دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایجی از تعمیم نامساوی بورخ و عمق جبر ریس و حلقه مدرج وابسته یک ایدآل نسبت به یک مدول کوهن - مکالی

محمد توحیدی[۱]، امیر مافی[۲]*، خدیجه احمدی‌آملی[۳]

[۱] دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.
[۲] دانشیارگروه ریاضی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران (نویسنده مسئول).
[۳] استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۱۲/۱۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۴/۱۳

چکیده

فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی با هیأت مانده‌ای نامتناهی $k=A/m$، M یک $A-$ مدول کوهن - مکالی و I ایدآلی از A باشد. فرض کنید $R_A(I)$ و $G_A(I)$، به ترتیب جبر ریس و حلقه مدرج وابسته I و $l(I)$ نشان دهنده‌ی بسط تحلیلی I باشد. نامساوی بورخ بیان می‌کند که $l(I)+\inf\{depth\, A/I^n : n\geq 1\}\leq \dim A$ و تساوی زمانی برقرار است که $G_A(I)$ کوهن - مکالی باشد. بنابراین در این حالت می‌توان با محاسبه عمق حلقه مدرج وابسته I، بیان کرد $depth\, G_A(I)=l(I)+\inf\{depth\, A/I^n : n\geq 1\}$. ما در این مقاله نتایج را به حالت مدولی تعمیم می‌دهیم و نشان خواهیم داد برای عمق مدول مدرج وابسته I نسبت به M؛ یعنی $depth\, G_M(I)$، این تساوی در حالت مدولی حتی اگر $G_M(I)$ لزوماً کوهن - مکالی نباشد نیز برقرار است و تعمیم نامساوی بورخ را ثابت خواهیم کرد. همچنین به محاسبه عمق جبر ریس و حلقه مدرج وابسته به یک ایدآل نوعاً همبرش کامل نسبت به مدول M در یک حلقه موضعی کوهن - مکالی خواهیم پرداخت و نتایجی را درباره‌ی ایدآل‌های با انحراف تحلیلی کوچکتر یا مساوی یک با عدد تقلیل حداکثر دو نسبت به مدول M به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مدول مدرج وابسته، عدد بورخ، همبرش کامل، انحراف تحلیلی، بسط تحلیلی، عدد تقلیل.

---

*. عهده دار مکاتبات: Email: a_mafi@ipm.ir

۱. مقدمه

فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی و $I \subseteq A$ ایدآلی از A باشد. ارتفاع[2] ایدآل I با $ht(I)$ و بسط تحلیلی[3] آن با $l(I)$ نشان داده می‌شود که بنا بر تعریف نورثکات و ریس[۲۲] داریم $l(I)=\dim \oplus_{n\geq 0} I^n/mI^{n+1}$ که در آن $\dim(-)$ نشان دهنده‌ی بعد کرول است. حلقه مدرج $\oplus_{n\geq 0} I^n/mI^{n+1}$ را فیبر مخروطی[4] ایدآل I می‌نامند و با $F(I)$ نشان داده می‌شود. هوکابا و هونیکه[۱۶] انحراف تحلیلی[5] ایدآل I را به صورت تفاضل $l(I)-ht(I)$ تعریف کرده‌اند. این مقدار با $ad(I)$ نشان داده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که ایدآل I هم مضرب[6] و $ht(I)\leq l(I)\leq \dim A$ نامیده می‌شود هرگاه $ht(I)=l(I)$[۱۴]. به عبارتی، ایدآل‌های با انحراف تحلیلی صفر هم مضرب نامیده می‌شوند. برای مثال، ایدآل‌های m - اولیه[7] همواره هم‌مضرب هستند. زیر حلقه $R_A(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n t^n$ از حلقه مدرج $A[t]$ و A - مدول $G_A(I)=\oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ به ترتیب، جبر ریس[8] و حلقه مدرج وابسته I می‌باشند. برای دیدن محاسبات مربوط به حلقه مدرج وابسته و جبر ریس ایدآل‌های هم مضرب[۱۴] را ملاحظه کنید. اخیراً، بسیاری از ویژگی‌های جالب در رابطه با جبرهای ریس و حلقه‌های مدرج وابسته به ایدآل‌هایی با انحراف تحلیلی کوچک بیان شده است. برای مثال[۱۱]،[۱۲]،[۱۶]، [۷] را ملاحظه کنید. این نتایج عمدتاً مربوط به ویژگی‌های گرنشتاین و کوهن - مکالی جبرهای ریس و حلقه‌های فرم از ایدآل‌هایی با انحراف تحلیلی۱ یا ۲ می‌باشد. همچنین نتایج ارزنده‌ای با احتساب شرایط خاصی روی ایدآل I برای کوهن - مکالی بودن چنین حلقه‌هایی به دست آمده است. برای مثال به[۱۳] یا[۲۹] مراجعه شود.

از این‌جا به بعد فرض می‌کنیم A یک حلقه موضعی با تنها ایدآل ماکسیمال m است و هیأت مانده‌ای $k=A/m$ نیز نامتناهی است. یادآوری می‌کنیم که ایدآل $J\subseteq I$ یک تقلیل از I نامیده می‌شود هرگاه عددی صحیح مانند $n\geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که $I^{n+1}=JI^n$. این ایدآل تقلیل مینیمال نامیده می‌شود هرگاه هیچ تقلیل دیگری از I مشمول در J وجود نداشته باشد. این مفاهیم توسط نورثکات و ریس[۲۲] معرفی شده‌اند. آنها ثابت کرده‌اند که تقلیل‌های مینیمال از I همواره وجود دارد و مفهومی مرتبط با بسط تحلیلی ایدآل I را بیان کرده‌اند[۲۲ بخش۲، قضیه۱]. تعداد مینیمال مولدهای I را با $\mu(I)$ نشان می‌دهیم. بنابر[۲۲، بخش۴، قضیه۱]، $l(I)$ به عنوان تعداد مینیمال مولدهای هر تقلیل مینیمالی از I در نظر گرفته می‌شود. به عبارتی برای هر تقلیل مینیمال J از I، $l(I)=\mu(J)$. علاوه بر این، برای تقلیل داده شده‌ی J از I، عدد تقلیل I نسبت به J با $r_J(I)$ نشان داده می‌شود و به صورت $r_J(I)=\min\{n \mid I^{n+1}=JI^n\}$ تعریف می‌شود. همچنین عدد تقلیل I را با نماد $r(I)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $r(I)=\min\{r_J(I) \mid J$ یک تقلیل مینیمال از I است$\}$. در ادامه، عدد تقلیل $r(I)$ مستقل نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر تقلیل مینیمال J از I، $r(I)=r_J(I)$.

ارتفاع ایدآل I که با $ht(I)$ نشان داده می‌شود برابر است با $\inf\{\dim A_P \mid P\in Ass(A/I)\}$. اگر $h:=ht(I)$، آن‌گاه عدد مینیمال موضعی ایدآل I را با نماد $r_h(I)$ نشان می‌دهیم که به صورت $r_h(I)=\max\{r(I_P) \mid P\in V(I), ht(P)=h\}$ تعریف می‌شود. در ادامه، ایدآل I در A را ناآمیخته نامیم

---

2. Height
3. Analytic spread
4. Fiber cone
5. Analytic deviation
6. Equimultiple
7. m -primary
8. Rees algebra

هرگاه تمام ایدآل‌های اول وابسته A/I دارای ارتفاع یکسانی باشند. به بیانی دیگر؛ هرگاه به ازای هر ایدآل اول وابسته $P \in Ass(A/I)$، $ht(P) = ht(I)$.

فرض کنیم I ایده‌آلی از A باشد. یادآوری می‌کنیم که ایدآل I همبرش کامل[1] نامیده می‌شود هرگاه I به طور مینیمال توسط یک A- رشته منظم تولید شده باشد؛ به عبارتی هرگاه $\mu(I) = ht(I)$. ایدآل I تقریباً همبرش کامل[2] نامیده می‌شود هرگاه $\mu(I) = ht(I)+1$ و I_P به ازای هر ایدآل اول مینیمال $P \in Min(A/I)$ همبرش کامل باشد. علاوه بر این، I نوعاً همبرش کامل[3] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر ایدآل اول مینیمال $P \in Min(A/I)$، داشته باشیم $\mu(I_P) = ht(I)$ [۱۵] یا[۳۰]. زارزوئلا[۳۰، لم ۱. ۲] نشان داده است که هر تقلیل مینیمال از یک ایدآل نوعاً همبرش کامل با انحراف تحلیلی ۱ تقریباً همبرش کامل است.

برادمن[۴] ثابت کرده است که اگر A کوهن – مکالی و I یک ایدآل نوعاً همبرش کامل از A باشد به طوری که $ad(I) = 1$ و $r(I) = 0$، آن‌گاه

$$depth\, G_A(I) = \min\{\dim A, depth\, A/I + ht(I)+1\}$$

و

$$depth\, R_A(I) = \min\{\dim A+1, depth\, A/I + ht(I)+2\}$$

(همچنین[۱۵] را ملاحظه کنید.) فرمول مشابهی نیز نشان داده شده است که در آن I یک ایدآل نوعاً همبرش کامل با $ad\,(I) = 1$ و $r(I) \le 1$ است[۳۰]. هدف ما در این مقاله به دست آوردن فرمول‌هایی از این دست برای محاسبه عمق جبر ریس و حلقه مدرج وابسته یک ایدآل همبرش کامل نوعی نسبت به مدول کوهن – مکالی M با انحراف تحلیلی ۱ و عدد تقلیل حداکثر ۱ در یک حلقه کوهن – مکالی موضعی است. از طرف دیگر، نامساوی بورخ[4][۵] بیان می‌کند که برای هر ایدآل I،

$$\inf\{depth\, A/I^n : n \ge 1\} + l(I) \le \dim A$$

و تساوی زمانی برقرار است که $G_A(I)$ کوهن – مکالی باشد و $h(I)\rhd$ [۹]. (همچنین[۲۷] را ملاحظه کنید). بنابراین، اگر $G_A(I)$ کوهن – مکالی باشد، می‌توان نوشت

$$depth\, G_A(I) = \inf\{depth\, A/I^n : n \ge 1\} + l(I)$$

واضح است که نمی‌توان انتظار داشت چنین فرمولی در حالت کلی برقرار باشد. زیرا حلقه‌های موضعی (A,m) وجود دارند به طوری‌که کوهن – مکالی هستند و $depth\, G_A(m) = ۰$. برای دیدن مثال‌های متنوع به[۱۰] مراجعه شود.

