

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# یک رویکرد محاسباتی کارآمد توسط ماتریس عملیاتی توابع ترکیبی برای حل نوعی از معادلات انتگرال دیفرانسیلی با مشتقات جزئی

یاسر رستمی\*

گروه ریاضی، واحد ملارد، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۲۳

## چکیده

در مقاله حاضر، روش جدیدی برای حل تقریبی معادلات انتگرال دیفرانسیلی با مشتقات جزئی دو بعدی ولترا - فردهلم با شرایط اولیه با استفاده از ترکیب چند جمله‌های برنشتاین دو بعدی و توابع بلوک پالس ارائه شده است. برای این منظور، ماتریس عملیاتی انتگرال و مشتق و انتگرال ضرب خارجی معرفی می‌شود که از توابع ترکیبی است. استفاده از این ماتریس‌های عملیاتی ساختار محاسباتی مورد استفاده برای مجموعه‌ای از معادلات جبری را برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل جزئی بطور قابل توجهی ساده می‌کند. تجزیه و تحلیل همگرایی و برخی از نتایج عددی نیز برای نشان دادن اثربخشی و صحت روش ارائه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** چند جمله‌ای برنشتاین دو بعدی؛ توابع بلوک پالس؛ معادلات دیفرانسیل انتگرال دیفرانسیل ولترا - فردهلم با مشتقات جزئی؛ ماتریس عملیاتی.

## ۱. مقدمه

معادلات انتگرال دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PIDE) در بسیاری از زمینه‌های مختلف علوم فیزیک و مهندسی کاربرد دارند مانند سیالات [۴]، برق [۵]، دینامیک [۶]، فیزیک پلاسما [۷]، امور مالی [۸]، مواد بیولوژیکی [۹] و غیره. در سال‌های اخیر راه حل عددی این کلاس از معادلات مورد توجه محققان قرار گرفته است. روش‌های عددی متنوعی برای حل چندین نوع از معادلات (PID) مانند ماتریس‌های عملیاتی [۱]، تفاضلات محدود [۱۰]، روش گالرکین [۱۱] و موجک لژاندر و برنولی [۱۲-۱۳] می‌باشند.

هدف اصلی این مقاله بدست آوردن یک جواب تقریبی برای معادلات انتگرال دیفرانسیل غیر خطی ولترا - فردهلم با مشتقات جزئی دو بعدی (2D-NVFPIDES) از فرم زیر:

$$v_y + v_{xx}(x, y) = v(x, y) + \mu_1 \int_0^x \int_0^y K_1(x, y, \eta, \xi) H_1(v(\eta, \xi)) d\eta d\xi + \mu_2 \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, y, \eta, \xi) H_2(v(\eta, \xi)) d\eta d\xi + f(x, y), \quad (1)$$

با شرط اولیه  $v(x, 0) = v_0(x)$  است. به طوریکه  $v(x, y)$  تابع مجهول حقیقی در بازه  $\Omega = ([0, 1] \times [0, 1])$  است و پارامترهای  $\mu_1, \mu_2$  و توابع  $f, K_1, K_2$  معلوم می‌باشند و  $(x, y) \in \Omega, 0 \leq \eta \leq x, 0 \leq \xi \leq y$  به منظور تضمین وجود و یکتایی جواب  $v \in C(\Omega)$  فرض می‌کنیم توابع  $v(x, y)$  و  $f(x, y)$  به اندازه کافی هموار باشند. توابع  $H_1, H_2$  عملگر غیر خطی هستند.

رویکرد پیشنهادی برای حل این مشکل استفاده از تعدادی توابع پایه‌ای می‌باشد که از خواص توابع متعامد بلوک پالس و چند جمله‌ای متعامد یک‌به‌برنشتاین برای تبدیل معادله غیرخطی انتگرال

دیفرانسیل جزئی به معادلات جبری قابل حل استفاده می‌شود. همچنین ماتریس عملیاتی حاصل انتگرال و ادغام آنها از ترکیب چند جمله‌ای دو بعدی برنشتاین و توابع بلوک پالس (2D-HBB) ارائه شده است، بدین معنی که این روش می‌تواند راه حل‌های عددی بسیار دقیقی در مقایسه با تابع متعامد ثابت برای حل معادلات دو بعدی معادلات انتگرال دیفرانسیل جزئی ایجاد کند.

در بخش ۲ به اختصار به چند جمله‌های برنشتاین و ویژگی‌های توابع بلوک پالس و ترکیب توابع می‌پردازیم. برای حل معادلات 2D-NVFPID در بخش ۳، الگوریتم‌های عددی را با ماتریس عملیاتی توسعه می‌دهیم. در بخش ۴، تحلیل همگرایی روش پیشنهادی را مورد بحث قرار می‌دهیم. سرانجام، در بخش ۵، نتایج عددی برای تایید صحت و کارایی روش پیشنهادی بیان می‌شود. این مقاله با نتیجه گیری به پایان می‌رسد.

## ۲. ترکیب چندجمله‌ای برنشتاین و توابع بلوک

## پالس

در این بخش برخی از تعاریف اولیه را ارائه می‌دهیم که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

**تعریف ۱:** چند جمله‌ای‌های برنشتاین درجه  $N$  به شرح زیر است [۲]:

$$B_{Nn}(x) = \binom{N}{n} x^n (1-x)^{N-n}, n=0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

درحالی‌که  $B_{Nn}(x)$  روی بازه  $[0, 1]$  تعریف می‌شود و  $(N + 1)$  چندجمله‌ای پایه برنشتاین از درجه  $N$  وجود دارد.

