

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# معادلات اوپلر-لاگرانژ و مکانیک هندسی بر گروه‌های لی با پتانسیل

علی سوری\*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

## چکیده

فرض کنید  $G$  یک گروه لی، احتمالاً با بعد نامتناهی، مدل شده بر فضای باناخ  $E$  باشد. در این مقاله ابتدا معادلات اوپلر-لاگرانژ بر گروه لی  $G$  با متر پایای راست در حضور پتانسیل را معرفی می‌کنیم. معادلات اوپلر-لاگرانژ تعمیم طبیعی معادلات ژئودزیک بر منیفلدها و گروه‌های لی است. در بخش دوم، هندسه سیستم مکانیکی حرکت یک جسم صلب با یک نقطه ثابت در میدان گرانش را مطالعه می‌کنیم. این سیستم مکانیکی را معمولاً با نام فریره متقارن می‌شناسند. سپس نشان می‌دهیم که معادلات استخراج شده توسط این نظریه با معادلات شناخته شده فریره منطبق هستند. در پایان، به عنوان یک مثال از حالت بعد نامتناهی، به مطالعه معادلات کاماسا-هلم بر گروه بات-ویراسورو در حضور پتانسیل می‌پردازیم. گروه بات-ویراسورو به صورت حاصل ضرب گروه همه وابرسی‌های دایره از کلاس سوبولف با خط حقیقی می‌باشد و منظور ما از یک پتانسیل بر گروه لی  $G$ ، یک تابع مشتق پذیر از  $G$  به خط حقیقی است.

واژه‌های کلیدی: لاگرانژی، اسپری، معادلات اوپلر-لاگرانژ، جسم صلب، معادلات کاماسا-هلم.

## ۱- مقدمه

مطالعه جواب معادلات اویلر-لاگرانژ به عنوان ژئودزیک بر گروه‌های لی بامترهای پایای راست نخستین بار توسط آرنولد [۲، ۳] مطرح شد. این و مارسدن در [۵] این مسئله را برای حالت سیال تراکم ناپذیر ایده‌آل بررسی کردند و به مطالعه شرایط وجود جواب پرداختند. پس از آن معادلات متعددی به‌عنوان ژئودزیک بر گروه‌های لی متناظر بررسی شدند [۱، ۱۰، ۱۳، ۱۲].

در این مقاله به بررسی سیستم‌های مکانیکی و معادلاتی که دارای تابع پتانسیل هستند می‌پردازیم. پس از معرفی متریک و گروه مناسب متناظر با این سیستم‌ها، به استخراج معادلات حرکت به عنوان شارژ ژئودزیک می‌پردازیم. در این روش علاوه بر اثبات وجود جواب، به تغییرات پیوسته نسبت به شرایط مرزی نیز توجه می‌شود. معرفی اسپری (میدان برداری مرتبه دوم) متناظر با یک سیستم مکانیکی ابتدا توسط این و مارسدن در [۵] مطرح شد. این اسپری در بحث آنالیز غیر خطی و معادلات با مشتقات جزئی داری اهمیت ویژه‌ای است [۶]. در حقیقت اگر این اسپری معرفی شود آنگاه کلیه حالات ممکن و دینامیک سیستم به‌عنوان جواب‌های یک معادله دیفرانسیل معمولی مشخص می‌شوند. به علاوه با معرفی این معادلات دیفرانسیل معمولی بررسی نظریه اغتشاش، انشعاب و پایداری و ارتباط آنها با خمیدگی ممکن می‌شود [۶، ۱۱]. در این راستا ما برای نخستین بار به معرفی اسپری گروه‌های لی با تابع پتانسیل می‌پردازیم. گروه‌های لی مورد بحث در این قسمت ممکن است دارای بعد متناهی و یا نامتناهی باشند. پس از معرفی این مفهوم اساسی در بخش نخست، به بررسی دو مساله در حالت های بعد متناهی و نامتناهی می‌پردازیم.