وقتی که $M = A$ و $l(I) = ht(I)$؛ یعنی هنگامی که I دارای انحراف تحلیلی صفر است، بسیاری از محققین راجع به ویژگی کوهن – مکالی بودن $G_A(I)$ بحث و تبادل نظر نموده و نتایج زیادی به دست آورده‌اند. در حالی که برای انحراف تحلیلی مثبت چنین کاری صورت نگرفته است. هر چند که تلاش‌های قابل ملاحظه‌ای برای حالتی که انحراف تحلیلی یک ایده‌آل یک یا دو می‌باشد انجام گرفته است[۱۱]،[۱۶]،[۱۹]. وقتی که انحراف تحلیلی یک یا دو است هوکابا و هونیکه[۱۶. قضیه ۹٫۲]، [۱۷. قضیه ۱. ۲]نشان داده‌اند که اگر (A,m) یک حلقه کوهن – مکالی موضعی با هیأت مانده‌ای نامتناهی و I نوعاً همبرش کامل با انحراف تحلیلی یک و عدد تقلیل حداکثر یک باشد، آن‌گاه حلقه ریس و حلقه مدرج وابسته هر دو تحت شرایطی کوهن – مکالی هستند. این شرایط توسط تعدادی از مؤلفین تعمیم داده شده است[۱۳]،[۱۹]. آن‌چه که در این مقاله مد نظر ما است این است که نتایجی را که درباره‌ی حلقه‌ها و ایده‌آل‌هاست به حالت مدولی تعمیم دهیم.

تعریف ۱: فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول متناهی و $I \subseteq A$ ایدآلی از A باشد با

---

1. Complete intersection
2. Almost complete intersection
3. Generically complete intersection
4. Burch´s inequality

$ht(I) \geq 1$. مدول مدرج وابسته[1] I نسبت به M عبارت است از $G_A(I)$- مدول $G_M(I) = \oplus_{n\geq 0} I^n M / I^{n+1} M$. همچنین جبر ریس ایدآل I نسبت به M را با نماد $R_M(I)$ نشان می‌دهیم و به صورت $R_M(I) = \oplus_{n\geq 0} I^n M t^n$ تعریف می‌کنیم. فیبر مخروطی ایده‌آل I نسبت به M با نماد $F_M(I)$ نشان داده می‌شود و تعریف می‌کنیم $F_M(I) = \oplus_{n\geq 0} I^n M / mI^{n+1} M$.

تعریف ۲: بسط تحلیلی ایده‌آل I نسبت به M را با نماد $l_M(I)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت $l_M(I) = \dim F_M(I)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳: ([۲۶، تعریف ۱. ۱]) فرض کنید M یک A- مدول نوتری و I ایدآلی از A باشد. ایدآل $J \subseteq I$ یک تقلیل از I نسبت به M نامیده می‌شود هرگاه عدد طبیعی m وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m$، $I^{n+1} M = J I^n M$. کوچک‌ترین mای که در این رابطه صدق می‌کند را با $r_J(I, M)$ نشان می‌دهیم. این ایدآل تقلیل مینیمال نامیده می‌شود هرگاه هیچ تقلیل دیگری از I مشمول در J وجود نداشته باشد. علاوه بر این، عدد تقلیل I نسبت به M را با نماد $r(I, M)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(I, M) = \min \left\{ r_J(I, M) \middle| J \text{ یک تقلیل مینیمال از } I \text{ نسبت به } M \text{ است} \right\}$$

تذکر ۱. بنا بر تعمیم[۲۲، بخش ۴، قضیه ۱] در حالت مدولی، $l_M(I)$ را به عنوان تعداد مینیمال مولدهای یک (هر) تقلیل مینیمالی از I نسبت به M در نظر می‌گیریم. به عبارتی؛ اگر J یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد، آن‌گاه $l_M(I) = \mu(J)$.

تعریف ٤: ارتفاع ایدآل I نسبت به M را با نماد $ht_M(I)$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت

$$\inf \{ \dim M_P \mid P \in Supp(M/IM) \}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $h := ht_M(I)$، آن‌گاه عدد مینیمال موضعی ایدآل I نسبت به M را به صورت

$$r_h(I, M) = \max \left\{ r(I_P, M_P) \middle| P \in V(I), ht_M(P) = h \right\}$$

تعریف می‌کنیم. همچنین، انحراف تحلیلی ایدآل I نسبت به M را به صورت تفاضل $l_M(I) - ht_M(I)$ تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $ad_M(I)$ نشان می‌دهیم. در لم۵ ثابت می‌کنیم $ht_M(I) \leq l_M(I) \leq \dim M$. بنابراین همواره داریم $ad_M(I) \geq 0$. در ادامه، ایدآل I هم‌مضرب نسبت به M نامیده می‌شود هرگاه $ht_M(I) = l_M(I)$.

تعریف ۵: ایدآل I در A را ناآمیخته نسبت به M می‌نامیم هرگاه تمام اول‌های وابسته M/IM دارای ارتفاع یکسانی باشند. به بیانی دیگر؛ هرگاه به ازای هر ایدآل اول وابسته $P \in Ass(M/IM)$، $ht_M(P) = ht_M(I)$.

تعریف ٦: ایدآل I در A همبرش کامل نسبت به M نامیده می‌شود هرگاه I به طور مینیمال در A توسط یک M- رشته منظم تولید شده باشد. به عبارتی؛ هرگاه $\mu(I) = ht_M(I)$. ایدآل I تقریباً همبرش کامل نسبت به M نامیده می‌شود هرگاه $\mu(I) = ht_M(I) + 1$ و I_P به ازای هر ایدآل اول مینیمال $P \in Supp(M/IM)$ همبرش کامل می‌باشد. علاوه بر این، I نوعاً همبرش کامل نسبت به M نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر ایدآل اول مینیمال $P \in Supp(M/IM)$، I_P همبرش کامل باشد. به عنوان دست‌آوردی از نتایج ارائه شده، ما در این مقاله به دنبال اثبات قضیه اساسی زیر خواهیم بود: (نتیجه ۳ را ملاحظه کنید.)

---

[1]. Associated graded module

قضیه ۱. فرض کنید (A,m) یک حلقه کوهن – مکالی موضعی، M یک A– مدول کوهن – مکالی و I ایدآلی از A باشد به طوری‌که $ad_M(I)\le 1$، $r_h(I,M)\le 1$ و $r(I,M)\le 2$ که در آن $h=ht_M(I)$. در مجموع، فرض کنید I ناآمیخته نسبت به M باشد هرگاه $ad_M(I)=1$ یا $r(I,M)=2$. در این صورت

$$\inf\{depth\, M/I^nM : n\ge 1\}+l_M(I)-1 \le depth\, G_M(I) \le \inf\{depth\, M/I^nM : n\ge 1\}+l_M(I)+1$$

علاوه بر این، اگر $r(I,M)\le 1$ و I یک ایدآل نوعاً همبرش کامل با $ad_M(I)=1$ باشد یا $depth\, M/IM \ne depth\, M/I^2M$ و $ht_M(I)>0$، آن‌گاه

$$depth\, G_M(I) = \inf\{depth\, M/I^nM : n\ge 1\}+l_M(I).$$

برای سادگی، مقدار $\inf\{depth\, M/I^nM : n\ge 1\}$ را عدد بورخ[1] ایدآل I نسبت به M نام‌گذاری می‌کنیم و آن را با $B(I,M)$ نشان خواهیم داد. توجه داریم که برادمن[۳] ثابت کرده است که عمق A/I^n دارای مقدار ثابتی است، به طوری که وی آن را برای ایدآل‌هایی که تقریباً همبرش کامل هستند، محاسبه کرده است[۴]. در چنین حالتی، این مقدار تقریبی با تعمیم روی حالت مدولی با $B(I,M)$ مطابقت دارد اما این در حالت کلی برقرار نیست (گزاره‌های ۱، ۲ و ۳ را ملاحظه کنید). در واقع، در بخش[۳] این مقاله، عدد بورخ ایدآل‌هایی را محاسبه خواهیم کرد که تحت فرضیات قضیه ۱ هستند و در بخش[۴]، عمق حلقه‌های مدرج وابسته به آنها را بررسی خواهیم کرد. بنابراین، با مقایسه‌ی مستقیم از هر دو محاسبات می‌توانیم مستقیماً گزاره‌ای را در که در قضیه[۱] آمده است فرموله کنیم. برای مثال با استفاده از محاسباتی که درباره‌ی عدد بورخ در بخش[۳] به دست آمده است به نتایجی در بخش[۴] مانند نتیجه[۲] و نتیجه[۳] دست می‌یابیم. همچنین، با استفاده از نتایج هوکابا و مارلی[۱۸] که در آن عمق $G_A(I)$ و $R_A(I)$ به هم ربط داده شده‌اند، می‌توانیم مقدار دقیق $depth\, R_M(I)$ را برای اغلب مواردی که در این‌جا بررسی می‌کنیم به دست آوریم (قضیه ۲، قضیه ۴ و قضیه ۵ را ملاحظه کنید). سرانجام در بخش آخر، تعمیمی از نامساوی بورخ را ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر $G_M(I)$ کوهن – مکالی باشد، آن‌گاه تساوی برقرار است. یعنی؛ $l_M(I)+B(I,M)=\dim M$. (قضیه ۶ را ملاحظه کنید).