## تعریف ۲: توابع بلوک پالس دوبعدی (2D-BPFs)

روی بازه  $(x, y) \in [0, T_1] \times [0, T_2]$  به صورت زیر

$$\psi_{ijnm}(x, y) = \begin{cases} B_{nm}(N_1x - i + 1, N_2y - j + 1) & \frac{i-1}{N_1} \leq x < \frac{i}{N_1}, (V) \\ \frac{j-1}{N_2} \leq y < \frac{j}{N_2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$b_{ij}(x, y) = \begin{cases} 1 & (i-1)h_1 \leq x < ih_1, (j-1)h_2 \leq y < jh_2 \quad (3) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

تعریف می‌شوند [۳]:

در حالیکه  $i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2$  مقادیر ثابت  $N_1, N_2$  و همچنین در نظر می‌گیریم  $b_i$  و  $h_1 = T_1 / N_1, h_2 = T_2 / N_2$  برابر  $i$  امین تابع بلوک پالس می‌باشد. در این مقاله فرض می‌کنیم  $T_1 = T_2 = 1$ . BPFها روی بازه  $[0, 1)$  چندین ویژگی دارند که از مهمترین این خواص می‌توان به ناسازگاری، متعامد و کامل بودن اشاره کرد. خاصیت ناسازگاری را برای  $i, j = 1, 2, \dots, n$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$b_{i_1 j_1}(x, y) b_{i_2 j_2}(x, y) = \begin{cases} b_{i_1 j_1}(x, y) & i_1 = i_2, j_1 = j_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

ویژگی متعامد بودن نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_0^1 \int_0^1 b_{i_1 j_1}(x, y) b_{i_2 j_2}(x, y) dx dy = \begin{cases} 1 & i_1 = i_2, j_1 = j_2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

خاصیت کامل بودن به طوری است که برای هر  $g(x, y) \in \Omega$  وقتی  $N_1, N_2$  به بینهایت میل کند اتحاد پارسوال برقرار خواهد بود. بنابراین هر تابع  $g(x, y)$  که روی بازه  $([0, 1) \times [0, 1))$  مربع انتگرال پذیر است می‌تواند به شکل بسط محدود از BPFها نوشته شود:

$$g(x, y) \square \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} g_{ij} b_{ij}(x, y) \quad (6)$$

**تعریف ۳:** ترکیب چند جمله‌ای‌های دوبعدی برنشتاین و توابع بلوک پالس به شکل زیر تعریف می‌شوند.

برای 2D-HBB که مجموعه توابع  $i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2, n = 0, 1, \dots, N_1 - 1$

و  $m = 0, 1, \dots, N_2 - 1$  متعامد هستند در حالیکه  $i, j$  مرتبه توابع بلوک پالس و  $n, m$  مرتبه چندجمله‌ای برنشتاین می‌باشند.

### ۱.۲. تقریب توابع

در این قسمت تقریب توابع دلخواه  $g(x, y) \in L^2(\Omega)$  را با استفاده 2D-HBB بیان می‌کنیم [۱۴]:

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} g_{ijnm} \psi_{ijnm}(x, y) \quad (A)$$

$$\square \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2-1} g_{ijnm} \psi_{ijnm}(x, y) = G^T \Psi(x, y),$$

در حالی که  $G, \Psi$  بردارهایی از مرتبه  $1 \times (N_1^2 N_2^2)$  با مولفه‌ای زیر هستند:

$$\Psi(x, y) = [\psi_{1010}(x, y), \dots, \psi_{101(N_2-1)}(x, y), \psi_{1110}(x, y), \dots, \psi_{1(N_1-1)1(N_2-1)}(x, y), \dots] \quad (9)$$

$$G = [g_{1010}, \dots, g_{101(N_2-1)}, g_{1110}, \dots, g_{1(N_1-1)1(N_2-1)}, \dots, g_{1(N_1-1)2(N_2-1)}, \dots, g_{N_1(N_1-1)N_2(N_2-1)}]^T \quad (10)$$

و ضرایب مجهول  $g_{ijnm}$  برای  $(i/N_1, j/N_2)$  به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$L = \frac{1}{N_1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{N_2-1} & \frac{1}{N_2-1} & \dots & \frac{1}{N_2-1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{N_2-1} & \dots & \frac{1}{N_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N_2-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$W = \frac{1}{N_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

که  $W$  ماتریس عملیاتی انتگرال از چند جمله‌ای برنشتاین روی بازه  $[i-1/N_1, i/N_1]$  است. همچنین ماتریس عملیاتی انتگرال 2D-HBB را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^y \Psi(\eta, \xi) d\eta d\xi &= \int_0^x \int_0^y \Psi(\eta) \otimes \Psi(\xi) d\eta d\xi \\ &= \left( \int_0^x \Psi(\eta) d\eta \right) \otimes \left( \int_0^y \Psi(\xi) d\xi \right) = Q\Psi(x) \otimes Q\Psi(y) \quad (۱۸) \\ &= (Q \otimes Q)(\Psi(x) \otimes \Psi(y)) = P\Psi(x, y), \end{aligned}$$

که  $P = Q \otimes Q$  ماتریسی از مرتبه  $(N_1 N_2)^2 \times (N_1 N_2)^2$  می‌باشد.

