

رویکرد وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌های فازی بر اساس واحدهای مجازی ایده‌آل و آنتی ایده‌آل: یک مطالعه موردی بر روی شرکت‌های بیمه

میثم مجدی^۱، مریم نیکبخت^۲، علی ابراهیم‌نژاد^۳

^(۱) گروه مهندسی صنایع، موسسه آموزش عالی آیندگان، تنکابن، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

^(۳) گروه ریاضی، واحد قائم‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائم‌شهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۱/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵

چکیده

مطالعه حاضر به ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده در محیط فازی از دو منظر خوشبینانه و بدبینانه بر اساس تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها با رویکرد مجموعه وزن‌های مشترک می‌پردازد. در روش پیشنهادی، ابتدا دو واحد مجازی ایده‌آل فازی و آنتی ایده‌آل تعریف و مقدار کارایی آن‌ها از دیدگاه حساب فازی تخمین زده می‌شود. سپس بر اساس تکنیک مجموعه وزن‌های مشترک، بهترین و بدترین کارایی فازی واحدها محاسبه می‌شود. در نهایت، بر اساس شاخص رابطه نزدیکی، کارایی فازی همه واحدها جهت مقایسه و رتبه‌بندی تعیین می‌شود. از مزیت‌های مهم روش پیشنهادی، مقایسه منطقی میان واحدها بر اساس وزن مشترک، جلوگیری از انعطاف‌پذیری وزن‌ها و قدرت تمایز بیشتر میان آن‌ها می‌باشد. در راستای تشریح مدل پیشنهادی ۳۰ شرکت بیمه در ایران شامل داده‌های فازی در نظر گرفته شد و عملکرد آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، بهترین کارایی فازی، بدترین کارایی فازی، شاخص رابطه نزدیکی فازی، مجموعه وزن‌های مشترک.

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش غیرپارامتری برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس با چندین ورودی و خروجی می‌باشد که نخستین بار توسط چارلز و همکاران در سال ۱۹۷۸ با ارائه مدلی تحت فرض بازده به مقیاس ثابت مطرح شد [۱] و پس از آن در طی دهه‌های گذشته توسعه یافت. تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس مطلوب‌ترین وزن هر واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) از منظر خوشبینانه به ارزیابی عملکرد واحدها می‌پردازد. اگرچه انتخاب وزن‌های مختلف و انعطاف‌پذیر برای ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده یکی از مزایای مدل‌های تحلیل پوششی داده‌هاست، اما مقایسه میان واحدهای تصمیم‌گیرنده با مقدار کارایی یکسان را مختل می‌سازد. تعیین مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک (CSW) تحت چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها می‌تواند راه حلی برای رفع این مشکل باشد که اولین بار توسط کوک و همکاران [۲] مطرح شد. در روش پیشنهادی آن‌ها مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک برای تمامی واحدها تعیین و مقدار کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس یک وزن مشترک محاسبه می‌شود که قدرت تمایز آن منجر به مقایسه صحیح میان واحدها می‌شود. ترکیب دو نگاه خوشبینانه و بدبینانه راه حل دیگری جهت ایجاد تمایز میان واحدهای تصمیم‌گیرنده است که توسط وانگ و لو [۳] مطرح شد. بر این اساس، وانگ و لو [۳] پس از معرفی دو واحد ایده‌آل و آنتی ایده‌آل، بهترین و بدترین کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده را محاسبه نموده، سپس با ترکیب این دو مقدار کارایی، شاخص رابطه نزدیکی به واحد ایده‌آل را تعیین و کارایی نهایی واحدها را به دست آوردند. با توجه به نقص موجود در مدل بدبینانه، وو [۴] مدل پیشنهادی آن‌ها را اصلاح نمود.

همان‌طور که می‌دانیم تحلیل پوششی داده‌ها بر مبنای داده‌های دقیق عمل می‌نماید، این درحالی است که در دنیای واقعی داده معمولاً قطعی و دقیق نیستند. بنابراین، ارزیابی عملکرد با روش‌های معمول منجر به بروز خطاهایی در فرایند تصمیم‌گیری می‌شود. در چنین وضعیتی، مدل مرسوم تحلیل پوششی داده‌ها نمی‌تواند به سادگی عملکرد را اندازه‌گیری کند. برای اتخاذ تصمیمات معقول و مطابقت بیشتر با دنیای واقعی، ضروری است که از یکی از رویکردهای عدم قطعیت مانند داده‌های بازه‌ای، تصادفی و یا فازی استفاده نمود. محققین زیادی از ابزار منطق فازی برای برخورد با داده‌های نادقیق در تحیل پوششی داده‌ها استفاده نمودند که منجر به تحلیل پوششی داده‌های فازی (FDEA) گردید. رویکردهای مختلفی در ادبیات تحلیل پوششی داده‌ها برای برخورد با داده‌های فازی وجود دارد که رویکردهای آلفا برش و حساب فازی از مهمترین آن‌ها می‌باشند. در ادامه به برخی از مطالعات صورت گرفته در این زمینه اشاره می‌شود.

روش‌های پیشنهادی توسط کائو و لیو [۵] و ساعتی و همکاران [۶] دو روش اصلی مبتنی بر رویکرد آلفا برش برای حل مدل‌های FDEA می‌باشند. روش کائو و لیو [۵] هر مدل FDEA را بر اساس اصل گسترش و آلفا برش به مدل‌های قطعی تبدیل می‌کند و کران‌های بالا و پایین آلفا برش توابع عضویت کارایی را بدست می‌آورد. این رویکرد همچنین روشی را برای رتبه‌بندی نمرات کارایی فازی بدون داشتن فرم دقیق توابع عضویت پیشنهاد می‌دهد. کائو و لیو [۷] این رویکرد را برای حل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های دو مرحله‌ای فازی توسعه

داده‌اند. لوزانو [۸] با توسعه همین رویکرد، روش دیگری برای یافتن کارایی فازی سیستم‌های دو مرحله‌ای ارائه داد. روش ساعتی و همکاران [۶]، هر مدل FDEA را بر اساس آلفا برش به یک مساله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای تبدیل می‌نماید و سپس مساله بازه‌ای حاصل را به ازای آلفای داده شده به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کند. ساعتی و معماربانی [۹] با گسترش این روش، رویکردی برای تعیین وزن مشترک در مدل‌های FDEA پیشنهاد دادند. حاتمی-ماریینی و همکاران [۱۰] با معرفی واحدهای ایده‌آل فازی و آنتی ایده‌آل فازی، روش آلفا برش ساعتی و همکاران [۶] را گسترش داده‌اند. پوری و یادآو [۱۱] از رویکرد آلفا برش برای یافتن کارایی فازی در حضور خروجی‌های نامطلوب استفاده کرده‌اند. شرمه و همکاران [۱۲] بر اساس مدل مبتنی بر متغیرهای کمکی برای فرآیند شبکه‌ای سه مرحله‌ای فازی عملکرد شرکت‌های گاز منطقه ای ایران را مورد ارزیابی قرار دادند. تویسوز و سیسمک [۱۳] بر اساس رویکرد چند معیاره فازی عملکرد شبکه‌های حمل بار در ترکیه را بررسی نمودند. ایزدی خواه [۱۴] به کمک مفهوم آلفا برش بر اساس مدل راسل اصلاح شده مدلی برای ساختار دو مرحله‌ای در محیط فازی ارائه نمودند و ۱۵ شعبه بانک ملی ایران را مورد ارزیابی قرار دادند. حیدری و همکاران [۱۵] بر اساس مدل DEA-RAM فازی ۱۴ خط هوایی ایران را مورد تحلیل و ارزیابی قرار دادند. کاظمی و همکاران [۱۶] با استفاده از مفهوم نقطه ایده‌آل از این رویکرد برای یافتن وزن‌های مشترک در مدل FDEA در حضور عوامل غیراختیاری استفاده کردند. فتحی و فرضی‌پور صاعن [۱۷] به ارزیابی عملکرد زنجیره تامین با تلفیق مرزهای دوگانه و مجموعه وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌های فازی پرداختند. طباطبایی و همکاران [۱۸] بر اساس رویکرد مجموعه وزن‌های مشترک برای ساختارهای شبکه‌ای در محیط فازی عملکرد شرکت‌های گاز ایران را ارزیابی نمودند.