به منظور ثابت کردن نتایج فوق معمولاً آنها را به حالت $ht_M(I)=0$ محدود می‌کنیم. این امکان وجود دارد، زیرا تحت فرضیات قضیه[۱] نشان داده می‌شود که تقلیل‌های مینیمال از I نسبت به M منحصراً وجود دارد. برای دیدن نتایج مشابه که شامل برخی از حالت‌های خاص مورد بحث ما است می‌توان به[۱] یا[۱۳] مراجعه نمود.

۱. پیش نیازها

در سرتاسر این مقاله، (A,m) همواره نشان دهنده‌ی یک حلقه موضعی با ایدآل ماکسیمال m و هیأت مانده‌ای نامتناهی $k=A/m$ است. همچنین فرض می‌کنیم M یک A– مدول متناهی و I ایدآلی از A باشد.

تعریف ۷: ([۲۶]، تعریف ۱.۲]) فرض کنید M یک A- مدول نوتری و I ایدآلی از A باشد. عضو x از A را به طور صحیح وابسته[2] روی I نسبت به M گوییم اگر عددی طبیعی چون s وجود داشته باشد به طوری که $x^sM\subseteq \sum_{i=1}^{s}x^{s-i}I^iM$.

1. Burch number
2. Integrally dependent

تعریف ۸: ([۲۶، نتیجه ۱.۵]) مجموعه تمام عضوهای A که به طور صحیح وابسته روی I نسبت به M هستند یک ایدآل A است. این ایدآل بستار صحیح[1] I نسبت به M نامیده می‌شود و با $\overline{I}^{(M)}$ نشان داده. همچنین، می‌گوییم I به طور صحیح بسته[2] نسبت به M است هرگاه $\overline{I}^{(M)} = I$. هر ایدآل ماکسیمال A یک ایدآل به طور صحیح بسته است.
ایده‌های مهم درباره‌ی تقلیل و بستار صحیح یک ایدآل در حلقه جابجایی نوتری A توسط نورثکات و ریس[۲۲] معرفی گردیده است.

تعریف ۹: ([۲۴]) فرض کنید m یک عنصر ناصفر از A- مدول M و j بزرگ‌ترین عدد صحیح باشد به طوری که $m \in I^j M$. تصویر m در $I^j M / I^{j+1} M$ را با نماد m^* نشان می‌دهیم و آن را فرم آغازین[3] m می‌نامیم. اگر L زیر مدولی از M باشد، آن‌گاه L^* نشان دهنده‌ی زیر مدول مدرجی از $G_M(I)$ است که توسط تمام l^*هایی تولید می‌شود که در آن $l \in L$. در این حالت داریم $G_{M/L}(I) \cong G_M(I)/L^*$.
والابرگا و والا[۲۸، نتیجه ۲.۷] محکی را تعیین کرده‌اند برای وقتی که رشته‌ای از فرم‌های آغازین عناصر A، تشکیل یک رشته منظم در حلقه مدرج وابسته می‌دهند. در واقع، آنها شرط لازم و کافی را برای رشته‌ای از عناصر $a_1, \ldots, a_k$ بیان کرده‌اند به طوری که دارای این ویژگی باشند که رشته $a_1^*, \ldots, a_k^*$ یک $G_A(I)$- رشته منظم باشد. ما در این‌جا نتیجه‌ی فوق را برای مدول‌ها تعمیم می‌دهیم، با این فرض که فرم‌های آغازین از عناصر $a_1, \ldots, a_k$ از درجه ۱ هستند.

لم ۱. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول و I ایدآلی از A باشد. فرض کنید $a_1, \ldots, a_k$ یک M- رشته منظم باشد به طوری‌که به ازای هر $i = 1, \ldots, k$، $a_i \in I \setminus I^2$. قرار دهید $J = (a_1, \ldots, a_k)$. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:
- $a_1^*, \ldots, a_k^*$ یک $G_M(I)$- رشته منظم است.
- به ازای هر $i \geq 1$، $I^i M \cap JM = I^{i-1} JM$.

و در این حالت داریم:

$$G_M(I)/(a_1^*, \ldots, a_k^*)M \cong G_{M/JM}(I).$$

برهان. به[۲۴، قضیه ۳] مراجعه شود.
نتایج زیر به منظور کاستن برخی اثبات‌ها برای حالتی که ارتفاع یک ایدآل نسبت به مدول M برابر صفر است به کار گرفته خواهد شد.

تذکر۲. فرض کنید $r_h(I,M) \leq 1$ و $P \supseteq I$ یک ایدآل اول باشد به طوری‌که $h = ht_M(P)$. در این صورت، I_P یک ایدآل PA_P- اولیه است که $r(I_P, M_P) \leq 1$ و در این حالت عدد تقلیل $r_J(I_P, M_P)$ مستقل از تقلیل مینیمال J نسبت به M است (برای مثال[۲۱، گزاره ۲۵. ۴] را ملاحظه کنید). به ویژه، به ازای هر تقلیل J' از I_P، $I_P^2 M_P = J' I_P M_P$. از طرف دیگر، توجه داریم که اگر I ناآمیخته نسبت به M باشد، آن‌گاه $r_h(I,M) =$

$$\max\{r(I_P, M_P) \mid P \in Supp(M/IM)\}.$$

لم ۲. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول کوهن - مکالی و I ایدآلی از A باشد به طوری‌که $ad_M(I) = 1$. فرض کنید I نوعاً همبرش کامل نسبت به M و J یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد و $ht_M(I) = h$. در این صورت یک مجموعه مینیمال از مولدهای $a, a_1, \ldots, a_h$ در J وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:
(آ) $a_1, \ldots, a_h$ یک M- رشته منظم است.

---
[1]. Integral closure
[2]. Integrally closed
[3]. Initial form

(ب) به ازای هر ایدآل اول مینیمال
$P\in Supp(M/IM)$،
$I_PM_P=(a_1,...,a_h)_PM_P$.

(ج) $a\in I$ یک عضو نامقسوم علیه صفر روی M است.

(د) به ازای هر $n,m\geq 1$،

$$\left((a_1,...,a_h)^m : a^n\right)M \cap I^mM=(a_1,...,a_h)^mM$$

(ه) اگر $h\geq 1$ و $I^2M=JIM$، آن‌گاه برای هر $n\geq 1$ و به ازای هر $i=1,...,n-1$ داریم:
$(a_1,...,a_h)^iM\cap I^nM=(a_1,...,a_h)I^{n-i}M$.
به ویژه، $a_1^*,...,a_h^*$ یک $G_M(I)$ - رشته منظم است.

برهان. گزاره‌های (آ)، (ب) و (ج) مشابه اثبات[۳۰، لم ۲.۲] برای حالت مدولی ثابت می‌شوند. برای (د) و (ه) نیز کافی است اثباتی را که در[۱۶، لم ۲.۶ و تذکر ۲.۱(iii)] آمده است در حالت مدولی به کار بگیریم.
برای حالتی که ایدآل I دارای انحراف تحلیلی ۱ و عدد تقلیل حداکثر۲ است، ابتدا به تعریف زیر نیاز داریم([۱] و[۱۳] را ملاحظه کنید).

تعریف ۱۰: فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول، I یک ایدآل در A باشد. فرض کنید J یک تقلیل مینمال از I نسبت به M باشد و $l=l_M(I)$. در این صورت، مجموعه مولد $a_1,...,a_l$ برای J را یک مجموعه مولد خوب[1] نسبت به M می‌نامیم هرگاه:
(آ) به ازای هر $P\in V(I)$ با $i=ht_M(P)<l$، $(a_1,...,a_i)_P$ یک تقلیل از I_P نسبت به M_P باشد.
(ب) به ازای هر $1\leq i\leq l$ و هر $P\in Ass\left(M/(a_1,...,a_j)M\right)\setminus V(I)$ که $0\leq j<i$، داشته باشیم $a_i\notin P$.
در هر حلقه موضعی با هیأت مانده‌ای نامتناهی، هر تقلیل مینیمال J از I دارای یک مجموعه خوب از مولدهاست[۱، لم ۳,۲] یا[۱۳، لم ۱.].

لم ۳. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول کوهن - مکالی و I یک ایدآل با $ad_M(I)=1$ باشد. همچنین فرض کنید I ناآمیخته نسبت به M باشد و $r_h(I,M)\leq 1$ که $h=ht_M(I)$. اگر J یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد، آن‌گاه یک مجموعه مینیمال از مولدهای $a,a_1,...,a_h$ در J وجود دارد که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند: (آ) $a_1,...,a_h$ یک M- رشته منظم است.
(ب) به ازای هر $P\in Supp(M/IM)$، $I_P^2M_P=(a_1,...,a_h)_PI_PM_P$.
(ج)

$$\left((a_1,...,a_h):a\right)M\cap I^2M=(a_1,...,a_h)IM$$

(د) اگر $h\geq 1$ و $I^3M=JI^2M$، آن‌گاه به ازای هر $n\geq 1$،

$$I^{n+1}M\cap(a_1,...,a_h)M=(a_1,...,a_h)I^nM$$

. به ویژه، $a_1^*,...,a_h^*$ یک $G_M(I)$- رشته منظم است.