### ۳.۲. ماتریس عملیاتی مشتق

ما یک روش جدید برای محاسبه ماتریس عملیاتی مشتق برای ترکیب توابع را معرفی می‌کنیم. مشتقات بردار  $\Psi(x, y)$  تعریف شده در (۹) را می‌توان به شکل زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (\Psi(x) \otimes \Psi(y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) \otimes \Psi(y) \quad (۱۹) \\ &= (D \otimes I)(\Psi(x) \otimes \Psi(y)) = D_x \Psi(x, y) \end{aligned}$$

که داریم  $D_x = D \otimes I$  و

$$\begin{aligned} g_{injm} &= \frac{\langle g(x, y), \psi_{injm}(x, y) \rangle}{\langle \psi_{injm}(x, y), \psi_{injm}(x, y) \rangle} \quad (۱۱) \\ &= \frac{1}{N_1^n N_2^m n! m!} \left( \frac{\partial^{n+m} g(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \right) \end{aligned}$$

و همچنین تابع  $K(x, y, \eta, \xi)$  در فضای  $L^2(\Omega \times \Omega), 0 \leq x, y, \eta, \xi < 1$  را می‌توان به صورت زیر تقریب بزینیم:

$$\begin{aligned} K(x, y, \eta, \xi) &= \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{p=1}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2} \sum_{r=0}^{N_2-1} k_{ijmpqr} \psi_{ijnm}(x, y) \psi_{pqrl}(\eta, \xi) \quad (۱۲) \\ &= \Psi^T(x, y) K \Psi(\eta, \xi) \end{aligned}$$

$$k_{ijmpqr} = \frac{\langle \psi_{ijnm}(x, y), \langle k(x, y, \eta, \xi), \psi_{pqrl}(\eta, \xi) \rangle \rangle}{\langle \psi_{ijnm}(x, y), \psi_{ijnm}(x, y) \rangle \langle \psi_{pqrl}(\eta, \xi), \psi_{pqrl}(\eta, \xi) \rangle} \quad (۱۳)$$

### ۲.۲. ماتریس عملیاتی انتگرال

انتگرال بردار  $\Psi(x, y)$  در معادله (۹) را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^y \Psi(x, \sigma) d\sigma &= \int_0^y \Psi(x) \otimes \Psi(\sigma) d\sigma \\ &= \Psi(x) \otimes \int_0^y \Psi(\sigma) d\sigma = \quad (۱۴) \\ &= (I \otimes Q_y)(\Psi(x) \otimes \Psi(\sigma)) = Q_y \Psi(x, y), \end{aligned}$$

به طوریکه  $Q_y = \text{diag}(Q, Q, \dots, Q)$  ماتریسی از مرتبه  $(N_1 N_2)^2 \times (N_1 N_2)^2$  می‌باشد و ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه  $(N_1 N_2) \times (N_1 N_2)$  به شکل زیر بدست می‌آید [۱۵]:

$$Q = \begin{bmatrix} W & L & L & \dots & L \\ 0 & W & L & \dots & L \\ 0 & 0 & W & \dots & L \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

که  $W$  و  $L$  ماتریس‌هایی از مرتبه  $N_2 \times N_2$  می‌باشند که به صورت زیر هستند:

که  $b_i$  ها برای  $i = 1, 2, \dots, n$  به شکل زیر است

$$b_i = \frac{1}{N_1} \int_0^1 T(y) T^T(y) dy \quad (25)$$

### ۵.۲. ماتریس عملیاتی ضرب

از ویژگی زیر برای ضرب دو بردار توابع ترکیبی نیز استفاده خواهد شد:

$$\Psi(x, y) \Psi^T(x, y) G = \bar{G} \Psi(x, y), \quad (26)$$

بردار  $G$  بیان شده در (۱۰) و بردار  $\bar{G}$  ماتریس‌های عملیاتی ضرب از مرتبه  $(N_1 N_2)^2 \times (N_1 N_2)^2$  به شکل زیر می‌باشد:

$$\bar{G} = \text{diag}(G_{11}, G_{12}, \dots, G_{(N_1-1)(N_2-1)}), \quad (27)$$

در حالی که ماتریس  $\bar{G}_{ij}$  برای  $i = 1, 2, \dots, N_1$  و  $j = 1, 2, \dots, N_2$  از مرتبه  $N_1 N_2 \times N_1 N_2$  می‌باشد

$$\bar{G}_{ij} = \begin{bmatrix} g_{i1j1} & g_{i1j2} & \dots & g_{i(n_1-1)j(n_2-1)} \\ 0 & g_{i1j1} & \dots & g_{i(n_1-2)j(n_2-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{i1j1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

با خصوصیات مهم (۲۶) می‌توانیم جمله انتگرال ولترا از معادلات NVFPID را به یک معادله جبری تبدیل کنیم.

### ۳. الگوریتم عددی

در این بخش برای تقریبی جواب معادله 2D-NVFPID (۱) از ماتریس‌های عملیاتی ترکیب توابع معرفی شده در قسمت قبلی استفاده می‌کنیم. در نظر می‌گیریم  $H_1(v(\eta, \xi)) = [v(\eta, \xi)]^\alpha$  و  $H_2(v(\eta, \xi)) = [v(\eta, \xi)]^\beta$  که  $\alpha, \beta$  اعداد مثبت هستند. ما کار را با تقریب  $v_y$  و  $v(x, y_0) = v_0(x)$  شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial t} (\Psi(x) \otimes \Psi(y)) \\ &= \Psi(x) \otimes \frac{\partial}{\partial y} \Psi(y) \\ &= (I \otimes D) (\Psi(x) \otimes \Psi(y)) = D_y \Psi(x, y) \end{aligned} \quad (20)$$

که  $D_y = I \otimes D$  به طوریکه  $D$  با مرتبه  $N_1 N_2 \times N_1 N_2$  ماتریس عملیاتی مشتق نامیده می‌شود

$$D = \frac{1}{N_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N_2 - 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

و همچنین برای مشتقات جزئی دیگر از ماتریس  $\Psi(x, y)$  خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \Psi(x, y) = RS \Psi(x, y) \quad (22)$$