مهمترین ضعف رویکرد آلفا برش در یافتن کارایی فازی این است که باید دنباله‌ای از مدل‌های خطی بر اساس مجموعه آلفا برش‌های مختلف حل شود که این امر محاسبات را به طرز قابل توجهی افزایش می‌دهد. جهت رفع این مشکل، وانگ و همکاران [۱۹] رویکرد حساب فازی را برای یافتن کارایی فازی در مدل‌های FDEA پیشنهاد داده‌اند. از آنجا که این رویکرد برای یافتن مولفه‌های کارایی فازی، سه مدل DEA کسری مختلف حل می‌کند، وزن‌های متفاوتی برای یافتن کارایی فازی واحد تحت ارزیابی بدست می‌دهد. برای رفع این مشکل، بارداج و همکاران [۲۰] یک رویکرد جدید مبتنی بر تابع هدف کسری و قیود خطی پیشنهاد داده‌اند. همچنین، آذر و همکاران [۲۱] رویکرد حساب فازی را برای مدل جمعی تعمیم داده و از آن جهت یافتن وزن مشترک در مدل FDEA برای محاسبه کارایی فازی واحدها و رتبه‌بندی آن‌ها استفاده کردند. کچویی و همکاران [۲۲] این روش را برای یافتن کارایی فازی در حضور خروجی‌های نامطلوب گسترش داده‌اند. ابراهیم‌نژاد و امانی [۲۳] از مفهوم واحدهای ایده‌آل فازی و آنتی ایده‌آل فازی برای ارزیابی واحدها در مدل FDEA در حضور خروجی‌های نامطلوب استفاده کردند. آن‌ها، ضمن برطرف کردن، نقاط ضعف روش وانگ و همکاران [۱۹]، رویکرد حساب فازی را برای یافتن کارایی فازی واحدهای ایده‌آل فازی و آنتی ایده‌آل فازی در حضور خروجی‌های نامطلوب گسترش داده‌اند. سپس با یافتن بهترین و بدترین کارایی نسبی هر واحد در حضور خروجی‌های نامطلوب، واحدهای تصمیم‌گیرنده را

رتبه‌بندی نموده‌اند. با این وجود مهمترین ضعف روش این است که به تلاش محاسباتی قابل توجهی برای یافتن بهترین و بدترین کارایی فازی هر واحد تصمیم‌گیرنده نیاز دارد. در این مقاله رویکرد پیشنهادی ابراهیم‌نژاد و امانی [۲۳] در حضور خروجی‌های مطلوب به گونه‌ای تعمیم داده می‌شود که با یافتن وزن‌های مشترک، بهترین کارایی نسبی هر واحد تنها با حل یک مدل خطی و بدترین کارایی نسبی هر واحد نیز تنها با حل یک مدل خطی محاسبه می‌شود که منجر به کاهش چشمگیر محاسبات می‌گردد. هم‌چنین برای بررسی و تحلیل بیشتر ۳۰ شرکت بیمه در ایران در نظر گرفته شده و عملکرد آن‌ها بر اساس رویکرد پیشنهادی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

بر این اساس در ادامه مقاله در بخش دوم مروری بر مدل تحلیل پوششی داده‌ها و مدل مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک در محیط فازی خواهیم داشت. در بخش سوم، رویکرد پیشنهادی برای ارزیابی بهترین و بدترین کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در یک محیط فازی ارائه می‌شود. جهت تشریح و توضیح روش پیشنهادی در بخش چهارم مطالعه کاربردی بر روی چندین شرکت بیمه ایران خواهیم داشت. سرانجام در بخش پنجم نتیجه‌گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی ارائه می‌شود.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش، برخی مفاهیم اساسی نظریه مجموعه‌های فازی، تحلیل پوششی داده‌های فازی و مجموعه وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌های فازی مرور می‌گردد (آذر و همکاران [۲۱]، ابراهیم‌نژاد و امانی [۲۳]).

۲-۱ نظریه مجموعه فازی

تعریف ۱. عدد فازی \tilde{A} که با نماد $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^U)$ نشان داده می‌شود یک عدد فازی مثلثی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x - a^L}{a^M - a^L}, & a^L \leq x \leq a^M, \\ \frac{a^U - x}{a^U - a^M}, & a^M \leq x \leq a^U. \end{cases} \quad (1)$$

تعریف ۲. عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^U)$ یک عدد فازی نامنفی (مثبت) است اگر و تنها اگر $(a^L \geq 0)$ $a^L > 0$.

تعریف ۳. فرض کنید $\tilde{A} = (a^L, a^M, a^U)$ و $\tilde{B} = (b^L, b^M, b^U)$ دو عدد فازی مثلثی باشند در این صورت حساب اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} &= (a^L + b^L, a^M + b^M, a^U + b^U), \\ \tilde{A} - \tilde{B} &= (a^L - b^L, a^M - b^M, a^U - b^U), \\ \tilde{A} \times \tilde{B} &\approx (a^L \times b^L, a^M \times b^M, a^U \times b^U), \quad a^L \times b^L \geq \cdot, \\ \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} &\approx \left(\frac{a^L, a^M, a^U}{b^L, b^M, b^U} \right) \approx \left(\frac{a^L}{b^U}, \frac{a^M}{b^M}, \frac{a^U}{b^L} \right), \quad a^L \geq \cdot, b^L > \cdot. \end{aligned} \quad (2)$$

تعریف ۴. فرض کنید m عدد فازی مثلثی چون $\tilde{A}_i = (a_i^L, a_i^M, a_i^U)$ وجود دارد. همچنین فرض کنید $x_{\min} = \inf \bigcup_{i=1}^m (a_i^L, a_i^U)$ ، $x_{\max} = \sup \bigcup_{i=1}^m (a_i^L, a_i^U)$ و $\alpha \in [0, 1]$ ، در این صورت شاخص رابطه نزدیکی با نماد RC برای رتبه بندی اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود (ابراهیم نژاد و امانی [۲۳]):

$$RC^\alpha(\tilde{A}_i) = \frac{1}{2} \left[\frac{\alpha(a_i^M + a_i^U) + (1-\alpha)(a_i^L + a_i^M) - 2x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right] \quad (۳)$$

مقدار $RC^\alpha(\tilde{A}_i)$ رتبه عدد فازی \tilde{A}_i را تعیین می‌نماید به این ترتیب که هر چه مقدار $RC^\alpha(\tilde{A}_i)$ بزرگتر باشد عدد فازی \tilde{A}_i رتبه بالاتری خواهد داشت.

۲-۲ مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده (DMU) متجانس وجود دارد به طوری که هر واحد DMU_j : $j=1, \dots, n$ ، ورودی فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij} = (\tilde{x}_{ij}^L, \tilde{x}_{ij}^M, \tilde{x}_{ij}^U)$: $i=1, \dots, m$ را مصرف نموده تا خروجی فازی مثلثی $\tilde{y}_{rj} = (\tilde{y}_{rj}^L, \tilde{y}_{rj}^M, \tilde{y}_{rj}^U)$: $r=1, \dots, s$ را تولید نماید. در این صورت کارایی فازی واحد تحت ارزیابی DMU_j : $j=1, \dots, n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{E}_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}} \approx \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \quad (۴)$$

با توجه به رویکرد حساب فازی، وانگ و همکاران [۱۹] مدل زیر را برای محاسبه رابطه کارایی فازی DMU_o : $o=1, \dots, n$ پیشنهاد نمودند:

$$\tilde{E}_o^* = \text{Max } \tilde{E}_o \approx (E_o^L, E_o^M, E_o^U) = \left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \right)$$

s.t.

$$\tilde{E}_j \approx (E_j^L, E_j^M, E_j^U) = \left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right) \leq 1, \forall j, \quad (۵)$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r=1, \dots, s, \quad i=1, \dots, m.$$

توجه داریم که اگر قید مدل (۵) برای کران بالای E_j^U برقرار باشد آن گاه قید مورد نظر برای دو کران E_j^L و E_j^M نیز برقرار خواهد بود. بنابراین این مدل به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\tilde{E}_o^* = \text{Max } \tilde{E}_o \approx [E_o^L, E_o^M, E_o^U] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}^L} \right]$$

(۶)

s.t.

$$E_j^U = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

وانگ و همکاران (۲۰۰۹) با تبدیل مدل (۶) به سه مدل جدا از هم، مقادیر بهینه E_o^{*L} ، E_o^{*M} و E_o^{*U} را به صورت جداگانه به دست آوردند. دو مشکل عمده روش وانگ و همکاران [۱۹] این است که با حل سه مدل مجزا، وزن‌های متفاوتی برای واحد تحت ارزیابی تولید می‌شود که نمی‌تواند جواب بهینه‌ی مدل (۶) باشد و با تعریف (۴) در تضاد است و هم چنین کارایی فازی واحد تحت ارزیابی ممکن است در شرط مثلثی بودن تابع عضویت صدق نکند. برای رفع این دو مشکل، ابراهیم‌نژاد و امانی [۲۳] رویکرد قاعده الفبایی را برای حل مدل (۶) پیشنهاد کردند.