برهان. با توجه به فرض، چون $l_M(I)=h+1$، پس یک مجموعه مولد خوب برای J نسبت به M مانند $a,a_1,...,a_h$ وجود دارد. در این صورت (آ) مشابه اثبات[۱، لم ۶ ۲] یا[۱۳، لم ۲. ۲] ثابت می‌شود. با به کارگیری آن‌چه که در تذکر ۲ آمده است، قسمت(ب) فوراً نتیجه می‌شود؛ زیرا به ازای هر $P\in Supp(M/IM)$ می‌توان دید که $(a_1,...,a_h)_p$ یک تقلیل از I_p نسبت به M_p است. حال قسمت (ج) را ثابت می‌کنیم. اگر $h=0$، آن‌گاه به دنبال اثبات $(0:a)M\cap I^2M=0$ هستیم، یا به طور معادل به ازای هر $P\in MinSuppM$ می‌خواهیم نشان دهیم $(0:a)_PM_P\cap I_P^2M_P=0$. اگر $I\not\subset P$، آن‌گاه بنابر شرط (ب) از تعریف۱۰ داریم که $a\notin P$ و لذا $(0:a)_PM_P=0$. اگر $I\supseteq P$، آن‌گاه $I_P^2M_P=0$. در هر حالت $(0:a)_PM_P\cap I_P^2M_P=0$ همان‌طور که می‌خواستیم.

1. Good

حال فرض می‌کنیم که $h>0$. می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر $P\in Ass\, M/(a_1,...,a_h)IM$،

$$((a_1,...,a_h):a)_P M_P \cap I_P^2M_P = (a_1,...,a_h)_P I_P M_P$$

فرض کنیم $P\in Ass\, M/(a_1,...,a_h)IM \subseteq Ass\, M/(a_1,...,a_h)M \cup Ass\, M/IM.$
اگر $P\in Ass\, M/IM \subseteq Supp\, M/IM$، آن‌گاه طبق قسمت (ب)، $I_P^2M_P=(a_1,...,a_h)_P I_P M_P$. فرض کنیم $P\in Ass\, M/(a_1,...,a_h)M$. در این صورت $ht_M(P)=h$. زیرا از آن‌جا که M کوهن - مکالی است، پس $M/(a_1,...,a_h)M$ نیز کوهن - مکالی است و لذا تمام عناصر $Ass\, M/(a_1,...,a_h)M$ مینیمال هستند. بنابراین $ht_{M/(a_1,...,a_h)M}(P)=0$ و در نتیجه

$$.ht_M(P)=ht_{M/(a_1,...,a_h)M}(P)+h=0+h=h$$

بنابراین اگر $P\supseteq I$، آن‌گاه $P\in Supp\, M/IM$ و در این حالت دیدیم $I_P^2M_P=(a_1,...,a_h)_P I_P M_P$. حال اگر $I\not\subset P$، آن‌گاه بنابر شرط(ب) از تعریف(۱۰) داریم $a\notin P$. بنابراین

$$.((a_1,...,a_h):a)_P M_P=(a_1,...,a_h)_P M_P$$

در هر حالت،

$$((a_1,...,a_h):a)_P M_P \cap I_P^2M_P = (a_1,...,a_h)_P I_P M_P$$

و (ج) ثابت می‌شود.
برای اثبات (د) ابتدا فرض می‌کنیم $n=1$. بنابر (ج) داریم: $I^2M\cap(a_1,...,a_h)M\subseteq ((a_1,...,a_h):a)M\cap I^2M=(a_1,...,a_h)IM$ و لذا $.I^2M\cap(a_1,...,a_h)M=(a_1,...,a_h)IM$
حال فرض کنیم $n>1$ و حکم برای $n-1$ برقرار باشد. فرض کنیم $x\in I^{n+1}M\cap(a_1,...,a_h)M$

$$=JI^nM\cap(a_1,...,a_h)M$$

چون $.r_J(I,M)\le 2$
در این صورت $x=b_1a_1+...+b_ha_h+ba$ که در آن $.b_i,b\in I^nM$ بنابراین بنابه فرض استقراء،

$$b\in I^nM\cap(a_1,...,a_h)M=(a_1,...,a_h)I^{n-1}M$$

در نتیجه $ba\in(a_1,...,a_h)I^nM$ و لذا $.x\in(a_1,....,a_h)I^nM$ علاوه بر این بنابر لم ۱، $a_1^*,....,a_h^*$ یک $G_M(I)$ - رشته منظم است.

مثال‌های زیادی از ایدآل‌های هم‌مضرب با عدد تقلیل ۱ وجود دارد. به ویژه، کار اخیر کورسو و همکاران[۸]، کورسو و پولینی[۶]،[۷] و پولینی و اولریچ[۲۳] نشان می‌دهد که چگونه می‌توان چنین ایدآل‌هایی را زنجیروار به دست آورد.
مثال زیر مثالی از یک ایدآل هم‌مضرب با عدد تقلیل۲ است که به طور صحیح بسته می‌باشد.

مثال ۱. فرض کنید

$$A=k[[X,Y,T_1,...,T_n]]/(X^3Y)$$
$$=k[[x,y,t_1,...,t_n]]$$

که در آن k یک میدان و $n\ge 3$ است. A یک حلقه کوهن - مکالی $(n+1)$- بعدی است و $I=(xy,t_1,...,t_n)\subseteq A$ یک ایدآل هم‌مضرب با $ht(I)=n$ و عدد تقلیل۲ است که به طور صحیح بسته می‌باشد؛ زیرا A/I تقلیل یافته[1] است.
در مجموع، برای به دست آوردن ایدآل‌هایی با انحراف تحلیلی یک و عدد تقلیل کوچک‌تر یا مساوی دو با عدد تقلیل موضعی یک می‌توانیم فرآیندی را که در مثال زیر آمده است پی بگیریم.

مثال ۲. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول و $I\subset A$ یک ایدآل نوعاً همبرش کامل نسبت به M با $ht_M(I)=h$ باشد. فرض کنید I ناآمیخته نسبت به M باشد، $r(I,M)=0$ و $.ad_M(I)=1$ در این صورت

[1]. Reduced

$I=(a_1,\dots,a_h,a_{h+1})$ که در آن $a_1,\dots,a_h$ یک M - رشته منظم است و به ازای هر ایدآل اول P که $P\supseteq I$ و $ht_M(P)=h$ داریم $I_P=(a_1,\dots,a_h)_P$. قرار دهید $B:=A/(a_1^2)$، $N:=M/(a_1^2)M$

و

$J:=(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_h,\bar{a}_{h+1})M\subset N$

که در آن $\bar{a}_i=a_i+(a_1^2)M$. از آن‌جا که $N/JM=M/IM$، پس J ناآمیخته نسبت به M است و داریم $ht_M(J)=h-1$. علاوه بر این، به ازای هر $q\supseteq I$ با $ht_M(q)=h-1$ داریم $J_q=(\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_h)_qM$ و $J_q{}^2=(\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_h)_qJ_qM$. بنابراین J_q هم‌مضرب نسبت به M است با عدد تقلیل۱، و این یعنی عدد تقلیل موضعی J مساوی۱ است. چون $J^2=(\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_h,\bar{a}_{h+1})JM$، داریم $ad_M(J)=1$ و $r(J,M)=1$. به طریق مشابه با درنظر گرفتن ایدآل‌های تقریباً همبرش کامل به دست آمده در [۲۵] و انجام فرآیندی که در مثال ۲ بیان شده است، می‌توانیم ایدآل J را طوری به دست آوریم که $depth(N/JM)<\dim(N/JM)-1$.

در لم زیر تعمیمی از یک نتیجه منسوب به هوکابا و مارلی[۱۸، قضیه ۱۰. ۳] را بیان می‌کنیم که ارتباط دهنده‌ی عمق با مدول مدرج وابسته و جبر ریس یک ایدآل نسبت به یک مدول است. ما از آن برای محاسبه‌ی عمق جبر ریس استفاده خواهیم کرد (قضیه ۵ را ملاحظه کنید).

لم ٤. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول کوهن – مکالی و $I\subseteq A$ یک ایدآل باشد. در این صورت $depth\,G_M(I)\le depth\,M$ و اگر $depth\,G_M(I)<depth\,M$، آن‌گاه $depth\ R_M(I)=depth\,G_M(I)+1$

تذکر۳. اگر J یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد، آن‌گاه

$Supp(M/IM)=Supp(M/JM)$. زیرا اگر $P\in Supp\left(M/JM\right)$ ولی $I\not\subset P$، آن‌گاه چون برای $n>>0$ داریم $I^{n+1}M=JI^nM$، خواهیم داشت $M_P=J_PM_P$. از آن‌جا طبق لم ناکایاما، $M_P=0$ که یک تناقض است. بنابراین $Supp(M/JM)\subseteq Supp(M/IM)$. عکس شمول واضح است.

تذکر٤. فرض کنید I ایدآلی از A و M یک A - مدول باشد. در این صورت

$grade(I,M)\le\mu(I)$

نتیجه‌ی زیر برای حالت حلقه‌ای معروف است. ما آن را برای حالت مدولی ثابت می‌کنیم.

لم ٥. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن – مکالی، M یک A- مدول کوهن – مکالی و I ایدآلی از A باشد. در این صورت

$ht_M(I)\le l_M(I)\le\dim M.$

برهان. فرض کنید $l_M(I)=s$ و J یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد. در این صورت طبق تذکر ۱، ٤ $\mu(J)=$. از تذکر ۳ نتیجه می‌شود که $\dim\left(M/IM\right)=\dim\left(M/JM\right)$. بنابراین $grade(I,M)=grade(J,M)$. چون M کوهن – مکالی است، پس $grade(I,M)=ht_M(I)$. بنابر تذکر ۴ داریم $grade(J,M)\le\mu(J)$. بنابراین $ht_M(I)\le l_M(I)$. برای نامساوی دیگر توجه داریم که بنابر تعریف ۱، $F_M(I)$ خارج قسمتی از $G_M(I)$ است. بنابراین $l_M(I)\le\dim G_M(I)=\dim M$

محاسبه عدد بورخ

این بخش را با ثابت کردن لمی آغاز می‌کنیم که برای کنترل عمق‌ها در روند استقراء بسیار مناسب است.