اولین مثال در بخش دو مطرح می‌شود که به بررسی حرکت یک جسم صلب در  $\mathfrak{R}^3$  با یک نقطه ثابت و تحت تاثیر گرانش می‌پردازد. حرکت این جسم صلب، فرقه، یکی از معروف‌ترین سیستم‌های مکانیکی در مکانیک کلاسیک است. این سیستم شامل یک جسم صلب با یک نقطه ثابت است که تحت تاثیر گرانش حرکت می‌کند. در مورد پایداری و مطالعه توپولوژیکی این

سیستم مطالعات بسیاری انجام شده است [۷، ۸]. همان‌طور که خواهیم دید، دینامیک این سیستم به عنوان معادلات حرکت یک لاگرانژی بر یک گروه لی با بعد متناهی قابل طرح است. در ادامه نشان می‌دهیم که معادلات استخراج شده توسط نظریه ما، بر معادلات شناخته شده حرکت فرقه منطبق می‌شوند.

در بخش سوم با ارائه یک مثال از حالت بعد نامتناهی، به مطالعه معادلات حرکت بر گروه بات-ویراسورو در حضور پتانسیل می‌پردازیم. با انتخاب لاگرانژی و متر پایای راست مناسب بر گروه نامتناهی بعد  $D^*(S^1) \times \mathfrak{R}$  نشان می‌دهیم معادلات اویلر لاگرانژ با تابع پتانسیل دارای جواب می‌باشند و در حالتی که پتانسیل صفر باشد نتایج مقاله [۱۰] حاصل می‌شود.

## ۲- معادلات اویلر لاگرانژ بر گروه‌های لی با متر

### پایا و پتانسیل

فرض کنید  $M$  یک منیفلد مدل شده بر فضای باناخ (احتمالاً با بعد نامتناهی  $E$ ) باشد. به علاوه فرض کنید  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  یک متر ریمانی (یا شبه‌ریمانی) بر  $M$  و  $\mathfrak{R} : M \rightarrow V$  یک تابع دیفرانسیل‌پذیر (تابع پتانسیل) باشد. لاگرانژی

$$L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$v \in T_g M \mapsto \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_g + V(g)$$

را در نظر بگیرید. به‌طور موضعی برای هر  $(g, v) \in TM$  نگاشت

$$\partial_2^2 L(g, v) : L_{sym}(E \times E) \rightarrow \mathfrak{R}$$

را در نظر بگیرید که در اینجا  $\partial_2$  یعنی مشتق نسبت به مولفه دوم و  $L_{sym}(E \times E)$  نشان‌دهنده فضای همه توابع پیوسته و دو خطی و متقارن از  $E \times E$  به  $E$  است (برای جزئیات بیشتر به [۴] مراجعه شود). در حالت بعد متناهی اگر  $(x_i, y_j)_{1 \leq i, j \leq \dim M}$  یک نقشه برای  $TM$  باشد

آنگاه ماتریس  $(\frac{\partial^2 L}{\partial y_j \partial y_k})_{1 \leq j, k \leq \dim M}$  معرف  $\partial_2^2 L$  می‌باشد.

اگر به ازای هر  $(g, v) \in TM$  نگاشت  $\partial_2^2 L$  (یا به‌طور معادل در حالت بعد متناهی ماتریس متناظر)

توسط  $R_g(h) = hg$  مشخص می‌شود. اگر انتقال راست‌ها ایزومتري باشند، آنگاه متر را پایای راست می‌نامند. هرچند که در مورد سیستم‌های لاگرانژی با پتانسیل معادلات اویلر لاگرانژ کاملاً شناخته شده هستند [۱۳]، اما هیچ مرجعی به مطالعه اسپری متناظر با این لاگرانژی‌ها نپرداخته است. در این روش معادلات با مشتقات جزئی را به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی (اسپری و ژئودزیک) بیان می‌کنیم. در این حالت اثبات وجود و یکتایی جواب این معادلات و بررسی تغییرات هموار نسبت به شرایط مرزی ممکن است.

فرض کنید

$$U : M \rightarrow \mathfrak{R}$$

یک تابع (پتانسیل) مشتق‌پذیر باشد. لاگرانژی

$$L(g, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_g + U(g)$$

را بر  $G$  در نظر بگیرید.

**قضیه ۲،۴.** اسپری لاگرانژی فوق توسط معادله  $s(v) = T\rho^{-1} \circ \bar{s} \circ \rho(v)$  مشخص می‌شود که در آن  $\bar{s}(g, \xi) = (T_g R_g \xi, \xi, \xi, -B(\xi, \xi) + T_g R_{g^{-1}} \text{grad} U_g)$ .