که داریم  $R = (D_x^n \otimes I)$  و  $S = (I \otimes D_y^m)$

### ۴.۲. انتگرال ضرب خارجی

انتگرال ضرب خارجی از بردارهای 2D-HBB را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \int_0^1 \Psi(x, y) \Psi^T(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \psi_{i n_1 j m_1}(x, y) \psi_{i n_1 j m_1}^T(x, y) dx dy \\ &= \left( \int_0^1 \psi_{i n_1}(x) \psi_{i n_1}^T(x) dx \right) \left( \int_0^1 \psi_{j m_1}(y) \psi_{j m_1}^T(y) dy \right) \\ &= b \otimes b \end{aligned} \quad (23)$$

بردار  $b$  یک ماتریس قطری از مرتبه  $N_1 N_2 \times N_1 N_2$  می‌باشد.

$$b = \frac{1}{N_1} \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \quad (24)$$

$$v_{xx}(x, y) = V^T R \Psi(x, y) \quad (39)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} & \mu_1 \int_0^x \int_0^y K_1(x, y, \eta, \xi) u^\alpha(\eta, \xi) d\eta d\xi \\ &= \mu_1 \int_0^x \int_0^y \Psi^T(x, y) K_1 \Psi(\eta, \xi) \Psi^T(\eta, \xi) M_\alpha d\eta d\xi \quad (40) \\ &= \mu_1 \Psi^T(x, y) K_1 \int_0^x \int_0^y \Psi(\eta, \xi) \Psi^T(\eta, \xi) M_\alpha d\eta d\xi \end{aligned}$$

و با استفاده از (۳۴) داریم

$$\int_0^x \int_0^y \Psi(\eta, \xi) \Psi^T(\eta, \xi) M_\alpha d\eta d\xi \quad (41)$$

$$= \int_0^x \int_0^y \bar{M}_\alpha \Psi(\eta, \xi) d\eta d\xi = \bar{M}_\alpha P \Psi(x, y)$$

پس

$$\mu_1 \int_0^x \int_0^y K_1(x, y, \eta, \xi) v^\alpha(\eta, \xi) d\eta d\xi \quad (42)$$

$$= \mu_1 \Psi^T(x, y) K_1 \bar{M}_\alpha P \Psi(x, y)$$

$$\mu_2 \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, y, \eta, \xi) v^\beta(\eta, \xi) d\eta d\xi$$

$$= \mu_2 \int_0^1 \int_0^1 \Psi^T(x, y) K_2 \Psi(\eta, \xi) \Psi^T(\eta, \xi) M_\beta d\eta d\xi \quad (43)$$

$$= \mu_2 \Psi^T(x, y) K_2 \int_0^1 \int_0^1 \Psi(\eta, \xi) \Psi^T(\eta, \xi) M_\beta d\eta d\xi$$

$$= \mu_2 \Psi^T(x, y) (K_2 B M_\beta)$$

با جایگذاری (۳۴) تا (۴۳) در (۱) می‌توان نوشت

$$C^T \Psi(x, y) + V^T R \Psi(x, y) \quad (44)$$

$$= M^T \Psi(x, y) + \mu_1 \underbrace{\Psi^T(x, y) K_1 \bar{M}_\alpha P \Psi(x, y)}_{\bar{M}_\alpha \Psi}$$

$$+ \mu_2 \Psi^T(x, y) (K_2 B M_\beta) + F^T \Psi(x, y)$$

ما می‌توانیم  $\bar{M}_\alpha$  به روشی مشابه محاسبه  $\bar{G}$

بدست آوریم و مشاهده می‌کنیم که هر مولفه  $\bar{M}_\alpha$

با جمع مولفه‌های ستونی  $(K_1 \bar{M}_\alpha P)$  با توجه به

ضرایب  $\bar{G}$  در (۲۸) در هر ستون به دست می‌آید

$$C^T = M^T - V^T R + \mu_1 \bar{M}_\alpha + \mu_2 (K_2 B M_\beta)^T + F^T \quad (45)$$

با جایگذاری مقدار  $C^T$  از (۴۵) در (۳۳) جواب

تقریبی بدست خواهد آمد.

$$v_y(x, y) = C^T \Psi(x, y), \quad (29)$$

$$f(x, y) = F^T \Psi(x, y) \quad (30)$$

$$v_0(x) = C_0^T \Psi(x, y) \quad (31)$$

انتگرال (۲۹) بر حسب  $y$  به صورت زیر خواهد بود

$$v(x, y) = v_0(x) + C^T \int_0^y \Psi(x, \eta) d\eta \quad (32)$$

$$= C_0^T \Psi(x, y) + C^T \int_0^y \Psi(x, \eta) d\eta$$

$$v(x, y) = C_0^T \Psi(x, y) + C^T Q_y \Psi(x, y) \quad (33)$$

$$= (C_0^T + C^T Q_y) \Psi(x, y)$$

قرار می‌دهیم  $(C_0^T + C^T Q_y) = M^T$  پس داریم

$$v(x, y) = M^T \Psi(x, y) \quad (34)$$

حالا  $[v(x, y)]^\alpha$  را با استفاده از ماتریس عملیاتی ضرب محاسبه می‌کنیم:

$$[v(x, y)]^2 = (M^T \Psi(x, y))(M^T \Psi(x, y))$$

$$= M^T \Psi(x, y) \Psi^T(x, y) M \quad (35)$$

$$= M^T \bar{M} \Psi$$

که  $M^T \bar{M} = M_2$  و به‌طور مشابه خواهیم داشت:

$$[v(x, y)]^\alpha = M_\alpha^T \Psi(x, y), [v(x, y)]^\beta = M_\beta^T \Psi(x, y), \quad (36)$$