لم ٦. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول کوهن - مکالی و I ایدآلی از A باشد. فرض کنید $a_1,\dots,a_k$ یک خانواده از عناصر در $I\setminus I^2$ باشد به طوری‌که $a_1^*,\dots,a_k^*$ یک $G_M(I)$- رشته منظم است. همچنین فرض کنید

$I_k := I/(a_1,\dots,a_k)$ و $A_k := A/(a_1,\dots,a_k)$ $(k\geq 1)$. در این صورت

(آ) اگر $depth\, M/I^2M < depth\, M/IM$، آن‌گاه

$depth\ A_kM/I_k^2M = depth\, M/I^2M$.

(ب) اگر $depth\, M/IM < depth\, M/I^2M$، آن‌گاه $depth\ A_kM/I_k^2M = depth\, M/IM - 1$.

(ج) اگر $depth\, M/IM = depth\, M/I^2M$، آن‌گاه

$depth\ A_kM/I_k^2M \geq depth\, M/IM - 1$.

برهان. از آن‌جا که خانواده $a_1^*,\dots,a_k^*$، $G_M(I)$-منظم است، پس $a_1,\dots,a_k$ تشکیل یک M- رشته منظم در A می‌دهد و به ازای هر $i=1,\dots,k$ داریم $(a_1,\dots,a_i)M\cap I^2M=(a_1,\dots,a_i)IM$.

برای هر $i=0,\dots,k-1$ می‌توانیم همریختی $A_iM/I_i^2M \to A_{i+1}M/I_{i+1}^2M$ را در نظر بگیریم (که در آن $A_0 := A$ و $I_\circ := I$)، که هسته‌ی

$$(a_{i+1})M/\left((a_{i+1})\cap I_i^2\right)M$$
$$=(a_{i+1})M/(a_{i+1})I_iM$$
$$\cong A_iM/I_iM$$

با M/IM یکریخت است. بنابراین به ازای هر $i=0,\dots,k-1$ رشته دقیق زیر را داریم:

$$0\to M/IM \to A_iM/I_i^2\,M$$
$$\to A_{i+1}M/I_{i+1}^2M \to 0 \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم

$$depth\, M/I^2M < depth\, M/IM$$

در این صورت، با به کارگیری پی در پی لم - عمق[1] برای رشته دقیق (۱) به ازای $i=0,\dots,k-1$ نتیجه می‌شود که $depth\, A_iM/I_i^2M = depth\, M/I^2M$ و (آ) ثابت می‌شود.

فرض می‌کنیم

$$depth\, M/IM < depth\, M/I^2M$$

در این صورت، از(۱) برای $i=0$ می‌توان به دست آورد که

$depth\, A_1M/I_1^2M < depth\, M/IM - 1$ به ویژه، $depth\, A_1M/I_1^2M < depth\, M/IM$ و با استفاده از (آ) برای هر $i=1,\dots,k$ داریم:

$$depth\, A_iM/I_i^2M =$$
$$depth\, A_1M/I_1^2M = deph\, M/IM - 1.$$

این قسمت (ب) را ثابت می‌کند.

حال فرض می‌کنیم $depth\, M/IM = depth\, M/I^2M$. در این حالت، با قرار دادن $i=0$ در(۱) داریم:

$$depth\, M/IM = depth\, M/I^2M$$
$$= depth\, A_1M/I_1^2M$$

یا $depth\, M/I^2M = depth\, M/IM$

یا $= depth\, A_1M/I_1^2M + 1$

$$depth\, A_1M/I_1^2M > depth\, M/IM$$
$$= depth\, M/I^2M$$

اگر

$depth\, A_1M/I_1^2M = depth\, M/IM - 1$،

آن‌گاه از (آ) نتیجه می‌شود که $depth\, A_1M/I_1^2M =$.

$$depth\, A_kM/I_k^2M = depth\, M/IM - 1$$

اگر $depth\, A_1M/I_1^2M > depth\, M/IM$، آن‌گاه با استفاده از (ب) داریم

[1]. Depth-Lemma

$depth\, A_2M / I_2^2M =$

$= {depthA_kM}/{I_k^2} = {depthM}/{IM} - 1$

در غیر این صورت

$depth\, A_1M / I_1^2M = depth\, M / IM$ و با تکرار استدلال فوق برای $i = 1,\dots,k-1$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که به ازای هر $i = 2,\dots,k$، $depth\, A_iM / I_i^2M \ge depth\, M / IM - 1$.

بنابراین در هر حالت به ازای $i = 1,\dots,k$ داریم $depth\, A_iM / I_i^2M \ge depth\, M / IM - 1$ و (ج) ثابت می‌شود.

برای ایدآل‌های هم‌مضرب با عدد تقلیل ۱ می‌توانیم عدد بورخ را به روش زیر محاسبه کنیم:

گزاره ۱. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول کوهن - مکالی و I یک ایدآل هم‌مضرب A نسبت به M باشد به طوری که $r(I,M) \le 1$. در این صورت $B(I,M) = depth\, M / IM.$

برهان. اثبات را با استقراء روی $h := ht_M(I)$ انجام می‌دهیم. فرض کنیم $J = (a_1,\dots,a_h)$ یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد که $I^2M = JIM$ در این صورت، $a_1^*,\dots,a_h^*$ یک $G_M(I)$- رشته منظم است.

اگر $h = 0$، آن‌گاه به ازای هر $n \ge 2$، $I^nM = 0$ و لذا برای هر $n \ge 1$،

$$depth\, M / I^nM = depth\, M = \dim M \ge depth\, M / IM$$

حال فرض می‌کنیم $h > 0$ و قرار می‌دهیم $A_1 := A/(a_1)$ و $I_1 := I/(a_1)$. در این صورت، A_1 یک حلقه کوهن - مکالی و I_1 یک ایدآل هم‌مضرب نسبت به M است که $r(I_1, M) \le 1$ و $ht_M(I_1) = h-1$. از طرف دیگر، به ازای هر $n \ge 2$ می‌توانیم همریختی پوشای $M / I^nM \to A_1M / I_1^nM$ را در نظر بگیریم به طوری که هسته‌ی $(a_1)M / \left(I^n \cap (a_1)\right)M \cong (a_1)M / (a_1)I^{n-1}M$ با $M / I^{n-1}M$ یکریخت است. بنابراین به ازای هر $n \ge 2$، رشته دقیق زیر را داریم:

$$0 \to M / I^{n-1}M \to M / I^nM \to A_1M / I_1^nM \to 0 \qquad (۲)$$

و لذا با استقراء روی n و h خواهیم داشت:

$$depth\, M / I^nM \ge \min\left\{ depth\, M / I^{n-1}M,\, depth\, A_1M / I_1^nM \right\} \ge depth\, M / IM.$$

لم ۷. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول تصویری و I ایدآلی از A باشد با $ht_M(I) = 0$. همچنین فرض کنید $a \in I$ وجود داشته باشد به طوری که یک عضو نامقسوم علیه صفر روی M باشد. در این صورت

(آ) $depth\, M / aIM = depth\, M / IM$ هرگاه $depth\, M / IM < \dim M / IM$.

(ب) $depth\, M / aIM = depth\, M / IM - 1$ هرگاه $depth\, M / IM = \dim M / IM$.

برهان. رشته‌های دقیق زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0 \to IM \to M \to M / IM \to 0, \qquad (۳)$$

$$0 \to IM / aIM \to M / aIM \to M / IM \to 0. \qquad (۴)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که $depth\, M / IM < \dim M / IM$. در این صورت از(۳) داریم $depth\, IM = depth\, M / IM + 1$ و لذا $depth\, IM / aIM = depth\, M / IM$، زیرا $a \notin Z_A(IM)$. این نتیجه به همراه(۴) ثابت می‌کند که $depth\, M / aIM = depth\, M / IM$ و بنابراین (آ) ثابت می‌شود.

حال فرض می‌کنیم که

$depth\ M/IM = \dim M/IM = \dim M$.

از(۳) داریم $depth\ IM = \dim M$ و لذا $depth\ IM/aIM = \dim M - 1$.

از(۴) نیز نتیجه می‌شود

$depth\ M/aIM = \dim M - 1 = depth\,M/IM - 1$

و بنابراین (ب) ثابت می‌شود.

برای ایدآل‌های با انحراف تحلیلی ۱ که دارای عدد تقلیل کوچکتر یا مساوی ۱ هستند نتیجه‌ی زیر را داریم به طوری که محاسباتی را که برادمن[۴] برای ایدآل‌های تقریباً همبرش بیان کرده است بازیابی می‌کند.

گزاره ۲. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول تصویری و I ایدآلی از A باشد که $ad_M(I)=1$ و $r(I,M)\le 1$. همچنین فرض کنید I نوعاً همبرش کامل نسبت به M باشد. در این صورت

$$B(I,M) = \min\{depth\ M/IM, \dim M/IM - 1\}.$$

برهان. نشان خواهیم داد اگر $depth\ M/IM < \dim M/IM$، آن‌گاه برای هر $n\ge 2$، $depth\ M/I^nM = depth\ M/IM$ و اگر $depth\ M/IM = \dim M/IM$، آن‌گاه برای هر $n\ge 2$، $depth\ M/I^nM = depth\ M/IM - 1$. این دو گزاره را با استقراء روی $h := ht_M(I)$ ثابت خواهیم کرد.