**اثبات.** فرم همتافته  $\omega_L$  متناظر با لاگرانژی  $L$  عبارت‌است از

$$\begin{aligned} \omega_L(x, y)((z_1, w_1), (z_2, w_2)) \\ = \partial_1 \partial_2 L(x, y)[z_1, z_2] - \partial_1 \partial_2 L(x, y)[z_2, z_1] \\ + \partial_2 \partial_2 L(x, y)[z_1, w_2] - \partial_2 \partial_2 L(x, y)[z_2, w_1] \end{aligned}$$

که در آن  $(x, y) \in T_x G$  و  $(z_i, w_i)_{i=1,2} \in T_{(x,y)} TG$  می‌باشند. برگردان فرم  $\omega_L$  توسط نگاشت  $\rho$  را با  $\omega_s = \rho^* \omega_L$  نمایش می‌دهیم. بنابر گزاره ۴،۴،۲ از [۱] برای هر  $\xi, \eta, v, w \in T_g G$  داریم:

$$\begin{aligned} \omega_s(g, \xi)((v, z), (w, \eta)) = -\langle z, T_g R_{g^{-1}} w \rangle_e \\ - \langle \xi, [T_g R_{g^{-1}} v, T_g R_{g^{-1}} w] \rangle_e + \langle \eta, T_g R_{g^{-1}} v \rangle_e \end{aligned} \quad (1)$$

را در نظر بگیرید که ضابطه

ناتبیهگون باشد، آنگاه لاگرانژی  $L$  را منظم می‌نامند. در این مقاله تمام لاگرانژی‌های مطرح شده منظم هستند. مفاهیم و قضیه بعد را از [۱] و [۴] بیان می‌کنیم.

**تعریف ۲،۱.** نگاشت  $S : TM \rightarrow TTM$  را یک اسپری می‌نامیم هر گاه به‌طور موضعی نگاشت  $X : E \times E \rightarrow E$  وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر  $(g, v) \in TM$  داشته باشیم.

$$S(g, v) = (g, v, v, X(g, v))$$

**تعریف ۲،۲.** خم  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow M$  ژئودزیک برای اسپری  $S$  می‌نامیم هرگاه در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم  $\gamma''(t) = S(\gamma'(t))$  صدق کند.

**قضیه ۲،۳.** فرض کنید  $L$  یک لاگرانژی منظم بر منیفلد ریمانی  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  باشد. در این صورت میدان برداری مرتبه دوم  $S : TM \rightarrow TTM$  وجود دارد به طوری که برای هر  $(g, v) \in TM$  موضعاً  $S(g, v) = (g, v, v, X_L(g, v))$  است و در آن

$$X_L(g, v) = (D_2 D_2 L(g, v))^{-1} \alpha$$

و

$$\alpha = D_1 L(g, v) - D_1 D_2 L(g, v) \cdot v$$

می‌باشند. به علاوه ژئودزیک‌های  $S$  جواب‌های معادله اویلر لاگرانژ هستند.

یادآوری می‌کنیم که خم  $c : I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow M$  در معادله اویلر لاگرانژ صدق می‌کند هرگاه معادله

$$\frac{d}{dt} D_2 L(c(t), \dot{c}(t)) = D_1 L(c(t), \dot{c}(t))$$

برقرار باشد. در ادامه به بررسی معادلات اویلر-لاگرانژ بر گروه‌های لی با مترهای پایای راست می‌پردازیم. ایزومورفیسم

$$\begin{aligned} \rho : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g} \\ (g, v) \mapsto (g, TR_{g^{-1}} v) \end{aligned}$$

$$R_g : G \rightarrow G$$

$$\begin{aligned} &= \langle \xi, ad_{\xi}^* T_g R_{g^{-1}} \rangle_e \\ &= \langle ad_{\xi}^* \xi, T_g R_{g^{-1}} \rangle_e. \end{aligned}$$

چون به ازای هر  $w \in T_g G$  معادله فوق برقرار است

پس

$$\bar{X}(g, \xi) - T_g R_{g^{-1}} \text{grad} U(g) = ad_{\xi}^* \xi$$

یعنی

$$\begin{aligned} &\bar{s}(g, \xi) \\ &= (g, \xi, \xi, ad_{\xi}^* \xi - T_g R_{g^{-1}} \text{grad} U(g)). \end{aligned}$$