۲-۳ مجموعه وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌های فازی

رویکرد حساب فازی وانگ و همکاران [۱۹] برای حل مدل (۶)، وزن‌های مختلفی به ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تحت ارزیابی اختصاص می‌دهد. برای حل این مشکل، آذر و همکاران [۲۱] بر اساس مدل جمعی پیشنهادی چارنز و همکاران [۲۴]، مدل زیر را برای تعیین مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک در محیط فازی ارائه نمودند:

$$\text{Max } \text{Min}_{j \in n} \left\{ \sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U) - \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U) \right\}$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U)}{\sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \geq 1, \quad \sum_{i=1}^m v_i \geq 1,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

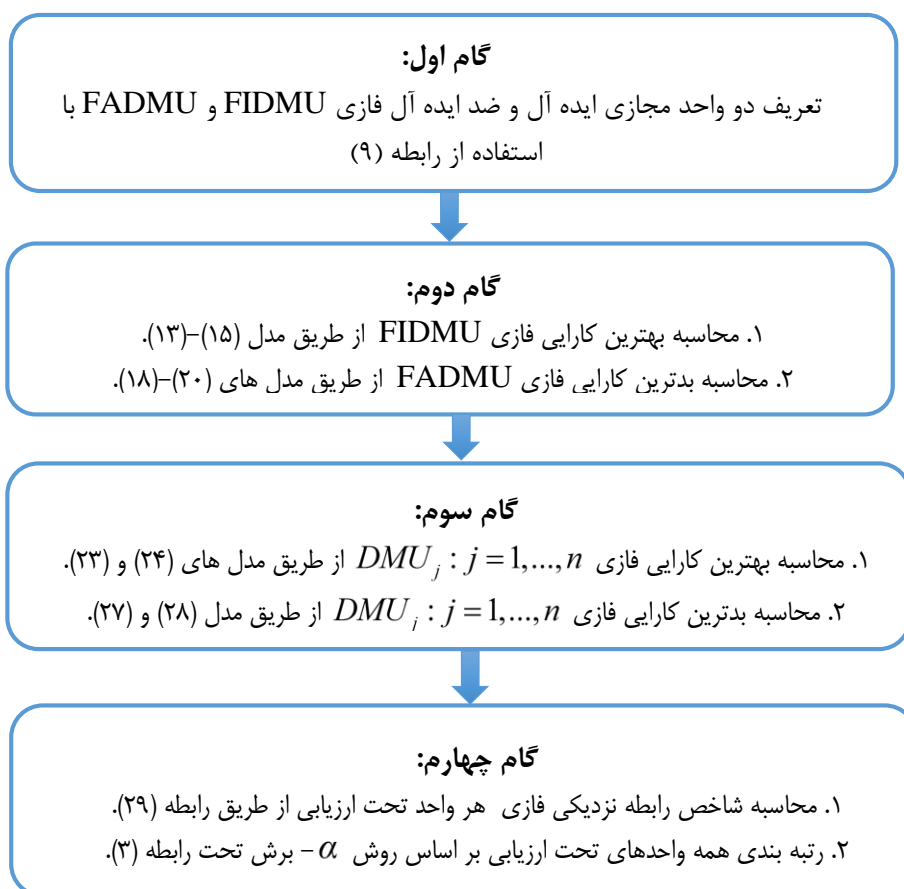
در مدل فوق، ε یک مقدار غیر ازشمیدسی است که برای ممانعت از صفر شدن وزن‌های u و v در نظر گرفته شده است. بر خلاف مدل پیشنهادی وانگ و همکاران [۱۹]، مدل (۷) تنها یک بار حل می‌شود و این یکی از

مزیت‌های مهم این مدل است. پس از حل مدل (۷) بر اساس رویکرد حساب فازی و یافتن وزن بهینه (v_i^*, u_r^*) ، کارایی فازی برای DMU_j از طریق رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\tilde{E}_j^* = [E_j^{*L}, E_j^{*M}, E_j^{*U}] = \left[\frac{\sum_{r=1}^{s_1} u_r^* y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^{s_1} u_r^* y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^{s_1} u_r^* y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^L} \right] \quad (۸)$$

۳- رویکرد وزن مشترک برای محاسبه کارایی فازی

در این بخش پس از معرفی دو واحد مجازی ایده‌آل فازی (FIDMU) و آنتی ایده‌آل فازی (FADMU)، نخست مطابق با رویکرد ابراهیم نژاد وامانی [۲۳] بهترین کارایی فازی FIDMU و بدترین کارایی فازی FADMU در حالتی که تنها شامل خروجی‌های مطلوب هستند تعیین می‌گردد. سپس مدلی برای تعیین مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک جهت تعیین بهترین کارایی ایده‌آل فازی و بدترین کارایی آنتی ایده‌آل فازی برای محاسبه کارایی فازی هر واحد تصمیم گیرنده معرفی می‌شود. ساختار کلی روش پیشنهادی در قالب الگوریتم در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل ۱: ساختار کلی روش پیشنهادی

۳-۱ مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی برای واحدهای مجازی FIDMU یا FADMU

فرض کنید واحد تحت ارزیابی $DMU_j : j=1, \dots, N$ شامل ورودی فازی مثلثی $\tilde{y}_{rj} = (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U) : r=1, \dots, s$ و خروجی فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U) : i=1, \dots, m$ باشد. هم چنین فرض کنید ورودی‌ها و خروجی‌های دو واحد فازی مجازی به نام‌های $FIDMU = (\tilde{x}^{\min}, \tilde{y}^{\max})$ و $FADMU = (\tilde{x}^{\max}, \tilde{y}^{\min})$ به صورت زیر تعریف شوند:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i^{\min} &= (x_i^{L \min}, x_i^{M \min}, x_i^{U \min}) = \left(\min\{x_i^L\}, \min\{x_i^M\}, \min\{x_i^U\} \right), \forall i, \\ \tilde{x}_i^{\max} &= (x_i^{L \max}, x_i^{M \max}, x_i^{U \max}) = \left(\max\{x_i^L\}, \max\{x_i^M\}, \max\{x_i^U\} \right), \forall i, \\ \tilde{y}_r^{\min} &= (y_r^{L \min}, y_r^{M \min}, y_r^{U \min}) = \left(\min\{y_r^L\}, \min\{y_r^M\}, \min\{y_r^U\} \right), \forall r, \\ \tilde{y}_r^{\max} &= (y_r^{L \max}, y_r^{M \max}, y_r^{U \max}) = \left(\max\{y_r^L\}, \max\{y_r^M\}, \max\{y_r^U\} \right), \forall r.\end{aligned}\tag{۹}$$

در این صورت بهترین کارایی واحد ایده‌آل فازی FIDMU از طریق مدل زیر تعیین می‌شود:

$$\tilde{\theta}_t^* = \text{Max } \tilde{\theta}_t \approx [\theta_t^L, \theta_t^M, \theta_t^U] = \frac{\sum_{r=1}^s u_r (y_r^{L \max}, y_r^{M \max}, y_r^{U \max})}{\sum_{i=1}^m v_i (x_i^{L \min}, x_i^{M \min}, x_i^{U \min})}\tag{۱۰}$$

s.t.

$$\tilde{\theta}_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U)}{\sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U)} \leq 1, \forall j,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \forall r, p, i.$$

مطابق با حساب اعداد فازی، مدل (۱۰) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\tilde{\theta}_t^* = \text{Max } \tilde{\theta}_t \approx [\theta_t^L, \theta_t^M, \theta_t^U] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}} \right]$$

s.t.

$$\tilde{\theta}_j \approx [\theta_j^L, \theta_j^M, \theta_j^U] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \leq 1, \forall j,\tag{۱۱}$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \forall r, p, i.$$

در صورت برقراری قید $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1 \right)$ ، قیدهای $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U} \leq 1 \right)$ و $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M} \leq 1 \right)$ نیز برقرار

خواهند بود. بنابراین مدل (۱۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \theta_I^{*L} &= \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}} \\ \theta_I^{*M} &= \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}} \\ \theta_I^{*U} &= \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}} \end{aligned} \quad (12)$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1, j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \forall r, p, i.$$

توجه دارید که مدل فوق یک مدل چند هدفه است. بنابراین بر اساس رویکرد قاعده الفبایی (لکزیکوگرافی) پیشنهادی توسط ابراهیم نژاد و امانی [۲۳] برای یافتن کارایی واحد ایده‌آل فازی FIDMU، سه مدل ذیل به ترتیب حل می‌شوند.

$$\theta_I^{*L} = \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}}$$

s.t.

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1, j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \forall r, p, i.$$

(۱۳)

با فرض بهینگی مدل فوق $(\theta_1^L = \theta_1^{*L})$ ، مدل زیر حل می‌شود:

$$\theta_1^{*M} = \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}}$$

s.t.

$$\theta_1^L = \theta_1^{*L}, \quad (14)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \forall r, p, i.$$

همچنین با فرض بهینگی دو مدل پیشین $(\theta_1^L = \theta_1^{*L}, \theta_1^M = \theta_1^{*M})$ مدل زیر حل می‌شود:

$$\theta_1^{*U} = \text{Max} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}}$$

s.t.

$$\theta_1^L = \theta_1^{*L},$$

$$\theta_1^M = \theta_1^{*M}, \quad (15)$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \forall r, p, i.$$

لازم به ذکر است تمامی مدل‌های فوق غیر خطی هستند و به کمک تبدیل چارن-کوپر [۲۵] قابل تبدیل به فرم خطی می‌باشند.

پس از تعیین بهترین کارایی واحد ایده‌آل فازی (FIDMU) یعنی $[\theta_1^{*L}, \theta_1^{*M}, \theta_1^{*U}]$ ، بدترین کارایی واحد آنتی ایده‌آل فازی (FADMU) نیز از طریق مدل زیر تعیین می‌شود:

$$\tilde{\varphi}_N^* = \text{Min } \tilde{\varphi}_N \approx [\varphi_N^L, \varphi_N^M, \varphi_N^U] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \max}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \max}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \max}} \right]$$

s.t.