فرض کنیم $h=0$. در این صورت برای هر $n\ge 1$ و به ازای $a\notin Z_A(IM)$ای مشخص داریم $I^{n+1}M = aI^nM$. اگر $depth\ M/IM < \dim M/IM$، آن‌گاه با به کارگیری لم ۷ با استفاده از استقراء روی n برای هر $n\ge 1$ نتیجه می‌شود که

$depth\ M/I^{n+1}M =$
$depth\ M/I^nM = depth\,M/IM$

حال فرض می‌کنیم $depth\ M/IM = \dim M/IM$. در این صورت بنابر لم ۷ داریم:

$$depth\ M/I^2M = depth\ M/aIM = depth\,M/IM - 1$$

و می‌توان به استقراء نشان داد که برای هر $n\ge 2$،

$$depth\ M/I^{n+1}M = depth\ M/aI^nM = depth\ M/I^nM = depth\,M/IM - 1.$$

حال فرض می‌کنیم $h>0$ و $J=(a_1,\dots,a_h,a_{h+1})$ همانند آن‌چه که در لم ۲ آمده است، یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد با $I^2M = JIM$. در این صورت، رشته $a_1,\dots,a_h$ یک $G_M(I)$- رشته منظم است و اگر قرار دهیم $A_1 := A/(a_1)$ و $I_1 := I/(a_1)$ آن‌گاه A_1 یک حلقه کوهن - مکالی و I_1 یک ایدآل نوعاً همبرش کامل نسبت به M است با $ad_M(I_1)=1$، $r(I_1,M)\le 1$ و $ht_M(I_1) = h-1$. بار دیگر، از رشته دقیق(۲) به ازای هر $n\ge 1$، رشته دقیق زیر را داریم:

$$0 \to M/I^{n-1}M \to M/I^nM \to A_1M/I_1^nM \to 0,$$

و ادعا با استقراء روی h و n ثابت می‌شود.

برای عدد تقلیل کوچکتر یا مساوی۲ و عدد تقلیل موضعی کوچکتر یا مساوی۱ نتیجه‌ی زیر را داریم:

گزاره ۳. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول تصویری و I ایدآلی از A باشد به طوری‌که $ad_M(I)=1$، $r(I,M)\le 2$ و $r_h(I,M)\le 1$ که در آن $h = ht_M(I)$. فرض کنید I ناآمیخته نسبت به M باشد. در این صورت

$$B(I,M) \ge \min\{depth\ M/I^2M, depth\,M/IM - 1\}$$

علاوه بر این،

(آ) تساوی برقرار است هرگاه $ht_M(I)>0$ و $depth\, M/I^2M \neq depth\, M/IM$؛

(ب)

$$B(I,M)=\min\{\dim M/IM-1, depth\, M/IM\}$$

هرگاه $depth\, M/IM = depth\, M/I^2M$ و $h=0$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $h=0$. در این صورت، وجود دارد $a\notin Z_A(I^2M)$ به طوری‌که برای هر $n\geq 2$، $I^{n+1}M = aI^nM$. اگر $depth\, M/I^2M = depth\, M/IM$، آن‌گاه با به کارگیری پی در پی لم۷ برای هر $n\geq 2$، اگر $depth\, M/IM < \dim M/IM$، آن‌گاه داریم $depth\, M/I^nM = depth\, M/IM$ و برای هر $n\geq 3$، داریم

$depth\, M/I^nM = depth\, M/IM -1$.

بنابراین، در هر حالت به این نتیجه می‌رسیم که

$$B(I,M)=\min\{\dim M/IM-1, depth\, M/IM\}$$

و (ب) ثابت می‌شود.

حال نامساوی بیان شده را ثابت خواهیم کرد. ابتدا حالت $h=0$ را در نظر می‌گیریم. از (ب) می‌توانیم فرض کنیم $depth\, M/I^2M \neq depth\, M/IM$. اگر $depth\, M/I^2M < depth\, M/IM$، از لم ۷ نتیجه می‌شود که برای $n\geq 3$، $depth\, M/I^nM = depth\, M/I^2M$. نهایتاً، اگر $depth\, M/IM < depth\, M/I^2M$، با استفاده‌ی مجدد از لم ۷ می‌توانیم نتیجه بگیریم که به ازای هر $n\geq 3$، $depth\, M/I^nM \geq depth\, M/IM$. حال فرض کنیم $h>0$ و $J=(a_1,\dots,a_h,a_{h+1})$ همانند آن‌چه که در لم ۳ آمده است، تقلیل مینیمالی از I نسبت به M باشد به طوری که $a_1^*,\dots,a_h^*$ یک $G_M(I)$ - رشته منظم است.

از رشته دقیق(۲) برای هر $n\geq 3$، با استقراء روی n و h و بنابر لم۶ داریم:

$$\begin{aligned} depth\, M/I^nM &\geq \min\{depth\, M/I^{n-1}M, depth\, A_1M/I_1^nM\}\\ &\geq \min\{depth\, M/I^2M, depth\, M/IM-1, depth\, A_1M/I_1^2M\}\\ &\geq \min\{depth\, M/I^2M, depth\, M/IM-1\}. \end{aligned}$$

برای (آ) ابتدا فرض می‌کنیم $depth\, M/I^2M < depth\, M/IM$. در این صورت، از نامساوی نتیجه می‌شود که $depth\, M/I^nM \geq depth\, M/I^2M$ و لذا $B(I,M)=depth\, M/I^2M$. از طرف دیگر، اگر $depth\, M/IM < depth\, M/I^2M$، آن‌گاه بنابر لم۶،

$$depth\, A_hM/I_h^2M = depth\, M/IM-1$$

و با به‌کارگیری نتایج به دست آمده برای $h=0$ نتیجه می‌شود که

$depth\, A_hM/I_h^3M = depth\, M/IM-1$.

با استفاده از رشته دقیق زیر

$$0\to A_iM/I_i^2M \to A_iM/I_i^3M \to A_{i+1}M/I_{i+1}^3M\to 0 \qquad (5)$$

به ازای هر $i=0,\dots,h-1$، به همراه این واقعیت که در این حالت برای هر $i=0,\dots,h-1$ داریم

$$depth\, A_iM/I_i^2M = depth\, M/IM-1$$

و همچنین با در نظر گرفتن این که

$$depth\, A_hM/I_h^3M = depth\, A_hM = depth\, M/IM$$

داریم

$depth\, M/I^3M = depth\, M/IM-1$ و در نتیجه $B(I,M)=depth\, M/IM-1$.

ایدآل‌های هم‌مضرب

این بخش را با محاسبه عمق جبر ریس و مدول مدرج وابسته از ایدآل هم‌مضرب با عدد تقلیل ۱ آغاز می‌کنیم. به ویژه، برای ویژگی کوهن – مکالی [۲۷ ،گزاره ۴. ۷] را بازیابی می‌کنیم.

قضیه ۲. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن – مکالی، M یک A– مدول کوهن – مکالی و $I \subseteq A$ یک ایدآل هم‌مضرب A نسبت به M باشد به طوری‌که $r(I,M) \leq 1$. در این صورت (آ)

$$depth\ G_M(I) = depth\ M/IM + ht_M(I)$$

(ب) اگر $ht_M(I) \geq 2$، آن‌گاه

$$depth\ R_M(I) = depth\ M/IM + ht_M(I) + 1$$

برهان. برای حالتی که $ht_M(I) = 0$، اثبات را با استقراء انجام می‌دهیم. قرار دهید $h := ht_M(I)$. فرض کنیم $h = 0$. در این صورت $I^2M = 0$ و لذا $G_M(I) = M/IM \oplus IM$. بنابراین

$$depth\ G_M(I) = \min\{depth\ M/IM,\ depth\ IM\} = depth_M\ M/IM$$

حال فرض کنیم $h > 0$ و $J = (a_1, \dots, a_h) \subseteq I$ یک تقلیل مینمال از I نسبت به M باشد به طوری‌که $I^2M = JIM$. در این صورت، $a_1^*, \dots, a_h^*$ یک $G_M(I)$– رشته منظم است و $G_M(I)/(a_1^*, \dots, a_h^*) \cong G_{A_hM}(I_h)$ که در آن $A_h = A/(a_1, \dots, a_h)$ و $I_h = I/(a_1, \dots, a_h)$. بنابراین $depth\,G_M(I) = depth\,G_{A_hM}(I_h) + h$. چون I_h یک ایدآل هم‌مضرب نسبت به M است با $ht_M(I_h) = 0$ و $r(I_h, M) \leq$، پس نتیجه می‌گیریم که

$$depth\,G_{A_hM}(I_h) = depth\,A_hM/I_hM = depth M/IM$$

و بنابراین داریم

$$depth\,G_M(I) = depth\,M/IM + ht_M(I).$$

برای اثبات قسمت (ب) کافی است لم۴ را به کار بگیریم.

نتیجه ۱. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن – مکالی، M یک A– مدول کوهن – مکالی و $I \subseteq A$ ایدآل هم‌مضرب A نسبت به M باشد که $r(I,M) \leq 1$. در این صورت

$$depth\,G_M(I) = B(I,M) + l_M(I)$$

برهان. کافی است قضیه ۲ و گزاره ۱ را به کار بگیریم.

تذکر ۵. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن – مکالی، M یک A– مدول کوهن – مکالی و $I \subseteq A$ ایدآل هم‌مضرب A نسبت به M باشد که $r(I,M) = 1$. همچنین فرض کنید $ht_M(I) = 0$ و $I^nM = 0$، $n > 1$ در این صورت به ازای هر

$$depth\,R_M(I) = \min\{depth\,M/IM + 1, \dim M\}.$$

علاوه بر این، گزاره‌های زیر به طور بدیهی هم‌ارزند:

(آ) $R_M(I)$ کوهن – مکالی است.