و همچنین  $K_1(x, y, \eta, \xi), K_2(x, y, \eta, \xi)$  را

با استفاده از ترکیب توابع تقریب می‌زنیم

$$K_1(x, y, \eta, \xi) = \Psi^T(x, y) K_1 \Psi(\eta, \xi), \quad (37)$$

$$K_2(x, y, \eta, \xi) = \Psi^T(x, y) K_2 \Psi(\eta, \xi),$$

در حالی که  $K_1, K_2$  ماتریس‌هایی از مرتبه

$N_1^2 N_2^2 \times N_1^2 N_2^2$  می‌باشند. با استفاده از (۱۹) و

(۲۲) تقریب  $v_{xx}(x, y)$  و  $v_x(x, y)$  را خواهیم

داشت:

$$v_x(x, y) = V^T D_x \Psi(x, y) \quad (38)$$

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\partial^{n+1} g}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} \Big|_{\left(\frac{i-1}{N_1}, \frac{j-1}{N_2}\right)} (x - \frac{i-1}{N_1})^{n+1-k} (y - \frac{j-1}{N_2})^k \right\}$$

برای  $\frac{j-1}{N_2} \leq y < \frac{j}{N_2}$  و  $\frac{i-1}{N_1} \leq x < \frac{i}{N_1}$  داریم:

$$\left| g(x, y) - \sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} G^T \Psi(x, y) \right| \leq \frac{1}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} \frac{\partial^{N+1} g \Psi}{\partial x^{N+1-k} \partial y^k} \Big|_{(\eta, \xi)} (x - \frac{i-1}{N_1})^{n+1-k} (y - \frac{j-1}{N_2})^k,$$

که  $\eta \in [i-1/N_1, i/N_1]$ ,  $\xi \in [j-1/N_2, j/N_2]$  و  $i=1, 2, \dots, N_1, j=1, 2, \dots, N_2$  با توجه به

تعریف ترکیب توابع در (۷) و (۲۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - G^T \Psi(x, y)\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \int_{i-1/N_1}^{i/N_1} \int_{j-1/N_2}^{j/N_2} \left( \frac{\lambda}{(N+1)!} \left( x - \frac{i-1}{N_1} + y - \frac{j-1}{N_2} \right)^{N+1} \right)^2 dx dy \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \int_{i-1/N_1}^{i/N_1} \int_{j-1/N_2}^{j/N_2} \left( \frac{\lambda}{(N+1)!} \left( x - \frac{i-1}{N_1} + y - \frac{j-1}{N_2} \right)^{N+1} \right)^2 dx dy \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\lambda^2}{((N+1)!)^2} \int_{i-1/N_1}^{i/N_1} \int_{j-1/N_2}^{j/N_2} \left( x - \frac{i-1}{N_1} + y - \frac{j-1}{N_2} \right)^{2N+2} dx dy \\ &\leq \frac{\lambda^2}{((N+1)!)^2} \int_{i-1/N_1}^{i/N_1} \int_{j-1/N_2}^{j/N_2} \left( \frac{2}{N_1} \right)^{2N+2} dx dy \\ &= \frac{\lambda^2}{((N+1)!)^2} \left( \frac{2^{2N+2}}{N_1^{2N+4} (2N+4)} \right) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|g(x, y) - G^T \Psi(x, y)\|_2 \leq \frac{\lambda 2^{N+1}}{(N+1)! N_1^{N+2} \sqrt{2N+4}}$$

و اثبات تمام شد.

#### ۵. مثال‌های عددی

در این قسمت سه مثال عددی برای نشان دادن

$$\begin{aligned} v(x, y) &= (M^T - V^T R + \mu_1 \bar{M}_\alpha \\ &+ \mu_2 (K_2 B M_\beta)^T + F^T) \Psi(x, y) \end{aligned} \quad (۴۶)$$

#### ۴. آنالیز همگرایی

قضیه: فرض می‌کنیم  $g \in C^{N+1}$  تابعی پیوسته در بازه  $[0, 1] \times [0, 1]$  باشد به طوری که داشته باشیم

$$g = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} g_{ij}$$

و فرض کنیم

$$\begin{aligned} Y &= \text{span}\{\psi_{1010}(x, y), \dots, \psi_{101(N_2-1)}(x, y), \\ &\psi_{1110}(x, y), \dots, \psi_{1(N_1-1)1(N_2-1)}(x, y), \dots, \\ &\psi_{N_1(N_1-1)N_2(N_2-1)}(x, y)\}, i, j = 1, 2, \dots, N_1 \end{aligned}$$

اگر  $G^T \Psi(x, y)$  بهترین تقریب  $g(x, y)$  از  $Y$  باشد آنگاه کران خطا به صورت زیر خواهد بود:

$$\|g(x, y) - G^T \Psi(x, y)\|_2 \leq \frac{\lambda 2^{N+1}}{(N+1)! N_1^{N+2} \sqrt{2N+4}}$$

در حالی که

$$\left| \frac{\partial g^{N+1}(x, y)}{\partial x^{N+1-k} \partial y^k} \right| \leq \lambda$$

اثبات: با استفاده از تعریف نرم در  $L^2([0, 1] \times [0, 1])$  و خواص بیان شده 2D-HBB می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - G^T \Psi(x, y)\|_2^2 &= \int_0^1 \int_0^1 (g(x, y) - G^T \Psi(x, y))^2 dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \int_{i-1/N_1}^{i/N_1} \int_{j-1/N_2}^{j/N_2} \left( g(x, y) - \sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} G^T \Psi(x, y) \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

به کمک بسط تیلور از تابع دو متغیره  $g(x, y)$  داریم:

**مثال ۲:** در این مثال معادله 2D-NVFPID را با

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = -1 \text{ و } \alpha = 2, \beta = 3 \text{ در نظر می‌گیریم.}$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ K_1(x, y, \eta, \xi) = \xi^2 y + x^2 \\ K_2(x, y, \eta, \xi) = 3x\eta - y^2 \end{cases}$$

تابع  $f(x, y)$  را طوری در نظر می‌گیریم که جواب

دقیق معادله به صورت  $v(x, y) = x^3 y^3$  باشد.