### ۳- شار ژئودزیک جسم صلب- فریره

در حالتی که  $G = SO(n)$  باشد نگاهت‌های  $\rho: TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}$  و  $T\rho$  به سادگی قابل محاسبه هستند. در حقیقت برای هر  $v \in T_g G$  داریم

$$\rho(v) = (g, T_g R_{g^{-1}} v) = (g, v g^{-1})$$

هم‌چنین  $\rho^{-1}(g, \xi) = \xi g$ . اکنون فرض کنید  $g \in G$  و  $\xi, h, \eta \in \mathfrak{g}$  و  $(g(t), \xi(t))$  خم‌هایی باشند که در لحظه  $t=0$  از  $(g, \xi)$  با سرعت  $(h, \eta)$  عبور می‌کنند. در این صورت

$$\begin{aligned} &T_{(g, \xi)} \rho^{-1}(h, \eta) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho^{-1}(g(t), \xi(t)) \\ &= (g, \xi g, \xi g, \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \xi(t) g(t)) \\ &= (g, \xi g, \xi g, '(0)\xi(0) + g(0)\xi'(0)) \\ &= (g, \xi g, \xi g, \xi h + \eta g). \end{aligned}$$

در نتیجه اسپری  $S$  به صورت زیر مشخص می‌شود

$$\begin{aligned} T\rho^{-1} \bar{s} \circ \rho(g, v) &= T\rho^{-1} \circ \bar{s}(g, \xi) \\ &= T\rho^{-1}(g, \xi, \xi, ad_{\xi}^* \xi - T_g R_{g^{-1}} \text{grad}_g U) \\ &= (g, \xi g, \xi g, \xi \xi + ad_{\xi}^* \xi g - \text{grad}_g U). \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $v: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{g}$  با شرط

که در آن  $TR$  نشان‌دهنده نگاهت مشتق  $R$  می‌باشد و  $e$  عضو همانی گروه لی است. مشتق تاری را با  $FL$  نمایش می‌دهیم که برای هر  $v, w \in T_g G$  توسط ضابطه

$$FL(v)w = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(v+tw)$$

تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم

$$E(v) = FL(v)v - L(v).$$

در این صورت بنابر [۱] میدان برداری مرتبه دوم  $\bar{s}$  توسط معادله  $i_{\bar{s}} \omega_s = d\rho^* E$  مشخص می‌شود. با توجه به ضابطه لاگرانژی  $L$  برای هر  $v \in T_g G$  داریم

$$\begin{aligned} FL(v)v &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(v+tv) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \frac{1}{2} \langle v+tv, v+tv \rangle_g - U(g) \right) \\ &= \langle v, v \rangle_g \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} E(v) &= \langle v, v \rangle_g - \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_g + U(g) \\ &= \frac{1}{2} \langle v, v \rangle_g + U(g). \end{aligned}$$

پس برای  $w \in T_g G$ ،  $\bar{s}: G \times \mathfrak{g} \rightarrow G \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$  داریم

$$\begin{aligned} \omega_s(g, \xi)(\xi, \bar{X}(g, \xi), (w, \eta)) \\ &= -\langle \bar{X}(g, \xi), T_g R_{g^{-1}} w \rangle_e + \langle \eta, \xi \rangle_e \\ &\quad - \langle \xi, [\xi, T_g R_{g^{-1}} w] \rangle_e. \end{aligned} \quad (2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d\rho^* E(g, \xi)(w, \eta) &= \langle \xi, \eta \rangle_e + dU(g)w \\ &= \langle \xi, \eta \rangle_e + \langle \text{grad} U(g), w \rangle_e \\ &= \langle \xi, \eta \rangle_e + \langle T_g R_{g^{-1}} \text{grad} U(g), T_g R_{g^{-1}} w \rangle_e \end{aligned}$$

و طبق معادله  $i_{\bar{s}} \omega_s = d\rho^* E$  داریم:

$$\begin{aligned} \langle \bar{X}(g, \xi) - T_g R_{g^{-1}} \text{grad} U(g), T_g R_{g^{-1}} w \rangle_e \\ &= \langle \xi, [\xi, T_g R_{g^{-1}} w] \rangle_e \end{aligned}$$

کنید. چون جسم صلب است می‌توان نوشت  
 $\xi(t, x) = W(t)x$  که  $W(t) \in SO(3)$  و  
 $SO(3) = \{A \in \text{Mat}(3 \times 3); A^t A = I_{3 \times 3}, \det(A) = 1\}$ .