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}} &\geq \theta_1^{*L}, \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}} &\geq \theta_1^{*M}, \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}} &\geq \theta_1^{*U}, \\ \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ij}^{Ug}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} &\leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ u_r, v_i &\geq \varepsilon, \quad \forall r, p, i. \end{aligned} \tag{16}$$

با توجه به فازی بودن تابع هدف مدل (۱۶)، مشابه با مدل تعیین بهترین کارایی واحد ایده آل فازی این مدل نیز تبدیل به مساله برنامه ریزی چند هدفه زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi_N^{*L} &= \text{Min } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \max}} \\ \varphi_N^{*M} &= \text{Min } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \max}} \\ \varphi_N^{*U} &= \text{Min } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \max}} \end{aligned} \tag{17}$$

s.t.

Constraint of model (۱۶).

با توجه به چند هدفه بودن مدل فوق، بر اساس رویکرد قاعده الغبایی (لکزیوگرافی) پیشنهادی توسط ابراهیم نژاد و امانی [۲۳] کارایی واحد آنتی ایده‌آل فازی FADMU، از طریق مدل‌های (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\varphi_N^{*L} = \text{Min} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \max}} \quad (18)$$

s.t.

Constraint of model (۱۶).

با فرض بهینگی مدل فوق ($\varphi_N^L = \varphi_N^{*L}$)، مدل زیر حل می‌شود:

$$\varphi_N^{*M} = \text{Min} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \max}} \quad (19)$$

s.t.

$$\varphi_N^L = \varphi_N^{*L},$$

Constraint of model (۱۶).

همچنین با فرض بهینگی دو مدل پیشین ($\varphi_N^L = \varphi_N^{*L}$, $\varphi_N^M = \varphi_N^{*M}$) مدل زیر حل می‌شود:

$$\varphi_N^{*U} = \text{Min} \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \min}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \max}} \quad (20)$$

s.t.

$$\varphi_N^L = \varphi_N^{*L},$$

$$\varphi_N^M = \varphi_N^{*M},$$

Constraint of model (۱۶).

حال با توجه به مقدار بهترین کارایی واحد ایده‌آل فازی FIDMU ($\tilde{\theta}_i^*$) و بدترین کارایی واحد آنتی ایده‌آل فازی FADMU ($\tilde{\varphi}_N^*$) برای تعیین بهترین و بدترین کارایی فازی هر واحد تصمیم گیرنده مدل‌هایی در بخش بعد معرفی می‌گردد.

۲-۳ تعیین بهترین کارایی فازی واحد تصمیم گیرنده بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک FADMU مطابق با روش پیشنهادی آذر و همکاران [۲۱]، مدل فازی برای تعیین مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک برای محاسبه بهترین کارایی فازی هر واحد تصمیم‌گیرنده (DMU) به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \left\{ \text{Min}_{j \in n} \left[\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} \right] \right\} \\
 & \text{s.t.} \\
 & \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}^{\min}} = \tilde{\theta}_j^*, \\
 & \tilde{\theta}_j = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^m v_i \geq 1, \quad \sum_{r=1}^s u_r \geq 1, \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, p, i.
 \end{aligned} \tag{21}$$

لازم به ذکر است، مدل فوق مقدار کارایی را محاسبه نمی‌کند بلکه با حفظ مقدار بهینه بهترین کارایی فازی واحد ایده‌آل FIDMU ($\tilde{\theta}_j^*$)، مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک (v_i^*, u_r^*) را برای اندازه‌گیری بهترین کارایی فازی هر واحد تصمیم گیرنده $DMU_j : j = 1, \dots, n$ تعیین می‌نماید. مطابق با رویکرد حساب فازی مثلثی، مدل (۲۱) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \left\{ \text{Min}_{j \in n} \left[\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \right) \right] \right\} \\
 & \text{s.t.} \\
 & [\theta_j^{*L}, \theta_j^{*M}, \theta_j^{*U}] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}} \right] \\
 & \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \leq 1, \quad \forall j, \\
 & \sum_{i=1}^m v_i \geq 1, \quad \sum_{r=1}^s u_r \geq 1, \\
 & u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad \forall r, p, i.
 \end{aligned} \tag{22}$$

برای حل مدل پیشنهادی تغییراتی به شرح زیر اعمال می‌شود. با فرض این که

$$\theta = \text{Min}_{j \in n} \left[\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \right) \right]$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq \theta, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \geq \theta, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \geq \theta, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

که در صورت برقراری قید اول $\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \geq \theta \right)$ ، دو قید دیگر نیز برقرار خواهند بود و می‌توانند از مساله حذف شوند.

اولین قید نیز می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max} = \theta_l^{*L} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max} = \theta_l^{*M} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max} = \theta_l^{*U} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}. \end{cases}$$

هم چنین، در صورت برقراری قید $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1 \right)$ ، قیدهایی $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U} \leq 1 \right)$ و

نیز برقرار خواهند بود. در نتیجه این قیود زاید هستند و از مدل حذف می‌شوند. هم چنین $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M} \leq 1 \right)$

برای جلوگیری از بی‌کرانی مساله در بهینگی، قید نرمال $\sum_{i=1}^m v_i + \sum_{r=1}^s u_r = 1$ با دو قید $\sum_{i=1}^m v_i \geq 1$ و $\sum_{r=1}^s u_r \geq 1$

جایگزین می‌شود. بنابراین با توجه به تغییرات ذکر شده، مدل (۲۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
\theta^* &= \text{Max } \theta \\
\text{s.t.} \\
\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U &\geq \theta, \quad j = 1, \dots, n, \\
\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max} &= \theta_l^{*L} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}, \\
\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max} &= \theta_l^{*M} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}, \\
\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max} &= \theta_l^{*U} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}, \\
\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L &\leq \theta, \quad j = 1, \dots, n, \\
\sum_{i=1}^m v_i + \sum_{r=1}^s u_r &= 1, \\
u_r, v_i &\geq \varepsilon, \quad \forall r, p, i, \\
\theta &\text{ is free in sign.}
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

بر اساس جواب بهینه مدل (۲۳) یا به عبارتی مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک برای همه واحدها (v_i^*, u_r^*) ، بهترین کارایی فازی برای هر واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j : j = 1, \dots, n$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{\theta}_j^* = [\theta_j^{*L}, \theta_j^{*M}, \theta_j^{*U}] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^L} \right] \tag{۲۴}$$

۳-۳ تعیین بدترین کارایی فازی واحد تصمیم‌گیرنده بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک

مشابه با زیر بخش پیش، مدل فازی برای تعیین مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک برای محاسبه بدترین کارایی فازی هر واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j : j = 1, \dots, n$ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \left\{ \text{Max}_{j \in N} \left[\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij} \right] \right\} \\
\text{s.t.} \\
\frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_r^{\min}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_i^{\max}} &= \tilde{\varphi}_N^*, \\
\tilde{\varphi}_j &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{x}_{ij}} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n, \\
\sum_{i=1}^m v_i + \sum_{r=1}^s u_r &= 1, \\
u_r, v_i &\geq \varepsilon, \quad \forall r, p, i.
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

در مدل فوق، با حفظ بهینگی مقدار بهینه بدترین کارایی فازی واحد آنتی ایده‌آل FADMU تحت عنوان $(\tilde{\varphi}_N^*)$ ، مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک (v_i^*, u_r^*) برای اندازه‌گیری بدترین کارایی فازی هر واحد تصمیم گیرنده $DMU_j : j = 1, \dots, n$ تعیین می‌شود. مطابق با رویکرد حساب اعداد فازی مثلثی، مدل (۲۵) به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Min} \left\{ \text{Max}_{j \in n} \left[\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \right) \right] \right\}$$

s.t.

$$[\varphi_N^{*L}, \varphi_N^{*M}, \varphi_N^{*U}] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \min}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \min}}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \max}}{\sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \min}} \right] \quad (26)$$

$$\text{به} \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \right] \leq 1, \forall j,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i + \sum_{r=1}^s u_r = 1,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \forall r, i.$$

به‌طور مشابه برای حل مدل پیشنهادی، تغییراتی به شرح زیر اعمال می‌شود. فرض کنید

$$\varphi = \text{Max}_{j \in N} \left[\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \right), \left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \right) \right]$$

در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U \leq \varphi, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M \leq \varphi, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq \varphi, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

در صورت برقراری رابطه $\left(\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L \leq \varphi \right)$ ، دو قید دیگر زاید هستند و از مساله حذف می‌شوند.