نتایج خطای مطلق در جدول ۲ برای

$x = y = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  بیان شده است.

شکل ۲ مقایسه جواب دقیق و تقریبی را برای

$$N_2 = 4 \text{ و } N_2 = 2 \text{ نشان می‌دهد}$$

**مثال ۳:** در این مثال معادله 2D-NVFPID را با

$$\mu_1 = 1/3, \mu_2 = -1/2 \text{ و } \alpha = \beta = 1 \text{ در نظر می‌گیریم:}$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = (1 - x^2) \sin(x), 0 \leq x \leq 1 \\ K_1(x, y, \eta, \xi) = 3 \\ K_2(x, y, \eta, \xi) = 1 \end{cases}$$

روش پیشنهادی ارایه می‌دهیم لازم به ذکر است که

تمام محاسبات توسط نرم افزار Maple 2018 با

رایانه‌ای با پردازشگر Intel Core i7 انجام شده

است. خطاهای مطلق در جداول ۱، ۲، ۳ جدول‌بندی

کرده‌ایم و همچنین اشکال، مقایسه راه حل دقیق و

تقریبی را نشان می‌دهد.

**مثال ۱:** در این مثال معادله 2D-NVFPID را با

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = -2 \text{ و } \alpha = 1, \beta = 2 \text{ در نظر می‌گیریم}$$

$$\begin{cases} v(x, 0) = e^{-x}, 0 \leq x \leq 1 \\ K_1(x, y, \eta, \xi) = \exp(x-y) \\ K_2(x, y, \eta, \xi) = 4\exp(x-y) \end{cases}$$

تابع  $f(x, y)$  را طوری در نظر می‌گیریم که جواب

دقیق معادله به صورت  $v(x, y) = (1 - y^2) \exp(y - x)$

باشد. نتایج خطای مطلق در جدول ۱ برای

$x = y = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  بیان شده است.

شکل ۱ مقایسه جواب دقیق و تقریبی را برای

$$N_2 = 4 \text{ و } N_2 = 2 \text{ نشان می‌دهد.}$$

جدول ۱: ماکسیمم خطای مطلق جواب برای مثال (۱)

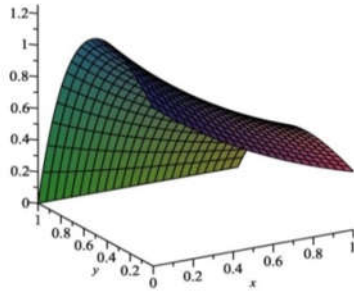
$x = y$	$N_2 = 2$		$N_2 = 4$	
	$N_1 = 2$	$N_1 = 3$	$N_1 = 2$	$N_1 = 3$
0.1	$2.2 \times 10^{-3}$	$3.2 \times 10^{-4}$	$1.3 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-7}$
0.2	$1.1 \times 10^{-3}$	$6.5 \times 10^{-5}$	$2.4 \times 10^{-7}$	$3.2 \times 10^{-7}$
0.3	$4.4 \times 10^{-2}$	$3.5 \times 10^{-5}$	$3.5 \times 10^{-6}$	$3.3 \times 10^{-8}$
0.4	$1.6 \times 10^{-3}$	$2.3 \times 10^{-6}$	$3.7 \times 10^{-6}$	$5.4 \times 10^{-7}$
0.5	$4.4 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-6}$	$5.1 \times 10^{-7}$	$4.6 \times 10^{-7}$
0.6	$1.3 \times 10^{-3}$	$5.5 \times 10^{-6}$	$7.0 \times 10^{-7}$	$2.0 \times 10^{-6}$
0.7	$3.4 \times 10^{-2}$	$6.3 \times 10^{-5}$	$4.4 \times 10^{-6}$	$2.7 \times 10^{-7}$
0.8	$2.3 \times 10^{-3}$	$2.7 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-6}$	$4.8 \times 10^{-7}$
0.9	$6.5 \times 10^{-3}$	$4.0 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-6}$	$4.2 \times 10^{-8}$



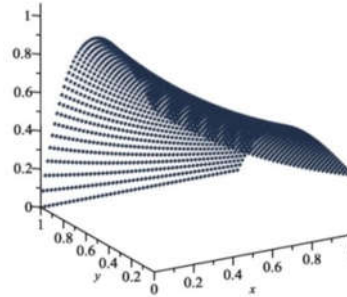
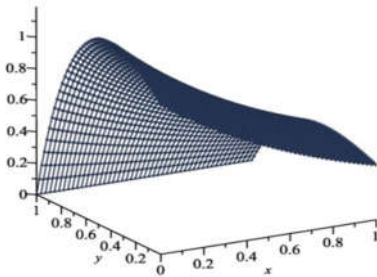
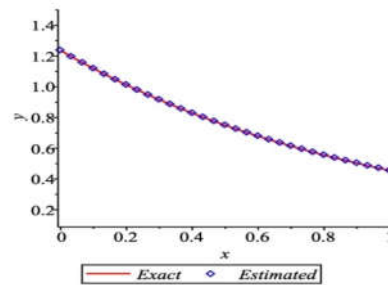
جدول ۲: ماکسیمم خطای مطلق جواب برای مثال (۲)