بنابراین داریم

$$I(\xi) = \frac{1}{2} \int_a^b \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) |W'(t)W(t)^{-1}|^2 dy dt$$

$$- g \int_a^b \int_{\mathbb{R}^3} \rho(y) W(t)^{-1} y dy dt \quad (2)$$

که  $y = Wx$ . بنابر [۱۳] داریم

$$\rho(y)(Ay, By) dy = \text{Tr}(B^t A I_p)$$

$$= \text{Tr}(A I_p B^t)$$

که در اینجا  $I_p = \int \rho(y) y \otimes y dy$  یک ماتریس  
 $3 \times 3$  با درایه‌های حقیقی است. هم چنین قرار می‌دهیم  
 $\sigma = \int \rho(y) y dy \in \mathfrak{R}^3$

بنابراین معادله (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I(W)$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \text{Tr}(W'(t)W(t)^{-1} I_p (W'(t)W(t)^{-1})^t) dt$$

$$- g \int_a^b \sigma \cdot W \gamma_0 dt.$$

حال اگر  $B(V, W) := \text{Tr}(V I_p W^t)$  و  
 $\mathbf{V}(p) = g \sigma \cdot p \gamma_0$  آنگاه با فرض  
 $L(p, V) = \frac{1}{2} B(V p^{-1}, V p^{-1}) - \mathbf{V}(p)$  و با توجه به  
 گزاره ۲.۴ برای  $W : I \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow SO(3)$  و  
 $Z = W'W^{-1}$  داریم

$$\frac{d}{dt} Z = \text{ad}_Z^* Z - \text{TR}_{W(t)^{-1}} \text{grad}_{W(t)} V.$$

در نتیجه برای هر  $Y \in \mathfrak{so}(3) = T_I SO(3)$  می‌توان  
 نوشت

$$B\left(\frac{d}{dt} Z, Y\right) = B(\text{ad}_Z^* Z, Y)$$

$$- B(\text{TR}_{W(t)^{-1}} \text{grad}_{W(t)} V, Y)$$

$v(t) \in T_{g(t)} G$  یک خم انتگرال برای  $S$  باشد یعنی

$$\frac{d}{dt} v(t) = s(v(t)).$$

با قرار دادن  $u(t) = v(t)g(t)^{-1}$  می‌بینیم که

$$\frac{d}{dt} u(t)g(t) = u(t)g'(t) + u'(t)g(t)$$

و با توجه به ضابطه  $S$  نتیجه می‌گیریم

$$\text{ad}_{u(t)}^* u(t)g(t) + \text{grad}_{g(t)} U + u(t)u'(t)$$

$$= u(t)u'(t) + u'(t)g(t).$$

با ساده کردن عبارات فوق معادله

$$\frac{d}{dt} u(t) = \text{ad}_{u(t)}^* u(t) + \text{grad}_{g(t)} U g^{-1}(t)$$

$$u(t) = v(t)g^{-1}(t)$$

به دست می‌آید. معادله فوق، معادله اویلر لاگرانژ در  
 حضور تابع پتانسیل  $U$  می‌باشد.

### ۳-۱- معادلات حرکت فرفره در فضای سه

بعدی

جسم صلبی را در  $\mathfrak{R}^3$  با توزیع جرم  $\rho(t, x)$  در  
 لحظه  $t$  در نظر بگیرید. فرض کنید این جسم در حال  
 دوران تحت تاثیر نیروی گرانش است و یک نقطه آن، در  
 مبدا مختصات، ثابت است. این سیستم مکانیکی حرکت  
 فرفره روی سطح را بیان می‌کند. در این مدل به دنبال  
 یافتن مقادیر فرین لاگرانژی

$$I(\xi) = \frac{1}{2} \int_a^b \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi(t, x)) |\xi'(t, x)|^2 dx dt \quad (1)$$

$$- g \int_a^b \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\xi(t, x)) \gamma_0 \cdot x dx dt$$

که در آن  $\xi(t, x)$  موقعیت ذره  $x$  در لحظه  $t$  را  
 نمایش می‌دهد. هم چنین  $\gamma_0$  یک بردار یکه عمود بر  
 سطح و در خلاف جهت گرانش است و  $g$  نیز ثابت  
 گرانش است. (برای جزئیات بیشتر به [۱۳] یا [۱] مراجعه

که این معادلات در مکانیک کلاسیک کاملاً شناخته شده هستند (برای مثال بخش ۱،۴ مرجع [۹] را ببینید).