(ب) $depth\,G_M(I) \geq \dim M - 1$.

(ج) $depth\,M/IM \geq \dim M - 1$.

در ادامه حالتی را فرض می‌کنیم که در آن ایدآل‌های هم‌مضرب دارای عدد تقلیل۲ هستند.

قضیه ۳. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن – مکالی، M یک A– مدول کوهن – مکالی و I ایدآل هم‌مضربی از A نسبت به M باشد. فرض کنید $r(I,M) \leq 2$ و I به طور صحیح بسته یا ناآمیخته نسبت به M باشد به طوری‌که $r_h(I,M) \leq 1$ و $h = ht_M(I)$. در این صورت

$$\min\{depth\,M/IM - 1, depth\,M/I^2M\} + ht_M(I) \leq depth\,G_M(I) \leq \min\{depth\,M/IM, depth\,M/I^2M\} + ht_M(I)$$

علاوه بر این،

(آ) اگر $ht_M(I)=0$، آن‌گاه

$$depth\, G_M(I) = \min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M\right\}$$

(ب) اگر $ht_M(I)>0$ و $depth\, M/I^2M \neq depth\, M/IM$، آن‌گاه

$$depth\, G_M(I) = \min\left\{depth\, M/IM-1, depth\, M/I^2M\right\} + ht_M(I).$$

برهان. فرض کنید $h=0$. در این صورت $I^3M=0$. بنابراین

$$G_M(I) = M/IM \oplus IM/I^2M \oplus I^2M$$

و

$$\min\{depth\, M/IM,\ depth\, G_M(I) = depth\, IM/I^2M, depth\, I^2M\}.$$

با به کارگیری لم – عمق برای رشته‌های دقیق زیر

$$0 \to IM \to M \to M/IM \to 0,$$
$$0 \to I^2M \to M \to M/I^2M \to 0,$$
$$0 \to IM/I^2M \to M/I^2M \to M/IM \to 0,$$
$$0 \to I^2M \to IM \to IM/I^2M \to 0,$$

داریم:

$$depth\, G_M(I) = \min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M\right\}.$$

حال فرض کنیم $h>0$. فرض می‌کنیم $J=(a_1,\ldots,a_h)$ همان‌طور که در لم۲ آمده است، یک تقلیل مینیمال از I نسبت به M باشد. قرار دهید $A_h := A/J$ و $I_h := I/J$. چون $a_1^*,\ldots,a_h^*$ یک $G_M(I)$ رشته منظم است، پس $G_M(I)/(a_1^*,\ldots,a_h^*) \cong G_{A_hM}(I_h)$ و لذا $depth\, G_M(I) = depth\, G_{A_hM}(I_h)+h$.

علاوه بر این، A_h یک حلقه کوهن – مکالی و I_h یک ایدآل هم‌مضرب نسبت به M است با $r(I_h,M)\le 2$ و $ht_M(I_h)=0$. بنابراین، با به کارگیری نتایج به دست آمده برای ایدآل‌های با ارتفاع صفر داریم:

$$depth\, G_M(I) = \min\left\{depth\, M/IM, depth\, A_hM/I_h^2M\right\} + h$$

در آخر، بنابر لم۶ داریم که اگر $depth\, M/IM \neq depth\, M/I^2M$، آن‌گاه

$$\min\left\{depth\, M/IM, depth\, A_hM/I_h^2M\right\} = \min\left\{depth\, M/IM-1, depth\, M/I^2M\right\}.$$

اگر $depth\, M/IM = depth\, M/I^2M$، آن‌گاه داریم:

$$\min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I_h^2M\right\} \ge depth M/IM-1$$

بنابراین، (ب) ثابت می‌شود و در هر حالتی نامساوی‌های قضیه برقرار می‌باشند.

نتیجه ۲. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول کوهن - مکالی و I یک ایدآل هم‌مضرب A نسبت به M باشد. فرض کنید $r(I,M)\le 2$ و I به طور صحیح بسته یا ناآمیخته نسبت به M باشد به طوری‌که $r_h(I,M)\le 1$ و $h=ht_M(I)$. در این صورت

$$B(I,M)+l_M(I)-1 \le depth\, G_M(I) \le B(I,M)+l_M(I)+1.$$

علاوه بر این،

$depth\, G_M(I) = B(I,M)+l_M(I)$ هرگاه $ht_M(I)=0$ یا این که $ht_M(I)>0$ و $depth\, M/IM \neq depth\, M/I^2M$.

برهان. به طور مستقیم از قضیه۳ و گزاره۱ نتیجه می‌شود. با به کارگیری مجدد لم۴ برای جبر ریس داریم:

قضیه ٤. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول کوهن - مکالی و I یک ایدآل هم‌مضرب A نسبت به M باشد. فرض کنید

$r(I,M)\le 2$ باشد و I به طور صحیح بسته یا ناآمیخته نسبت به M باشد با $r_h(I,M)\le 1$ که در آن $h=ht_M(I)\ge 3$. در این صورت

$$\min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M\right\}+ht_M(I)\le depth\, R_M(I)\le \min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M\right\}+ht_M(I)+1.$$

علاوه بر این، اگر $depth\, M/I^2M\ne depth\, M/IM$، آن‌گاه

$$depth\, R_M(I)=\min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M+1\right\}+ht_M(I).$$

مثال ۳. فرض کنید $I=(xy,t_1,\dots,t_n)$ ایدآلی باشد که در مثال۱ داده شده است. به آسانی می‌توان دید که $depth\, M/IM=\dim M/IM=1$ و $depth\, M/I^2M=0$. بنابراین در این حالت داریم

$$depth\, G_M(I)=B(I,M)+l_M(I)=n\ (<dim\, G_M(I)=n+1)$$

و $B(I,M)=depth\, M/I^2M=0$.

علاوه بر این،

$$depth\, R_M(I)=n+1 (<dim\, R_M(I)=n+2)$$

بار دیگر با به کارگیری محاسبات مربوط به عدد بورخ که در گزاره ۳ آمده است، داریم:

نتیجه ۳. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول تصویری و I یک ایدآل A باشد با $ad_M(I)=1$، $r(I,M)\le 2$ و $r_h(I,M)\le 1$ که $h=ht_M(I)$. همچنین فرض کنید I ناآمیخته نسبت به M باشد. در این صورت

$$B(I,M)+l_M(I)-1\le depth\, G_M(I)\le B(I,M)+l_M(I)+1.$$

علاوه بر این، اگر

$depth\, M/IM\ne depth\, M/I^2M$ و $ht_M(I)>0$، آن‌گاه

$$depth\, G_M(I)=B(I,M)+l_M(I).$$

همچنین برای جبر ریس با استفاده از لم ۴ نتیجه‌ی زیر را برای محاسبه عمق آن به دست می‌آوریم:

قضیه ۵. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی کوهن - مکالی، M یک A- مدول کوهن - مکالی و I ایدآل A باشد با $ad_M(I)=1$، $r(I,M)\le 2$ و $r_h(I,M)\le 1$. همچنین فرض کنید I ناآمیخته نسبت به M باشد و $h=ht_M(I)\ge 2$. در این صورت

$$\min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M\right\}+ht_M(I)+1\le depth\, R_M(I)\le \min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M\right\}+ht_M(I)+2.$$

علاوه بر این، اگر $depth\, M/I^2M\ne depth\, M/IM$، آن‌گاه

$$depth\, R_M(I)=\min\left\{depth\, M/IM, depth\, M/I^2M+1\right\}+ht_M(I).$$

تعمیم نامساوی بورخ

فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی و I ایدآلی از A باشد. نامساوی زیر به نامساوی بورخ معروف است:

$$l(I)+\inf\left\{depth\, A/I^n : n\ge 1\right\}\le \dim A$$

تساوی زمانی برقرار است که $G_A(I)$ کوهن - مکالی باشد. این مطلب توسط ایزنباد و هونیکه ثابت شده است[۹، گزاره ۳. ۳]. در این بخش می‌خواهیم نامساوی را در حالت مدولی ثابت کنیم و نشان می‌دهیم تساوی زمانی برقرار است که $G_M(I)$ کوهن - مکالی باشد. برای اثبات نامساوی بورخ برای مدول‌ها به لم زیر نیاز

داریم. اثبات مشابه آن چیزی است که در[۲۰، لم ۱. ۲] آمده است و از نمادهای به کار رفته در آن‌جا استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم $G = G_A(I)$ و $B(I,M) = \inf\left\{ depth\, M / I^n M : n \geq 1 \right\}$.

لم ۸. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی و M یک A- مدول باشد. در این صورت

$$grade\left(mG, G_M(I)\right) = \inf\left\{ depth M / I^n M : n \geq 1 \right\}.$$

برهان. فرض کنید $r = grade(mG, G_M(I))$ و $s = B(I,M)$. حکم را با استقراء روی r ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $r=0$. در این صورت $P \in AssG_M(I)$ وجود دارد که $mG \subseteq P$. بنابراین به ازای $f \in G_M(I)$ ای همگن داریم $P = (0 :_G f)$. حال فرض کنید $n = \deg(f)$. چون $mf = 0$، پس داریم $m \in Ass_R G_M(I)_n \subseteq Ass\, M / I^{n+1} M$. بنابراین $depth M / I^n M = 0$.

حال فرض می‌کنیم $r > 0$. همچنین فرض می‌کنیم $a \in m$ به‌گونه‌ای باشد که تصویر آن در $G_R(I)$، $G_M(I)$- منظم است. در این صورت به سادگی نتیجه می‌شود که a روی $M / I^n M$ به ازای هر $n \geq 1$ منظم است. لذا نتیجه می‌گیریم که $s > 0$. قرار می‌دهیم $S = A/aA$، $n = mG$، $\bar{I} = I$ و $N = M / aM$. با استفاده از قضیه والابرگا والا[۲۸، قضیه ۲.۶] داریم $G_N(\bar{I}) = G_M(I) / aG_M(I)$. بنابراین $grade\left(nG_S(\bar{I}), G_N(\bar{I})\right) = r-1$.