$x = y$	$N_2 = 2$		$N_2 = 4$	
	$N_1 = 2$	$N_1 = 3$	$N_1 = 2$	$N_1 = 3$
0.1	$2.3 \times 10^{-3}$	$1.4 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-7}$
0.2	$3.5 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-5}$
0.3	$3.4 \times 10^{-3}$	$5.0 \times 10^{-4}$	$3.1 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-5}$
0.4	$1.2 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-4}$	$5.3 \times 10^{-6}$	$4.3 \times 10^{-6}$
0.5	$1.5 \times 10^{-3}$	$5.2 \times 10^{-3}$	$3.1 \times 10^{-5}$	$2.2 \times 10^{-6}$
0.6	$4.0 \times 10^{-2}$	$4.1 \times 10^{-4}$	$2.2 \times 10^{-4}$	$1.5 \times 10^{-7}$
0.7	$3.4 \times 10^{-3}$	$2.2 \times 10^{-5}$	$1.4 \times 10^{-5}$	$3.1 \times 10^{-7}$
0.8	$5.5 \times 10^{-2}$	$3.5 \times 10^{-5}$	$4.5 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^{-8}$
0.9	$4.0 \times 10^{-2}$	$2.1 \times 10^{-4}$	$6.1 \times 10^{-5}$	$4.5 \times 10^{-8}$

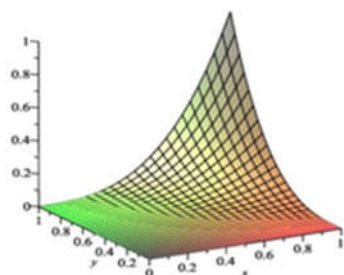
شکل ۱: نمودار جواب دقیق و تقریبی برای  $N_2 = 2, 4$  و مقایسه آنها در  $y = 0.5$  برای مثال (۱)



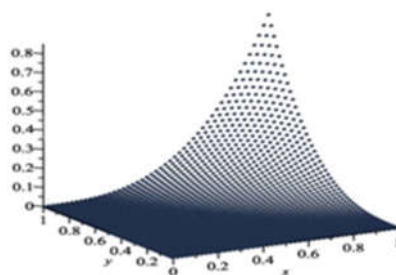
الف) جواب دقیق

ب)  $N=2$ ج)  $N=4$ د)  $y=0.5$

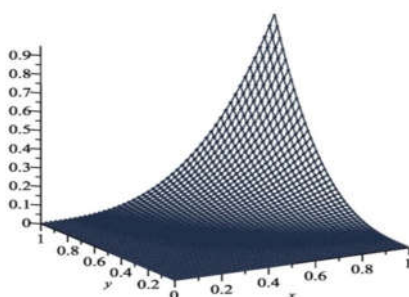
شکل ۲: نمودار جواب دقیق و تقریبی برای  $N_2 = 2, 4$  و مقایسه آنها در  $y = 0.5$  برای مثال (۲)



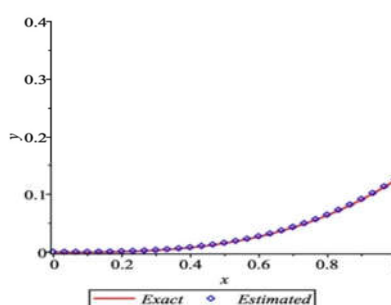
الف) جواب دقیق



ب)  $N=2$



ج)  $N=4$



د)  $y=0.5$

و بلوک پالس استفاده کرده‌ایم با استفاده از این ماتریس‌های عملیاتی، مشکل برای حل مجموعه‌ای از معادلات جبری که به سادگی می‌توانند در قالب ماتریس ظاهر شوند، کاهش یافته است. برای نشان دادن اثر بخشی روش 2D-HBB، چند مثال براساس الگوریتم عددی مشخص شده حل شدند. همچنین، همگرایی روش محاسبه شد. راه حل به دست آمده با استفاده از روش پیشنهادی نشان می‌دهد که این رویکرد می‌تواند معادلات 2D-NVFPID را بطور موثر حل کند.

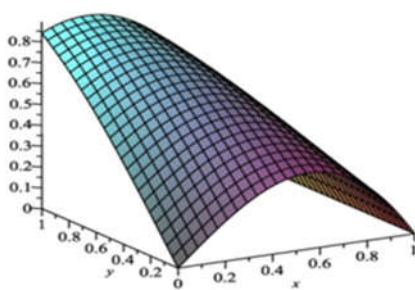
تابع  $f(x, y)$  را طوری در نظر می‌گیریم که جواب دقیق معادله به صورت  $v(x, y) = (1 - x^2) \sin(x + y)$  باشد. نتایج خطای مطلق در جدول ۳ برای  $x = y = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$  بیان شده است. شکل ۳ مقایسه جواب دقیق و تقریبی را برای  $N_2 = 4$  و  $N_2 = 2$  نشان می‌دهد.