#### ۴- معادلات کاماسا-هلم با پتانسیل روی

##### گروه‌های لی با بعد بی‌نهایت

در این بخش با استفاده از ابزارهای هندسی معرفی شده به بررسی وجود جواب معادلات آب کم عمق کاماسا-هلم بر گروه بات-ویراسورو می‌پردازیم. این روش که توسط آرنولد [۲] و مارسدن و ابین [۵] مطرح شد، یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادلات مربوط مکانیک سیالات می‌باشد.

فرض کنید  $s \in \mathbb{N}$  باشد و  $S^1$  دایره یک باشد. گروه همه وابرسی‌های جهت‌نگهدار (دارای مشتق مثبت) مانند  $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$  را که در شرط

$$\int_{S^1} \sum_{0 \leq k \leq s} (\varphi^{(k)})^2 dx < \infty$$

صدق می‌کنند را با  $D^s(S^1)$  نمایش می‌دهیم. با توجه به نمادگذاری [۱۰] قرار می‌دهیم  $\overline{D^s(S^1)} = D^s(S^1) \times \mathfrak{R}$  می‌نامیم. برای

$$\hat{\eta} = (\eta, \alpha), \hat{\xi} = (\xi, \beta) \in \overline{D^s(S^1)}$$

عمل گروه  $\circ$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{\eta} \circ \hat{\xi} := (\eta \circ \xi, \alpha + \beta + \int_{S^1} \log \partial_x (\eta \circ \xi) d \log \partial_x \xi)$$

با این عمل  $\overline{D^s(S^1)}$  به یک گروه لی تبدیل می‌شود. جبر لی این گروه  $Vect^s(S^1)$  می‌باشد و اعضای آن به صورت زوج مرتب  $(v, \alpha)$  هستند که  $v$  یک میدان برداری  $S^1$  بار مشتق پذیر با مشتقات  $L^2$  بر دایره و  $\alpha$  یک عدد حقیقی است. ضرب داخلی  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$  را بر  $Vect^s(S^1)$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall \hat{V} = (v, \alpha), \hat{W} = (w, \beta) \in Vect^s(S^1) \\ \langle \hat{V}, \hat{W} \rangle_{H^1} = \int_{S^1} \partial_x v \partial_x w dx + \int_{S^1} v w dx + \alpha \beta$$

اکنون با استفاده از انتقال راست این متر را به یک متر

چون فرم  $B$  پایای راست است با توجه به تعریف گرادیان داریم

$$B\left(\frac{d}{dt}Z, Y\right) = B(Z, [Z, Y]) \\ - B(\text{grad}_{W(t)}V, YW(t)) \\ = B(Z, [Z, Y]) - d_{W(t)}VYW(t) \\ = B(Z, [Z, Y]) - g\sigma.YW(t)\gamma_0$$

اگر  $M(t) := I_p Z(t) + Z(t)I_p$  آنگاه با قرار دادن  $2B(Z, Y) := Q(M, Y) = \text{Tr}(MY^t)$  می‌بینیم که

$$Q\left(\frac{d}{dt}M, Y\right) + Q([M, Z], Y) = -2g\sigma.YW\gamma_0$$

و در نتیجه

$$\text{Tr}\left(\left(\frac{d}{dt}M\right)Y^t\right) + \text{Tr}([M, Z]Y^t) = -2g\sigma.YW\gamma_0. \quad (۳)$$

اکنون ایزومرفیسم جبرهای لی

$$k: \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3)$$

$$(x, y, z)^t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که به ازای هر  $w \in \mathfrak{R}^3$  معادلات

$$k(w)x = w \times x \\ k(x \times y) = [k(x), k(y)] \\ \text{Tr}(k(x)k(y)^t) = 2x \cdot y$$

برقرار هستند. بنابراین با قرار دادن  $\gamma(t) = W(t)\gamma_0$ ،  $\omega(t) = -k^{-1}(z(t))$ ،  $\mu(t) = k^{-1}(M(t))$  و  $y = k^{-1}(Y)$  در معادله (۳) برای هر  $y \in \mathfrak{R}^3$  نتیجه می‌گیریم

$$-2\mu_t \cdot y + 2(\mu \times \omega) \cdot y = -g\sigma \cdot (y \times \gamma).$$