قید اول نیز به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \min} &= \varphi_N^{*L} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \max}, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \min} &= \varphi_N^{*M} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \max}, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \min} &= \varphi_N^{*U} \times \sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \max}.\end{aligned}$$

در صورت برقراری قید $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L} \leq 1 \right)$ ، قیود $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^U} \leq 1 \right)$ و $\left(\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M} \leq 1 \right)$ برقرار

خواهند بود و از مدل حذف می‌شوند. بنابراین با توجه به تغییرات صورت گرفته، مدل (۲۶) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\varphi^* &= \text{Max } \varphi \\ \text{s.t.} \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L &\leq \varphi, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_r^{L \min} &= \varphi_N^{*L} \sum_{i=1}^m v_i x_i^{U \max}, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_r^{M \min} &= \varphi_N^{*M} \sum_{i=1}^m v_i x_i^{M \max}, \quad (27) \\ \sum_{r=1}^s u_r y_r^{U \min} &= \varphi_N^{*U} \sum_{i=1}^m v_i x_i^{L \max}, \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^U - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^L &\leq \varphi, j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m v_i + \sum_{r=1}^s u_r &= 1, \\ u_r, v_i &\geq \varepsilon, \forall r, p, i.\end{aligned}$$

پس از تعیین مجموعه‌ای از وزن‌های بهینه مشترک (v_i^*, u_r^*) بر اساس مدل (۲۷)، بدترین کارایی فازی هر واحد $DMU_j : j = 1, \dots, n$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{\varphi}_j^* = \left[\varphi_j^{*L}, \varphi_j^{*M}, \varphi_j^{*U} \right] = \left[\frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}^L}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^U}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}^M}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^M}, \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj}^U}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij}^L} \right] \quad (28)$$

۳-۴ کارایی فازی واحد تحت ارزیابی

همان طور که در بخش های قبل ملاحظه نمودید، ابتدا بر اساس رویکرد ابراهیم نژاد و امانی [۲۳] بهترین و بدترین کارایی فازی واحدهای مجازی FIDMU و FADMU به کمک مدل های (۱۵)-(۱۳) و (۲۰)-(۱۸) محاسبه شد. سپس بهترین و بدترین کارایی فازی هر واحد تحت ارزیابی DMU_j : $j = 1, \dots, n$ بر اساس مدل های (۲۳)، (۲۴)، (۲۷) و (۲۸) تعیین شد. حال با توجه به مقادیر به دست آمده، شاخص رابطه نزدیکی فازی برای تعیین کارایی فازی کل هر واحد تحت ارزیابی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$RC_o = \frac{\tilde{\varphi}_o^* - \tilde{\varphi}_N^*}{(\tilde{\varphi}_o^* - \tilde{\varphi}_N^*) + (\tilde{\theta}_1^* - \tilde{\theta}_o^*)}, \quad o = 1, \dots, n. \quad (29)$$

توجه دارید که مقدار شاخص رابطه نزدیکی فازی (۲۹) امکان مقایسه میان واحدهای تحت ارزیابی را فراهم می‌آورد و رتبه واحد تحت ارزیابی DMU_o را تعیین می‌نماید. بنابراین هر چه مقدار آن بزرگتر باشد عملکرد واحد تحت ارزیابی DMU_o بهتر بوده در نتیجه رتبه بهتری خواهد داشت. لازم به ذکر است که با توجه به فازی بودن شاخص رابطه نزدیکی (RC_o) ، رتبه بندی واحدها بر اساس رابطه (۳) انجام می‌شود.

قابل ذکر است که در مطالعه حاضر، توابع عضویت مثلثی برای توصیف فازی بودن داده‌های مدل تحلیل پوششی داده‌ها انتخاب شده‌اند به این دلیل که توابع عضویت مثلثی ساده‌ترین نوع اعداد فازی برای استفاده در محاسبات فازی و عملیات‌های حسابی فازی هستند و نیز، استفاده از توابع عضویت مثلثی نمایش مناسبی از دانش خبرگان ارائه می‌دهد و همچنین پیچیدگی محاسباتی را کاهش می‌دهد. با این وجود، هر شکل دیگر از توابع عضویت نیز می‌تواند به راحتی در روش پیشنهادی مورد استفاده قرار گیرد و استفاده از انواع مختلف اعداد فازی، روند الگوریتمی یا ساختار روش پیشنهادی را تغییر نمی‌دهد.

۴- نتایج عددی

در راستای تحلیل و بررسی مدل پیشنهادی در بخش پیش، مثالی در خصوص شرکت های بیمه ارائه می‌شود. بر این اساس ۳۰ شرکت بیمه شامل ورودی‌ها و خروجی‌های فازی مثلثی به شرح زیر در نظر گرفته شد.

❖ ورودی‌ها

هزینه‌های عملیاتی: هزینه‌هایی عملیاتی مربوط به فعالیت‌های عادی و مستمر شرکت‌ها می‌باشد.

هزینه‌های بیمه: مبالغی که شرکت‌های بیمه‌گر به بیمه‌شونده‌ها پرداخت می‌نمایند.

نیروی کار: تعداد کارکنان هر شرکت بیمه را نشان می‌دهد.

❖ خروجی‌ها

سود پذیره نویسی: میزان سودی که شرکت‌های بیمه به واسطه پذیره‌نویسی سهام خود دریافت می‌نمایند.

سود سرمایه‌گذاری: سودی که به واسطه سرمایه‌گذاری‌های شرکت‌های بیمه‌گر به دست می‌آید.

تعداد حق بیمه‌های صادر شده: تعداد حق بیمه‌هایی که به شرکت‌های بیمه پرداخت می‌شود.

مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌ها به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ قابل مشاهده می‌باشد. این نکته قابل ذکر است که ورودی‌ها و خروجی‌های دو واحد مجازی ایده‌آل و آنتی ایده‌آل فازی FIDMU و FADMU در دو سطر آخر جدول‌های ۱ و ۲ مطابق با رابطه (۹) تعریف شده‌اند. با توجه به مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های فازی موجود در جدول‌های ۱ و ۲، مطابق با الگوریتم روش پیشنهادی در شکل ۱، ابتدا بهترین و بدترین کارایی فازی دو واحد مجازی FIDMU و FADMU بر اساس مدل‌های (۱۵)-(۱۳) و (۲۰)-(۱۸) محاسبه شدند که نتایج آن در دو سطر آخر جدول ۳ قابل مشاهده است. سپس مطابق با کارایی‌های به دست آمده، مجموعه وزن‌های مشترک برای همه واحدها با توجه به مدل‌های (۲۳) و (۲۷) تعیین و مقادیر بهینه به صورت (۰/۰۰۰۰۰۰۰۱)، ۰/۰۹۱۸۱۸۶، ۰/۰۰۰۰۰۰۳۱۳، ۰/۰۰۰۰۰۰۲۸، ۰/۰۰۰۰۰۱۴۰۰، ۰/۰۰۰۰۰۰۰۱ و (۰/۰۰۰۰۰۰۰۱، ۰/۲۳۶۸۳۹۲۵، ۰/۶۵۱۵۲۱۹۱، ۰/۰۱۹۸۲۰۰، ۰/۹۹۹۴۶۲۵۶، ۰/۰۰۰۰۳۶۱۹۸، ۰/۰۰۰۰۰۰۱۱۸) به دست آمد. پس از آن، بر اساس وزن‌های بهینه مشترک به دست آمده، بهترین و بدترین کارایی هر واحد تحت ارزیابی با توجه به تعاریف (۲۴) و (۲۸) محاسبه شد. در نهایت، شاخص رابطه نزدیکی فازی برای هر واحد تحت ارزیابی به کمک رابطه (۲۹) تعیین شد. نتایج به دست آمده در جدول ۳ قابل مشاهده است.