### نتیجه‌گیری

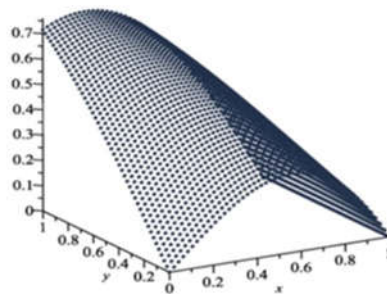
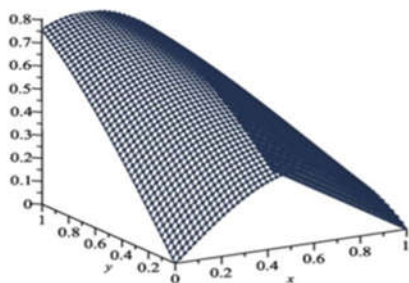
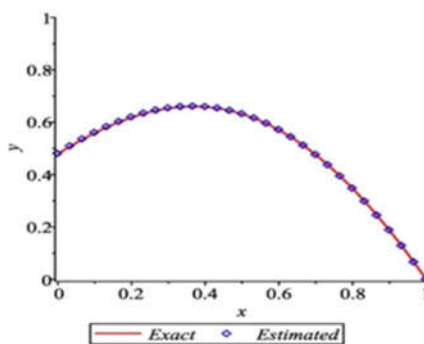
در این مقاله، ما با موفقیت جواب معادلات دو بعدی غیر خطی ولترا-فردهلم انتگرال-دیفرانسیل جزئی را تقریب زدیم. ما از ترکیب چند جمله‌ای برنشتاین

جدول ۳: ماکسیمم خطای مطلق جواب برای مثال (۳)

$x = y$	$N_2 = 2$		$N_2 = 4$	
	$N_1 = 2$	$N_1 = 3$	$N_1 = 2$	$N_1 = 3$
0.1	$4.5 \times 10^{-3}$	$3.0 \times 10^{-3}$	$2.7 \times 10^{-4}$	$2.6 \times 10^{-6}$
0.2	$5.1 \times 10^{-3}$	$3.1 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-7}$
0.3	$1.1 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-4}$	$5.2 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-7}$
0.4	$5.1 \times 10^{-2}$	$6.6 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-4}$	$5.5 \times 10^{-8}$
0.5	$3.3 \times 10^{-3}$	$1.6 \times 10^{-5}$	$3.6 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-7}$
0.6	$2.7 \times 10^{-4}$	$4.5 \times 10^{-5}$	$4.1 \times 10^{-6}$	$5.3 \times 10^{-7}$
0.7	$6.0 \times 10^{-3}$	$5.2 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-5}$	$6.4 \times 10^{-8}$
0.8	$3.4 \times 10^{-2}$	$7.2 \times 10^{-4}$	$3.3 \times 10^{-6}$	$2.6 \times 10^{-6}$
0.9	$5.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$6.1 \times 10^{-6}$	$1.5 \times 10^{-7}$

شکل ۳: نمودار جواب دقیق و تقریبی برای  $N_2 = 2, 4$  و مقایسه آنها در  $y = 0.5$  برای مثال (۳)

الف) جواب دقیق

ب)  $N=2$ ج)  $N=4$ د)  $y=0.5$

**فهرست منابع**

- [8] F.Abeergel and R. Tachet, A nonlinear partial integro-differential equation from mathematical finance, *AIMS*, 10, 10-20 (2010).
- [9] K.S. Zadeh, An integro-partial differential equation for modeling biofluids flow in fractured biomaterials, *Theoretical Biology*, 273, 72-79 (2011).
- [10] Y. Lin, C.Xu, Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation, *Comput. Phys*, 225, 1533-1552 (2007).
- [11] S. Larsson, V. Thomée, L. Wahlbin, Numerical solution of parabolic integro-differential equations by the discontinuous Galerkin method, *Math Comput*, 67, 45-71 (1998).
- [12] S.Saha Ray, S. Behera, Two-dimensional wavelets operational method for solving Volterra weakly singular partial integro-differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 366, 112411 (2020).
- [13] S. Behera, S.Saha Ray, An operational matrix based scheme for numerical solutions of nonlinear weakly singular partial integro-differential equations, *Applied Mathematics and Computation* 367, 124771 (2020).
- [14] K. Maleknejad, K. Mahdiani, Solving nonlinear mixed Volterra-Fredholm integral equations with two-dimensional block-pulse functions using direct method, *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 16, 3512–3519 (2011).
- [1] محمود بهروزی فر (۱۳۹۸) ارائه دو مدل برای تحلیل عددی جواب معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری و مقایسه آنها، *مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی*، مهر و آبان ۱۳۹۸. ۴۸-۳۱.
- [۲] فرشید میرزایی، سیده فاطمه حسین، سحر علیپور (۱۳۹۹) حل عددی مدل ریاضی انتشار بیماریهای عفونی بر پایه چندجمله ایهای برنشتاین انتقال یافته، *مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی*، خرداد و تیر ۱۳۹۹. ۳۸-۲۹.
- [۳] بنت الهدا هاشمی، مرتضی خدابین (۱۳۹۶) بسط سری انتگرال‌های وینر به کمک توابع بلاک پالس، *مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی*، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۶. ۳۲-۲۵.
- [4] S. Kazem, J.A. Rad, K. Parand, A meshless method on non-Fickian flows with mixing length growth in porous media based on radial basis functions: A comparative study, *Computers and Mathematics with Applications* 64, 399–412 (2012).
- [5] P. Hepperger, Hedging electricity swaptions using partial integro-differential equations, *Stochastic Processes And Their Applications*, 122, 600-622 (2012).
- [6] M. Dehghan and R. Salehi, The numerical solution of thenon-linear integro-differential equations based on the meshless method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236, 9, 2367–2377, (2012).
- [7] Y.N. Grigoriev, N.H. Ibragimov, V.F. Kovalev and S.V. Meleshko, *Symmetries of Integro-Differential Equations: With Applications in Mechanics and Plasma Physics*, Springer (2010).

- 
- [15] K. Maleknejad and M. Tavassoli Kajani, Solving second kind integral equations by Galerkin methods with hybrid Legendre and block-pulse function, Applied Mathematics and Computation, 145(2-3), 623-629, (2003).