چون  $y \in \mathfrak{R}^3$  دلخواه است، پس

$$\mu_t = \mu \times \omega + g\gamma \times \sigma$$

بعلاوه معادله  $W_t = ZW$  نتیجه می‌دهد

$$\gamma_t = \gamma \times w(t)$$

ریمانی بر  $D^s(S^1)$  توسعه می‌دهیم. به طور دقیق‌تر برای  $\hat{W}$  و  $\hat{V}$  در  $T_{\xi}D^s(S^1)$  قرار می‌دهیم

$$\langle \hat{V}, \hat{W} \rangle_{\xi} := \langle T_{\xi}R_{\xi^{-1}}\hat{V}, T_{\xi}R_{\xi^{-1}}\hat{W} \rangle_{H^1}.$$

(برای جزئیات بیشتر به [۱۰] مراجعه شود). فرض کنید  $f \in D^s(S^1)$  یک تابع مشتق‌پذیر باشد. بنابر قضیه ۱ از [۱۰] داریم

$$ad_{\hat{V}}^*\hat{W} = ((1 - \partial_x^2)^{-1} \{-v\partial_x^3 w - 2\partial_x v\partial_x^2 w + v\partial_x w + 2w\partial_x v + b\partial_x^3 v + b\partial_x v\}, 0)$$

لاگرانژی

$$L(\hat{V}, \hat{W}) = \langle T_{\xi}R_{\xi^{-1}}\hat{V}, T_{\xi}R_{\xi^{-1}}\hat{W} \rangle_{H^1} + f(\xi)$$

را در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۲،۴ اسپری این لاگرانژی عبارت است از

$$\bar{s}(\xi, \hat{V}) = (\xi, \hat{V}, \hat{V}, ad_{\hat{V}}^*\hat{V} - T_e R_{\xi^{-1}} \text{grad}_{\xi} f)$$

چون این نگاشت مشتق‌پذیر است، پس دارای حل موضعی (خم انتگرال) می‌باشد. بنابراین معادله مشتقات جزئی اوپلر-لاگرانژ

$$\frac{d}{dt} v = -ad_v^* v + \text{grad}_e f$$

دارای حل موضعی است. با توجه به توضیحات بالا می‌توان نوشت

$$(1 - \partial_x^2)\partial_t v = v\partial_x^3 v + 2\partial_x v\partial_x^2 v - 3v\partial_x v - a\partial_x^3 v - a\partial_x v + \text{grad}_e f$$

که  $f$  می‌تواند هر تابع دیفرانسیل‌پذیری از  $D^s(S^1)$  باشد. بنابراین، معادله با مشتقات جزئی فوق دارای جواب است و تغییرات این جواب نسبت شرایط مرزی هموار است. اگر تابع پتانسیل  $f$  صفر باشد آنگاه نتایج مقاله [۱۰] حاصل می‌شوند.

[10] G. Misiolek, Shallow water equation as a geodesic flow on the Bott-Virasoro group, *J. Geom. Phys.* 24, 203 – 208 (1998).

[11] S. Shkoller, Geometry and curvature of diffeomorphism groups with  $H^1$  metric and mean Hydrodynamics, *J. Funct. Anal.* 160, 337–365 (1998).

[12] A. Suri, Second order time dependent tangent bundles and Geometric Mechanics, *Mediterr. J. Math.* 14: 154. <https://doi.org/10.1007/s00009-017-0954-2> (2017).

[13] M. Taylor, Finite and infinite dimensional Lie groups and evolution equations, Lecture notes (2003).

## فهرست منابع

[1] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed., Addison–Wesley (1978).

[2] V. I. Arnold, Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluids parfaits, *Ann. Inst. Grenoble*, 16, 319–361 (1966).

[3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, New York, Springer-Verlag (1978).

[4] P. R. Chernoff and J. E. Marsden *Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 421, Springer-Verlag, New York (1974).

[5] D. Ebin and J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Ann. of Math.* (2) 92, 102-163 (1970).

[6] J. Marsden, D. Ebin and A.E. Fischer, Diffeomorphism groups, hydrodynamics and relativity, *Proceedings of the 13th Biennial Seminar of Canadian Mathematical Congress*, Vol. 1, 135–279 (1972).

[7] A. Iacob, Invariant manifolds in the motion of a rigid body about a fixed point, *Rev. Roum. Math. Pures. Appl.*, 16 (10), 1497-1521 (1971).

[8] D. Lewis, T. Ratiu, J.C. Simo and J. Marsden Heavy top: a geometric treatment, *Nonlinearity*, 5, 1-48 (1992).

[9] J.E. Marsden and T.S. Ratiu *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, (1994).