جدول ۱: ورودی‌های فازی شرکت‌های بیمه

شرکت‌ها	هزینه‌های عملیاتی	هزینه‌های بیمه	نیروی کار
۱	(۱۳۲۷۸۹۶،۱۵۲۰۲۰۵،۵،۱۷۱۲۵۱۵)	(۸۱۵۴۶۹،۸۸۰۵۴۷،۹۴۵۶۲۵)	(۶۸،۱۰)
۲	(۱۵۴۶۹۸۵،۱۶۹۱۷۸۶،۱۸۳۶۵۸۷)	(۱۵۴۲۶۸۹،۱۷۱۹۶۱۸،۵،۱۸۹۶۵۴۸)	(۴،۵۶)
۳	(۱۳۱۵۴۸۲،۱۴۶۵۲۲۵،۱۶۱۴۹۶۸)	(۷۰۲۶۹۴،۷۴۹۶۳۸،۷۹۶۵۸۲)	(۱۱،۱۱،۱۱)
۴	(۷۲۶۵۹۸،۷۶۲۸۳،۱۰۲۵۹۶۸)	(۷۱۵۹۶۲،۷۶۶۴۵۷،۸۱۶۹۵۲)	(۵،۷،۸)
۵	(۸۱۲۶۹۸۵،۹۳۴۷۸۵۸،۵،۱۰۵۶۸۷۳۲)	(۴۸۶۵۹۵۳،۵۲۱۷۸۹۹،۵،۵۵۶۹۸۴۶)	(۱۰،۱۱،۱۲)
۶	(۳۲۵۴۸۷۶،۳۷۶۲۳۷۵،۵،۴۲۶۹۸۷۵)	(۸۲۵۴۷۶۸،۶۹۵۵۹،۹۱۳۶۵۴)	(۳،۶،۹)
۷	(۲۶۹۸۷۵۴،۳۱۴۷۲۰۵،۵،۳۵۹۵۶۵۷)	(۲۵۶۴۷۶۳،۳۰۱۷۳۰۹،۵،۳۴۶۹۸۵۶)	(۱۰،۱۳،۱۶)
۸	(۵۰۴۵۶۸۷،۵۶۰۲۲۱۸،۶۱۵۸۷۴۹)	(۲۹۶۴۲۸۳،۳۳۳۰۰۷۸،۵،۳۶۹۵۸۷۴)	(۱۴،۱۵،۱۶)
۹	(۲۷۵۶۹۴۳،۱۹۲۲۷۸۴،۱۵،۳۵۶۹۸۷۴۰)	(۱۰۶۸۷۸۷،۱۵۱۸۷۷۰،۱۹۶۸۷۵۳)	(۷،۷،۷)
۱۰	(۲۱۵۴۳۶۷،۲۵۲۶۴۵۴،۵،۲۸۹۸۵۴۲)	(۲۱۵۹۶۷۴،۲۴۵۹۷۶۹،۵،۲۷۵۹۸۶۵)	(۱۵،۱۷،۱۹)
۱۱	(۳۰۲۴۵۹۶،۳۴۱۱۵۶۱،۳۷۹۸۵۲۶)	(۸۱۶۸۷۹،۸۶۶۱۸۴،۹۱۵۴۸۹)	(۶،۸،۱۰)
۱۲	(۳۷۵۹۸۶۴،۴۱۷۹۲۴۴،۵،۴۵۹۸۶۲۵)	(۷۵۶۴۹۲،۷۹۰۰۹۳،۵،۸۲۳۶۹۵)	(۸،۱۰،۱۲)
۱۳	(۳۲۴۵۸۷۵،۳۵۵۵۹۳۱،۳۸۶۵۹۸۷)	(۲۱۰۶۹۷۵،۲۱۲۶۹۶۶،۵،۲۱۴۶۹۵۸)	(۱۰،۱۲،۱۴)
۱۴	(۲۴۵۹۸۶۵،۲۸۰۲۵۷۵،۵،۳۱۴۵۲۸۶)	(۱۰۸۶۹۴۲،۱۳۹۲۷۴۴،۵،۱۶۹۸۵۴۷)	(۴،۵،۶)
۱۵	(۳۱۴۸۷۶۵،۳۷۰۹۳۱۱،۴۲۶۹۸۵۷)	(۷۴۲۶۹۴،۷۹۴۸۲۳،۵،۸۴۶۹۵۳)	(۸،۹،۱۰)
۱۶	(۲۲۳۵۹۸۴،۲۵۶۵۷۹۲،۲۸۹۵۶۰۰)	(۵۱۲۷۸۳،۵۲۴۸۸۵،۵۳۶۹۸۷)	(۶،۸،۱۰)
۱۷	(۲۱۴۸۷۵۹،۲۵۵۷۳۱۷،۵،۲۹۶۵۸۷۶)	(۱۶۵۴۹۳۰،۲۰۱۱۷۳۷،۲۳۶۵۹۸۱)	(۱۳،۱۴،۱۵)
۱۸	(۹۱۷۵۹۹،۹۸۲۲۹۲،۱۰۴۶۹۸۵)	(۶۳۸۴۷۵،۶۷۷۵۳۴،۵،۷۱۶۵۹۴)	(۹،۱۱،۱۳)
۱۹	(۲۳۵۴۸۷،۲۹۶۲۳۶،۳۵۶۹۸۵)	(۲۶۹۷۵۴،۳۰۳۳۲۷،۳۳۶۹۰۰)	(۵،۶،۷)
۲۰	(۲۲۵۷۸۶،۲۹۱۳۸۶۵،۳۵۶۹۸۷)	(۶۳۷۸۴،۶۸۱۲۱،۵،۷۲۴۵۹)	(۱۰،۱۲،۱۴)
۲۱	(۹۸۶۵۹،۱۳۴۲۵۸،۱۶۹۸۵۷)	(۳۴۷۸۶،۳۷۵۲۷،۵،۴۰۲۶۹)	(۱۰،۱۱،۱۲)
۲۲	(۲۵۴۸۷،۳۶۲۳۶،۴۶۹۸۵)	(۱۹۷۸۴،۲۴۷۱۶،۲۹۶۴۸)	(۷،۸،۹)
۲۳	(۶۶۳۵۹،۷۴۰۲۸،۵،۸۱۶۹۸)	(۳۸۷۴۶،۴۴۳۱۱،۴۹۸۷۶)	(۱۳،۱۵،۱۷)
۲۴	(۲۴۸۸۷۶،۳۱۹۲۲۱،۵،۳۸۹۵۶۷)	(۳۰۴۹۶۵،۳۵۹۳۳۰،۴۱۳۶۹۵)	(۹،۱۰،۱۱)
۲۵	(۳۴۵۹۸۶،۴۰۲۹۲۴،۴۵۹۸۶۲)	(۳۱۰۶۸۵،۳۴۷۶۳۸،۵،۳۸۴۵۹۲)	(۵،۷،۹)
۲۶	(۲۲۵۷۸۶،۲۹۲۷۳۶،۳۵۶۹۸۷)	(۱۸۷۶۴۳،۲۵۰۱۶۸،۵،۳۱۲۶۹۴)	(۱۰،۱۲،۱۴)
۲۷	(۴۱۹۸۶۵،۴۵۹۲۴۲،۵،۴۹۸۶۲۰)	(۳۸۷۵۶۱،۴۲۸۷۰۶،۵،۴۶۹۸۵۲)	(۵،۵،۵)
۲۸	(۲۸۷۵۶۲،۳۵۲۲۰۷،۴۱۶۸۵۲)	(۴۵۱۲۴۸،۴۸۹۹۹۷،۵۲۸۷۴۶)	(۹،۱۱،۱۳)
۲۹	(۱۹۸۷۶۴،۲۵۴۷۲۹۵،۳۱۰۶۹۵)	(۲۲۱۵۹۹،۲۴۸۲۸۲،۲۷۴۹۶۵)	(۶،۶،۶)
۳۰	(۲۹۸۴۰۶،۳۶۷۶۹۵،۵،۴۶۹۸۵)	(۲۶۸۴۵۷،۳۴۱۰۵۴،۵،۴۱۳۶۵۲)	(۱۲،۱۳،۱۴)
	(۲۵۴۸۷،۳۶۲۳۶،۴۶۹۸۵)	(۱۹۷۸۴،۲۴۷۱۶،۲۹۶۴۸)	(۳،۵،۵)
FIDMU	(۲۵۴۸۷،۳۶۲۳۶،۴۶۹۸۵)	(۱۹۷۸۴،۲۴۷۱۶،۲۹۶۴۸)	(۳،۵،۵)
FADMU	(۸۱۲۶۹۸۵،۱۹۲۲۷۸۴،۱۵،۳۵۶۹۸۷۴۰)	(۴۸۶۵۹۵۳،۵۲۱۷۸۹۹،۵،۵۵۶۹۸۴۶)	(۱۵،۱۷،۱۹)