بنابر فرض استقراء داریم $\inf\left\{ depth N / I^n N : n \geq 1 \right\} = r-1$. چون a، $M / I^n M$- منظم است، به ازای هر $n \geq 1$ داریم

$$depth\left(M / I^n M\right) = depth\left(N / I^n N\right) + 1$$

و درنتیجه حکم ثابت می‌شود.

حال نامساوی بورخ را در حالت مدولی ثابت می‌کنیم.

لم ۹. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول و I یک ایدآل در A باشد. در این صورت

$$l_M(I) + B(I,M) \leq \dim M.$$

برهان.

$$l_M(I) = \dim G_M(I) / mG_M(I)$$
$$\leq \dim G_M(I) - grade\left(mG, G_M(I)\right)$$

(بنابر لم ۸)

سرانجام نتیجه‌ی ایزنباد و هونیکه[۹، گزاره ۳. ۳] را برای مدول‌ها تعمیم می‌دهیم. اما قبل از آن به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱۰. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول و I یک ایدآل در A باشد. اگر $x \in m \setminus I$ و x^* یک عضو $G_M(I)$- منظم باشد، در این صورت

$$l_{\overline{M}}\left((I,x)/(x)\right) = l_M(I)$$

که در آن $\overline{M} = M / xM$.

برهان. قرار دهید $T := A/(x)$ و $K := (I,x)/(x)$.

فرض کنید $R_M(I) = \oplus_{n\geq 0} I^n M t^n$ و $T_{\overline{M}}(K) = \oplus_{n\geq 0} K^n \overline{M} t^n$. ابتدا نشان می‌دهیم که $T_{\overline{M}}(K) = R_M(I)/(x)R_M(I)$.

توجه داریم که

$$K^n \overline{M} = \frac{(I^n, x)}{(x)} \overline{M} =$$
$$\frac{I^n M + xM}{xM} \cong \frac{I^n M}{xM \cap I^n M}$$

چون x^*، $G_M(I)$- منظم است، پس به ازای هر n داریم $xM \cap I^n M = xI^n M$. بنابراین

$$\frac{I^n M}{xM \cap I^n M} \cong \frac{I^n M}{xI^n M}.$$

و لذا یکریختی‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$T_{\overline{M}}(K) = \oplus_{n\geq 0} K^n \overline{M} t^n \cong$$
$$\oplus_{n\geq 0} \frac{I^nM}{xI^nM} t^n \cong R_M(I)/(x)R_M(I).$$

حال از این یکریختی نتیجه می‌شود که

$$\frac{R_M(I)}{m\mathrm{R}_M(I)} \cong \frac{\mathrm{T}_{\overline{M}}(K)}{m/x\mathrm{T}_{\overline{M}}(K)}$$

بنابراین $l_{\overline{M}}\left((I,x)/(x)\right) = l_M(I)$ و حکم ثابت می‌شود.

قضیه ٦. فرض کنید (A,m) یک حلقه موضعی، M یک A- مدول و I یک ایدآل در A باشد. فرض کنید $G_M(I)$ کوهن - مکالی باشد. در این صورت
$l_M(I) + B(I,M) = \dim M.$

برهان. فرض کنید $s = B(I,M)$. حکم را با استقراء روی s ثابت می‌کنیم. نخست فرض می‌کنیم $s=0$. قرار می‌دهیم $J = m\mathrm{G}_A(I)$. بنابر تعریف ۲ داریم $l_M(I) = \dim\left(G_M(I)/JG_M(I)\right)$. در ابتدا نشان می‌دهیم که $grade(J, G_M(I)) = 0$. بنابر فرض خلف گیریم $grade(J, G_M(I)) > 0$. در این صورت می‌توان عضو $x \in m \setminus I$ را انتخاب کرد به طوری‌که $x^* \in A/I$ یک مقسوم علیه ناصفر روی $G_M(I)$ است. از این‌جا نتیجه می‌شود که x به ازای هر $n \geq 1$، یک عضو مقسوم علیه ناصفر روی M/I^nM است. اما این با فرض $s=0$ در تناقض است. بنابراین $grade(J, G_M(I)) = 0$. حال از آن‌جا که $G_M(I)$ کوهن - مکالی است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\dim\left(G_M(I)/JG_M(I)\right) =$$
$$\dim\left(G_M(I)\right) - grade\left(J, G_M(I)\right)$$
$$= \dim\left(G_M(I)\right).$$

بنابراین $l_M(I) = \dim M$. حال فرض می‌کنیم $s > 0$. چون $\cup_{n\geq 1} Ass\left(M/I^nM\right)$ متناهی است[۲]، می‌توان عضو A- منظم $x \in m$ را انتخاب کرد به طوری که به ازای هر $n \geq 1$، روی M/I^nM نیز منظم است. از این نتیجه می‌شود که $x^* \in A/I$ ، $G_M(I)$- منظم است. بنابراین داریم:

$$G_M(I)/(x^*)G_M(I) = G_{\overline{M}}(\bar{I})$$

که در آن $\bar{I} = IA/(x)$ و $\overline{M} = M/(x)M$.
چون $G_M(I)$ کوهن - مکالی است و x^*، $G_M(I)$ - منظم است، پس $G_{\overline{M}}(\bar{I})$ کوهن - مکالی است. بنابراین $\dim M = \dim \overline{M} + 1$. از طرفی از لم ۱۰ نتیجه می‌شود که $l_{\overline{M}}(\bar{I}) = l_M(I)$. چون x یک رشته منظم روی M/I^nM است، پس داریم $depth\overline{M}/\bar{I}^n\overline{M} = depth M/I^nM - 1$. بنابراین $\inf\left\{depth\,\overline{M}/\bar{I}^n\overline{M} : n \geq 1\right\} = s-1$. حال حکم با استفاده از فرض استقراء ثابت می‌شود.

فهرست منابع

[1] Aberbach. I.M (1995). Local reduction numbers and Cohen–Macaulayness of associated graded rings, J. Algebra .

[2] Brodmann. M (1979). Asymptotic stability of Ass(M/I^nM), Proc. Math.

[3] Brodmann. M (1979). The asymptotic nature of the analytic spread, Math. Proc. Cambridge Philos.

[4] Brodmann. M (1982). Rees rings and form rings of almost complete intersections, Nagoya Math.

[5] Burch. L (1972). Codimension and analytic spread, Proc. Cambridge Philos.

[6] Corso. A, Polini. C (1995). Links of prime ideals and their Rees algebras, J.

[7] Corso. A, Polini. C (1997). Reduction numbers of links of irreducible varieties, J. Pure Appl.

[8] Corso. A, Polini. C, Vasconcelos. W.V (1994). Links of prime ideals, Math. Proc. Cambridge Philos.

[9] Eisenbud. D, Huneke. C (1983). Cohen–Macaulay Rees algebras and their specialization, J.

[10] Elias. J (1996). The regularity index and the depth of the tangent cone of curve singularitie, Japan J.

[11] Goto. S, Huckaba. S (1994). On graded rings associated to analytic deviation one ideals, Amer. J.

[12] Goto. S, Nakamura. Y (1994). On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one, Contemp.

[13] Goto. S, Nakamura Y, Nishida K (1996). Cohen–Macaulay graded rings associated to ideals, Amer. J.

[14] Herrmann. M, Ikeda. S, Orbanz U (1988). Equimultiplicity and Blowing Up, Springer-Verlag, Berlin.

[15] Herrmann. M, Ribbe. J, Zarzuela. S (1993). On Rees and form rings of almost complete intersections.

[16] Huckaba. S, Huneke. C (1992). Powers of ideals having small analytic deviation, Amer. J.

[17] Huckaba. S, Huneke. C (1993). Rees algebras of ideals having small analytic deviation, Trans. Amer.

[18] Huckaba. C, Marley. T (1994). Depth formulas for certain graded rings associated to an ideal, Nagoya.

[19] Johnson. M, Ulrich. B (1996). Artin-Nagata properties and Cohen-Macaulay associated graded rings, Compositio Math.

[20] Kinoshita. Y, Nishida. K, Yamanaka. Y, Yoneda. A (2006). On Burch's inequality and a reduction system of a filtration, Proc. Amer.

[21] Korb. T (1995). On a-invariants, filter regularity and the Cohen-Macaulayness of graded algebras, Thesis, University of Cologne.

[22] Northcott. D.G. Rees. D (1954). Reduction of ideals in local rings, Proc. Cambridge Philos.

[23] Polini. C, Ulrich. B (1998). Linkage and reduction numbers.

[24] Puthenpurakal. T (2003). Hilbert-coefficients of a Cohen-Macaulay module, J.

[25] Schenzel. P (1982). A note on almost complete intersections, in: Seminar Eisenbud D., Singh B., Vogel W.,Teubner-Texte zur Mathematik 48(2).

[26] Sharp. R.Y, Tiras. Y, Yassi. M (1990). Integral Closure of ideals relative to local cohomology modules over quasi-unmixed local rings, J.

[27] Trung. N.V, Ikeda. S (1989). When is the Rees algebra Cohen–Macaulay?

[28] Valabrega. P, Valla. G (1978). Form rings and regular sequences.

[29] Vasconcelos. W.V (1994). in: Arithmetic of Blowup Algebras, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Vol. 195, Cambridge University Press, Cambridge.

[30] Zarzuela. S (1995). On the depth of blow up algebras of ideals with analytic deviation one, Proc. Amer.