیر این صورت کاهش خواهد بود. نتایج در نمودارهای ۵ و ۶ رسم شده است. (۴) با توجه به کوچک‌تر بودن میانگین اریبی، میانگین مربع خطا و میانگین طول فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآورد ماکسیمم درستنمایی  $R_{s,k}$  در هر دو حالت  $(s,k) = (1,2), (2,3)$  نسبت به بهترین برآورد صدکی تک‌مشاهده‌ای آن که با مقایسه جدول‌های ۱ تا ۳ با جدول‌های ۴ تا ۶ حاصل می‌شود، کاراتر بودن روش برآورد ماکسیمم درستنمایی ثابت می‌شود. همه نتایج در نمودارهای ۱ تا ۶ به تصویر کشیده شده است.

### ۲-۳. داده‌های واقعی

در این زیر بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی برای تحلیل روش‌های برآورد  $R_{s,k}$  استفاده می‌شود. اولین

جدول ۷. مجموعه داده‌های اول و دوم

۱/۶۲	۰/۵۲	۲/۱	۱/۵۱	۳/۰۹	۳	۲/۲	۳/۳۷	۱/۴۳	۰/۴۷	۱/۲	۱/۹۵	۱/۲	۰/۸۱	۱/۷۴	۰/۷۷	مجموعه داده‌های اول
۲/۰۵	۰/۹	۱/۸۹	۰/۹۶	۲/۴۸	۴/۵۷	۱/۳۵	۱/۱۸	۱/۸۷	۲/۸۱	۰/۸۱	۰/۵۹	۰/۳۲	۱/۳۱			
۹/۲۶۶۲	۸/۲۶۰۴	۷/۲۳۱۶	۷/۱۶۴۵	۶/۳۳۴۸	۵/۸۸۰۸	۵/۱۷۴۱	۴/۶۳۰۷	۰/۴۰۶۷	۰/۰۵	۰/۰۰۹۴	مجموعه داده‌های دوم					
۱۱/۵۲۸۴	۱۱/۳۲۵	۱۱/۰۷۶	۱۰/۴۷۹۱	۱۰/۴۰۷۷	۱۰/۰۱۹۲	۹/۹۳۴۶	۹/۸۷۸۳	۹/۵۲۲۳	۹/۳۸۱۲							
۱۳/۸۵۳	۱۳/۴۶۱۵	۱۲/۸۰۴۹	۱۲/۵۳۸۱	۱۲/۳۵۴۹	۱۲/۱۸۳۵	۱۲/۰۷۴	۱۲/۰۲۹۴	۱۱/۹۲۲۶								

جدول ۸. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارمترهای توزیع گومپرتز و آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با  $p$ -مقدار مربوطه برای مجموعه‌های اول و دوم

مقدار $p$	آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف	برآورد ماکسیمم درستنمایی $(\alpha, \lambda)$	مجموعه داده‌ها
۰/۸۲۳	۰/۱۱۴۹	(۰/۳۰۳۵۲۵۴, ۰/۴۹۱۳۹۳۷)	اول
۰/۷۰۸	۰/۱۲۳۰	(۰/۳۴۹۹۲۴۵, ۰/۰۰۸۶۷۰۹)	دوم

جدول ۹. برآوردهای پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $R_{s,k}$  و فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآورد  $R_{s,k}$ 

روش	فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآورد $R_{s,k}$	برآورد $R_{s,k}$	$(s, k)$	برآورد $(\alpha, \beta)$
MLE	(۰/۰۰۳۰۴۳۰۶/۰۶۳۶۸۱۸)	۰/۰۴۷۱۴۶۲	(۱, ۲)	(۰/۳۰۳۵۲۵۴, ۰/۳۴۹۹۲۴۵)
	(۰/۰۰۰۵۳۵۹۰/۰۱۲۹۸۶۹)	۰/۰۰۹۱۷۲۹	(۲, ۳)	
BSPE	(۰/۰۲۱۵۵۴۹, ۰/۱۱۵۳۷۷۰)	۰/۰۷۳۴۶۰۱	(۱, ۲)	(۰/۰۰۶۶۳۲۲, ۰/۰۰۵۴۵۶۷)
	(۰/۰۴۱۲۳۴۲, ۰/۱۱۳۳۴۵۶)	۰/۱۱۰۲۱۱۴	(۲, ۳)	

### تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی مقاله نهایت تقدیر و تشکر را دارند.

با توجه به نتایج جدول ۹، چون طول فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآورد  $R_{s,k}$  در روش برآورد ماکسیمم درستنمایی نسبت به روش بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای در هر دو حالت  $(s, k) = (1, 2), (2, 3)$  کوتاه‌تر است. بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی  $R_{s,k}$  کاراتر است. همچنین چون طول فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآورد  $R_{2,3}$  نسبت به طول فاصله اطمینان ۰/۹۵ برآورد  $R_{1,2}$  کوتاه‌تر است. نتیجه گرفته می‌شود که کارایی سیستم سه مولفه‌ای که حداقل دو مولفه آن فعال است، بیشتر از کارایی سیستم دو مولفه‌ای است که حداقل یک مولفه آن فعال است.

### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، برآورد قابلیت اطمینان مدل استرس-مقاومت چند مولفه‌ای، وقتی که متغیرهای استرس و مقاومت دارای توزیع‌های گومپرتز با پارامتر اسکالر یکسان و پارامتر شکل متفاوت هستند، با دو روش ماکسیمم درستنمایی و روش بهترین برآورد صدکی تک مشاهده‌ای به دست آورده شد. با محاسبه میانگین مربع خطا و میانگین طول فاصله اطمینان مجانبی ۰/۹۵ برآورد قابلیت اطمینان، در دو مجموعه داده‌های واقعی و نمونه‌های شبیه‌سازی شده به روش مونت‌کارلو، نشان داده شد که برآورد قابلیت به روش ماکسیمم درستنمایی کارایی بهتری دارد. همچنین، نشان داده شد که سیستم سه مولفه‌ای با حداقل دو مولفه فعال بهتر از سیستم دو مولفه‌ای با حداقل یک مولفه فعال است.

## فهرست منابع

- [9] Nadar, M, Kızılaslan. F and Papadopoulos, A. (2014). Classical and Bayesian estimation of  $P(Y < X)$  for Kumaraswamy's distribution, *Statist. Computat. Simulat.*, **84**, 1505-1529.
- [10] Raqab, M.Z. and Kundu, D. (2005). Comparison of different estimators of  $P(Y < X)$  for a scaled Burr type X distribution, *Communications in Statistics -Simulation and Computation*, **34**(2), 465-483.
- [11] Pandey, M. and Borhan U, M. d. (1985). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model following Burr distribution, *Proceedings of the First Asian congress on Quality and Reliability*, New Delhi, India, 307-312.
- [12] Heidari, K.F., Deiri, E. & Jamkhaneh, E.B (2021). Using the best two-observational percentile and maximum likelihood methods in a multicomponent stress-strength system to reliability estimation of inverse Weibull distribution. *Life Cycle Reliab Saf Eng.* <https://doi.org/10.1007/s41872-021-00166-z>.
- [13] Eryilmaz, S and Iscioglu, F. (2011). Reliability evaluation for a multi-state system under stress-strength setup, *Commun. Statist. Theory Methods*, **40**, 547-558.
- [14] Pak, A, Khoolenjani. N. B and Khorshidian, K.(2009). Estimation of system reliability under bivariate Rayleigh distribution, *Econ. Quality Control*, **24**, 143-151.
- [15] Rao, G.S. (2012). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on generalized exponential distribution, *Colombian Journal of Statistics*, **35** (1), 67-76.
- [1] Gompertz, B. (1825). On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on the New Mode of Determining the Value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society American*, **115**, 513-580.
- [2] Bhattacharyya, G.K. and Johnson, R.A. (1974). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model, *JASA*, **69**, 966-970.
- [3] Saraçoğlu, B., Kaya, M. F and Abd-Elfattah, A. M. (2009). Comparison of estimators for stress-strength reliability in the Gompertz case, *Hacettepe. Math Statist*, **38**, 339-349.
- [4] Al-Mutairi, D. K., Gitany, M. E. and Kundu, D. (2013). Inferences on Stress-strength reliability from Lindley distribution, *Communications in Statistics- Theory and Methods*, **42**(8), 1443-1463.
- [5] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, *SORT*, **35**(2), 103-124.
- [6] Awad, M. and Gharraf, K. (1986). Estimation of  $P(Y < X)$  in Burr case: A comparative study, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **15**, 389-403.
- [7] Davarzani, N. Haghghi, F and Parsian, A. (2009). Estimation of  $P(X < Y)$  for a Bivariate Weibull distribution, *Appl. Probability Statist*, **4**, 227-238.
- [8] Downtown, F. (1973). The estimation of  $P(Y < X)$  in the normal case, *Technometrics*, **15**, 551-558.

[16] Rao, G.S., Aslam, M. and Aril, O. H. (2017). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on exponentiated Weibull distribution, Communications Statistics Simulation and Computation, **46** (15), 7495-7502.

[17] Rao, G.S. and Kantam, R.R.L. (2010). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model: log-logistic distribution, Electronic Journal of Applied Statistical Analysis, **3** (2), 75-84.

[18] Travadi, R. J. and Ratani, R.T. (1990). On estimation of reliability function for inverse Gaussian distribution with known coefficient of variation, IAPQR Transactions, **5**, 29-37.

[19] Kantam, R.R.L. and Rao G.S. (2002). Log-logistic distribution: Modified Maximum likelihood estimation, Gujarat Statistical Review, **29** (1-2), 25-36.

[20] Rao, G.S. (2012). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on Rayleigh distribution, ProbStat Forum, **5**, 150-161.

[21] Alizadeh, M., Bagheri, S. F. and Khaleghy Moghaddam, M. (2013). Efficient estimation of the density and cumulative distribution function of the generalized Rayleigh Distribution, Journal Statistical Research of Iran, **10**(1), 1-22.

[22] Bagheri, S. F., Alizadeh, M., Baloui Jamkhaneh, E. and Nadarajah, S. (2014). Evaluation and comparison of estimations in the generalized exponential-Poisson distribution, Journal of Statistical Computation and Simulation, **84** (11), 2345-2360.