جدول ۲: خروجی‌های فازی شرکت‌های بیمه

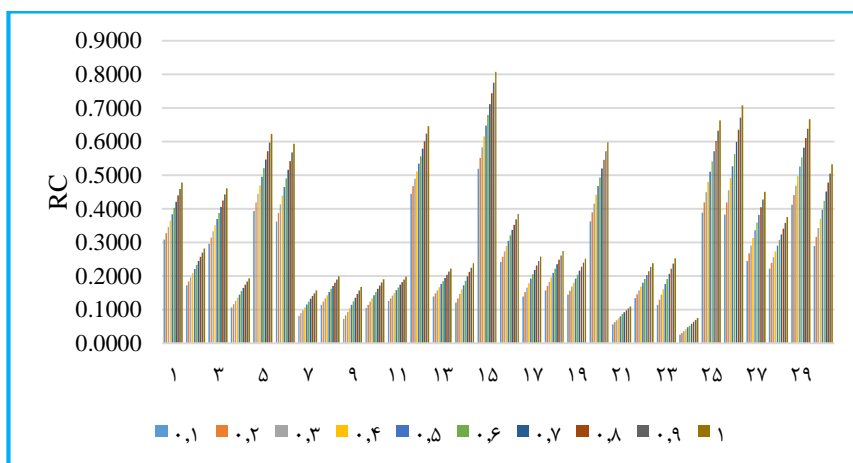
تعداد حق بیمه‌های صادر شده	سود سرمایه‌گذاری	سود پذیره نویسی	شرکت‌ها
(۴۵۰۰،۵۳۵۰،۶۲۰۰)	(۸۲۵۷۸۶،۸۷۱۱۸۵،۹۱۶۵۸۴)	(۱۰۶۸۷۵۷،۱۱۹۰۶۱۳،۱۳۱۲۴۶۹)	۱
(۱۶۵۰،۱۹۰۰،۲۱۵۰)	(۹۴۵۸۶۲،۹۹۱۲۲۵،۱۰۳۶۵۸۹)	(۱۳۵۶۹۸۳،۱۵۲۶۴۲۹،۱۶۹۵۸۷۶)	۲
(۲۸۰۰،۳۱۰۰،۳۴۰۰)	(۷۷۵۶۹۳،۸۴۹۶۷۵،۹۲۳۶۵۸)	(۴۲۶۵۹۰،۴۵۶۵۶۳،۴۸۶۵۳۶)	۳
(۴۲۰۰،۴۶۰۰،۵۰۰۰)	(۲۷۸۴۵۹،۳۳۷۵۲۱،۳۹۶۶۵۸۴)	(۳۵۶۹۸۲،۳۹۰۳۲۰،۴۲۳۶۵۸)	۴
(۲۲۰۰،۲۹۰۰،۳۶۰۰)	(۵۳۴۸۷۶۴،۶۱۶۷۱۱۶،۶۹۸۵۴۶۹)	(۹۲۳۵۷۸۴،۹۶۰۲۱۷۹،۹۹۶۸۵۷۴)	۵
(۱۵۰۰،۱۸۵۰،۲۲۰۰)	(۴۹۸۷۵۱،۵۴۷۸۱۳،۵۹۶۸۷۵)	(۲۷۸۴۹۶۸،۳۴۵۱۸۳۲،۴۱۵۸۶۹۶)	۶
(۵۰۰۰،۵۱۰۰،۵۲۰۰)	(۵۱۴۷۸۸،۵۶۳۶۷۴،۶۱۲۵۶۰)	(۳۱۶۸۷۵۹،۳۵۶۸۱۶۷،۳۹۶۸۵۷۶)	۷
(۶۰۰۰،۶۷۵۰،۷۵۰۰)	(۶۹۸۷۴۶،۷۴۲۰۸۷،۷۸۵۴۲۹)	(۴۶۸۹۷۵۸،۵۱۸۹۶۶۰،۵۶۸۹۵۶۳)	۸
(۲۹۰۰،۳۲۰۰،۳۵۰۰)	(۳۴۶۹۸۵،۳۷۹۸۴۱،۴۰۴۱۲۶۹۸)	(۱۲۳۶۷۸۹،۱۲۷۴۶۶۷،۱۳۱۲۵۰۴)	۹
(۶۷۰۰،۶۹۵۰،۷۲۰۰)	(۶۱۳۸۷۶،۶۶۴۹۳۱،۷۱۵۹۸۶)	(۲۵۹۷۶۸۹،۲۹۸۱۶۷۴،۳۳۶۵۶۵۹)	۱۰
(۳۵۰۰،۳۶۷۵،۳۸۵۰)	(۲۶۹۸۴،۳۰۸۴۱،۳۴۶۹۸)	(۲۱۴۹۷۶۸،۲۲۳۱۲۱۳،۲۳۱۲۶۵۹)	۱۱
(۲۷۰۰،۳۱۶۰،۳۶۲۰)	(۹۷۸۴۶۹،۱۰۱۷۷۲۷،۱۰۵۶۹۸۵)	(۱۷۶۹۸۵۷،۱۸۳۲۶۷۱،۱۸۹۵۴۸۶)	۱۲
(۳۳۰۰،۴۱۰۰،۴۹۰۰)	(۳۱۲۶۹۸،۳۴۶۱۷۸،۳۷۹۶۵۸)	(۴۱۳۸۷۶۵،۴۷۰۱۸۷۵،۵۲۶۴۹۸۵)	۱۳
(۲۰۰۰،۲۳۵۰،۲۷۰۰)	(۴۲۹۸۵۶،۴۶۳۲۲۶،۴۹۶۵۹۶)	(۱۴۶۹۷۶۸،۱۶۹۱۷۱۱،۱۹۱۳۶۵۴)	۱۴
(۴۰۰۰،۴۰۵۰،۴۱۰۰)	(۶۲۸۹۵۷،۶۸۲۷۷۶،۷۳۶۶۵۹۶)	(۳۹۶۷۸۵۴،۴۴۶۶۸۶۳،۴۹۶۵۸۷۲)	۱۵
(۳۱۰۰،۳۳۷۵،۳۶۵۰)	(۲۸۷۶۹۴،۳۵۱۷۸۶،۴۰۴۱۵۸۷۹)	(۹۲۶۵۸۷،۹۶۶۱۵۸۷،۹۹۶۶۵۸۷)	۱۶
(۶۱۵۰،۶۱۷۵،۶۲۰۰)	(۴۴۶۹۸۵،۵۰۸۴۱۹،۵۵۶۹۸۵۴)	(۳۴۸۹۶۷۵،۳۸۰۸۳۱۶،۴۰۴۱۲۶۹۵۸)	۱۷
(۲۷۵۰،۲۸۷۵،۳۰۰۰)	(۲۶۴۹۸۳،۳۴۰۷۹۰،۳۸۴۱۶۵۹۸)	(۷۳۹۸۶۵،۷۸۳۲۲۴،۸۲۶۵۸۴)	۱۸
(۲۸۰۰،۳۰۵۰،۳۳۰۰)	(۵۶۹۸۴،۶۶۴۸۵،۷۵۹۸۶)	(۶۱۲۸۷۶،۶۶۹۷۳۷،۷۲۶۵۹۸)	۱۹
(۳۶۰۰،۳۷۰۰،۳۸۰۰)	(۳۴۶۹۸،۴۲۴۸۳،۵۰۵۰۲۶۹)	(۴۳۹۸۶۵،۴۸۳۱۷۷،۵۲۶۴۸۹)	۲۰
(۴۵۰۰،۴۸۵۰،۵۲۰۰)	(۷۲۶۸،۸۶۱۶،۹۹۹۶۵)	(۶۲۵۷۸،۶۸۵۷۳،۷۵۴۵۶۹)	۲۱
(۲۵۰۰،۳۲۵۰،۴۰۰۰)	(۵۹۸۶،۷۴۷۷،۸۹۶۸)	(۹۱۳۶۸،۹۵۲۱۱،۹۹۸۵۴)	۲۲
(۴۸۰۰،۵۴۰۰،۶۰۰۰)	(۲۶۹۸۵،۴۱۹۸۴،۵۵۶۹۸۴)	(۳۲۵۸۴،۳۸۱۲۱۱،۴۳۶۵۸)	۲۳
(۴۹۰۰،۵۲۰۰،۵۵۰۰)	(۲۱۵۸۷،۳۰۱۴۱،۳۸۶۹۵)	(۲۴۵۱۶۹،۲۹۰۸۴۸،۳۳۶۵۲۸)	۲۴
(۲۸۰۰،۲۹۰۰،۳۰۰۰)	(۳۸۷۵۹۶،۴۵۷۰۴۷،۵۲۶۴۹۸)	(۴۸۷۵۹۵،۵۵۶۵۳۶،۶۲۵۴۷۸)	۲۵
(۳۸۰۰،۴۰۰۰،۴۲۰۰)	(۳۱۵۶۹۴،۳۴۶۱۴۵،۳۷۶۵۹۶)	(۳۸۷۶۲۹،۴۴۳۰۹۴،۴۹۸۵۶۰)	۲۶
(۲۶۰۰،۳۲۵۰،۳۹۰۰)	(۲۹۸۴۵۷،۳۹۷۶۷۶،۴۹۶۸۹۵)	(۳۰۵۴۷۹،۳۵۲۱۷۷،۳۹۸۸۷۵)	۲۷
(۳۶۰۰،۳۹۰۰،۴۲۰۰)	(۳۶۵۴۸۲،۴۱۴۵۳۹،۴۶۳۵۹۶)	(۲۹۸۶۵۴،۳۸۴۲۶۷،۴۶۶۸۷۵)	۲۸
(۱۹۰۰،۲۲۰۰،۲۵۰۰)	(۳۰۵۷۸۴،۳۳۱۳۸۴،۳۵۶۹۸۵)	(۳۹۸۵۴۶،۴۷۷۷۶۳،۵۵۶۹۸۰)	۲۹
(۴۷۰۰،۴۸۰۰،۴۹۰۰)	(۳۲۴۹۷۶،۳۷۴۳۱۷،۴۰۴۳۶۵۹)	(۳۵۱۶۷۵،۳۸۷۴۱۵،۴۰۴۳۱۵۶)	۳۰
(۶۷۰۰،۶۹۵۰،۷۵۰۰)	(۵۳۴۸۷۶۴،۶۱۶۷۱۱۶،۶۹۸۵۴۶۹)	(۹۲۳۵۷۸۴،۹۶۰۲۱۷۹،۹۹۶۸۵۷۴)	FIDMU
(۱۵۰۰،۱۸۵۰،۲۱۵۰)	(۵۹۸۶،۷۴۷۷،۸۹۶۸)	(۳۲۵۸۴،۳۸۱۲۱،۴۳۶۵۸)	FADMU

جدول ۳: نتایج بهترین و بدترین رابطه کارایی فازی

$\tilde{RC}_j = (RC_j^L, RC_j^M, RC_j^U)$	$\tilde{\varphi}_j^* = (\varphi_j^{*L}, \varphi_j^{*M}, \varphi_j^{*U})$	$\tilde{\theta}_j^* = (\theta_j^{*L}, \theta_j^{*M}, \theta_j^{*U})$	شرکت‌ها
(۰،۰۰۲۳۰،۰۰۳۷۰،۰۰۵۸)	(۰،۴۲۱۱۰،۴۸۵۱۰،۵۶۰۱)	(۰،۴۳۳۱۰،۴۹۶۷۰،۵۷۰۴)	۱
(۰،۰۰۱۳۰،۰۰۲۲۰،۰۰۳۶)	(۰،۲۵۲۰۰،۲۹۶۶۰،۳۵۱۶)	(۰،۲۵۳۲۰،۲۹۷۸۰،۳۵۲۵)	۲
(۰،۰۰۲۲۰،۰۰۳۶۰،۰۰۵۶)	(۰،۴۰۵۱۰،۴۶۹۴۰،۵۴۱۹)	(۰،۴۲۲۳۰،۴۹۰۴۰،۵۶۷۵)	۳
(۰،۰۰۰۹۰،۰۰۱۶۰،۰۰۲۷)	(۰،۱۶۴۷۰،۲۰۸۹۰،۲۵۹۸)	(۰،۱۶۸۷۰،۲۱۳۳۰،۲۶۴۳)	۴
(۰،۰۰۲۸۰،۰۰۴۷۰،۰۰۷۵)	(۰،۵۰۹۱۰،۶۰۹۷۰،۷۲۴۹)	(۰،۵۱۱۱۰،۶۱۲۲۰،۷۲۸)	۵
(۰،۰۰۲۵۰،۰۰۴۴۰،۰۰۷۳)	(۰،۴۵۷۳۰،۵۷۱۶۰،۷۰۰۲)	(۰،۴۶۶۷۰،۵۷۸۳۰،۷۰۱۹)	۶
(۰،۰۰۰۷۰،۰۰۱۳۰،۰۰۲۳)	(۰،۱۳۴۵۰،۱۷۲۲۰،۲۲۳۳)	(۰،۱۳۳۹۰،۱۷۱۴۰،۲۲۲۱)	۷
(۰،۰۰۰۹۰،۰۰۱۶۰،۰۰۲۷)	(۰،۱۸۰،۲۱۷۳۰،۲۶۳۹)	(۰،۱۷۹۵۰،۲۱۶۸۰،۲۶۳۳)	۸
(۰،۰۰۰۶۰،۰۰۱۲۰،۰۰۲۵)	(۰،۱۱۴۷۰،۱۶۰۸۰،۲۴۹۲)	(۰،۱۲۰۹۰،۱۶۷۲۰،۲۵۲۵)	۹
(۰،۰۰۰۹۰،۰۰۱۵۰،۰۰۲۶)	(۰،۱۶۳۹۰،۲۰۵۰۰،۲۵۷۵)	(۰،۱۶۵۰۰،۲۰۶۲۰،۲۵۸۹)	۱۰
(۰،۰۰۱۱۰،۰۰۱۷۰،۰۰۲۶)	(۰،۲۰۶۴۰،۲۲۸۵۰،۲۵۳۵)	(۰،۲۰۷۹۰،۲۲۹۴۰،۲۵۳۴)	۱۱
(۰،۰۰۳۴۰،۰۰۵۱۰،۰۰۷۵)	(۰،۶۱۲۱۰،۶۶۵۸۰،۷۲۴۸)	(۰،۶۴۰۳۰،۶۹۳۵۰،۷۵۱۳)	۱۲

(۰,۰۰۱۲,۰,۰۰۱۹,۰,۰۰۲۹)	(۰,۲۱۸۱,۰,۲۴۹۲,۰,۲۸۱۱)	(۰,۲۱۷۸,۰,۲۴۸۱,۰,۲۷۷۹)	۱۳
(۰,۰۰۰۹,۰,۰۰۱۷,۰,۰۰۳۳)	(۰,۱۷۰۲,۰,۲۳۰۱,۰,۳۲۳۶)	(۰,۱۷۰۵,۰,۲۳۰۶,۰,۳۲۴۵)	۱۴
(۰,۰۰۳۶,۰,۰۰۶۰,۰,۰۰۹۶)	(۰,۶۶۲۹,۰,۷۸۴۲,۰,۹۲۲۸)	(۰,۶۷۹۹,۰,۸۰۳۳,۰,۹۴۴۴)	۱۵
(۰,۰۰۱۸,۰,۰۰۳۰,۰,۰۰۴۷)	(۰,۳۳۳۸,۰,۳۹۵۲,۰,۴۶۰۸)	(۰,۳۵۲۱,۰,۴۱۳۱,۰,۴۷۷۷)	۱۶
(۰,۰۰۱۱,۰,۰۰۱۹,۰,۰۰۳۵)	(۰,۱۹۶۶,۰,۲۵۵۸,۰,۳۳۴)	(۰,۱۹۶۷,۰,۲۵۶۴,۰,۳۴۱۶)	۱۷
(۰,۰۰۱۲,۰,۰۰۲۲,۰,۰۰۳۶)	(۰,۲۲۱۳,۰,۲۸۱۴,۰,۳۴۹۴)	(۰,۲۲۹۸,۰,۲۹۱۷,۰,۳۶۱۳)	۱۸
(۰,۰۰۱۲,۰,۰۰۲۰,۰,۰۰۳۴)	(۰,۲۱۰۳,۰,۲۶۱۱,۰,۳۲۴۹)	(۰,۲۱۷۸,۰,۲۶۹۷,۰,۳۳۴۶)	۱۹
(۰,۰۰۲۵,۰,۰۰۴۴,۰,۰۰۷)	(۰,۴۵۹۲,۰,۵۷۰۶,۰,۷۰۶۵)	(۰,۶۹۳۳,۰,۸۳۴۹,۰,۹۹۵۹)	۲۰
(۰,۰۰۰۶,۰,۰۰۱۰,۰,۰۰۱۷)	(۰,۱۱۱۸,۰,۱۳۶۳,۰,۱۶۵۱)	(۰,۱۹۹۹,۰,۲۴۱۷,۰,۲۹۰۲)	۲۱
(۰,۰۰۱۱,۰,۰۰۱۹,۰,۰۰۳۲)	(۰,۱۹۷۵,۰,۲۴۵۹,۰,۳۱)	(۰,۳۳۵۹,۰,۴۴۰۶,۰,۵۹۷۵)	۲۲
(۰,۰۰۰۸,۰,۰۰۱۸,۰,۰۰۳۶)	(۰,۱۴۱۰,۰,۲۳۱۶,۰,۳۴۵۷)	(۰,۲۶۴۲,۰,۴۳۸۹,۰,۶۶۳۸)	۲۳
(۰,۰۰۰۴,۰,۰۰۰۷,۰,۰۰۱۴)	(۰,۰۶۶۵,۰,۰۹۵۱,۰,۱۳۳۶)	(۰,۰۶۹۸,۰,۱۰۰۲,۰,۱۴۱۵)	۲۴
(۰,۰۰۲۶,۰,۰۰۴۷,۰,۰۰۸۳)	(۰,۴۷۱۰,۰,۶۱۳۵,۰,۷۹۲۱)	(۰,۴۹۶۸,۰,۶۴۳۶,۰,۸۲۵۴)	۲۵
(۰,۰۰۲۵,۰,۰۰۴۷,۰,۰۰۹۱)	(۰,۴۴۱۹,۰,۶۰۶۳,۰,۸۷۴۸)	(۰,۴۹۵۱,۰,۶۸۵۰,۱,۰۰۰۰)	۲۶
(۰,۰۰۱۶۳,۰,۰۰۳۲,۰,۰۰۵۹)	(۰,۲۹۲۶,۰,۴۱۵۳,۰,۵۶۳۳)	(۰,۳۰۰۷,۰,۴۲۸۴,۰,۵۸۳۲)	۲۷
(۰,۰۰۱۶,۰,۰۰۲۹,۰,۰۰۴۸)	(۰,۲۹۷۱,۰,۳۷۲۵,۰,۴۶۱۴)	(۰,۳۱۵۲,۰,۳۹۳۶,۰,۴۸۵۴)	۲۸
(۰,۰۰۲۹,۰,۰۰۴۹,۰,۰۰۸۱)	(۰,۵۲۲۵,۰,۶۳۸۵,۰,۷۸۰۵)	(۰,۵۵۲۴,۰,۶۷۸۴,۰,۸۳۴۸)	۲۹
(۰,۰۰۱۹,۰,۰۰۳۶,۰,۰۰۶۹)	(۰,۳۴۶۵,۰,۴۷۳۶,۰,۶۶۳۱)	(۰,۳۷۵۷,۰,۵۲۰۵,۰,۷۴۳۶)	۳۰
		(۹۵,۹۶۶۲,۱۲۹,۱۷۴۳,۱۷۸,۹۷۷۷)	FIDMU
		(۰,۰۰۰۹,۰,۰۰۱۲,۰,۰۰۱۵)	FADMU

همان طور که در جدول ۳ قابل ملاحظه است کران بالای بهترین کارایی فازی شرکت شماره ۱ برابر با یک است، در حالی که کران بالای دیگر واحدها کمتر از یک می‌باشد. در واقع تنها شرکت شماره ۱ در کران بالای خود کارا می‌باشد و باقی شرکت‌ها ناکارا هستند. کمترین مقدار برای کران بالای بهترین کارایی فازی و بدترین کارایی فازی متعلق به شرکت ۲۴ می‌باشد در حالی که بیشترین مقدار برای کران بالای بهترین کارایی فازی و بدترین کارایی فازی به ترتیب متعلق به شرکت‌های ۱ و ۱۵ می‌باشد. برای بررسی و تحلیل بیشتر واحدها و رتبه‌بندی آن‌ها، شاخص رابطه نزدیکی فازی در سطوح مختلف $\alpha \in (0,1]$ برای ۳۰ شرکت بیمه از طریق رابطه (۲۹) محاسبه و نتایج آن در جدول ۴ جمع آوری شد. با توجه به جدول ۴ مشاهده می‌شود که شاخص رابطه نزدیکی فازی هر واحد با افزایش سطوح مختلف $\alpha = \{0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6,0,7,0,8,0,9,1\}$ افزایش می‌یابد. این مطلب در شکل ۳ به خوبی قابل رویت است.



شکل ۳: شاخص رابطه نزدیکی فازی در سطوح مختلف $\alpha \in (0,1]$

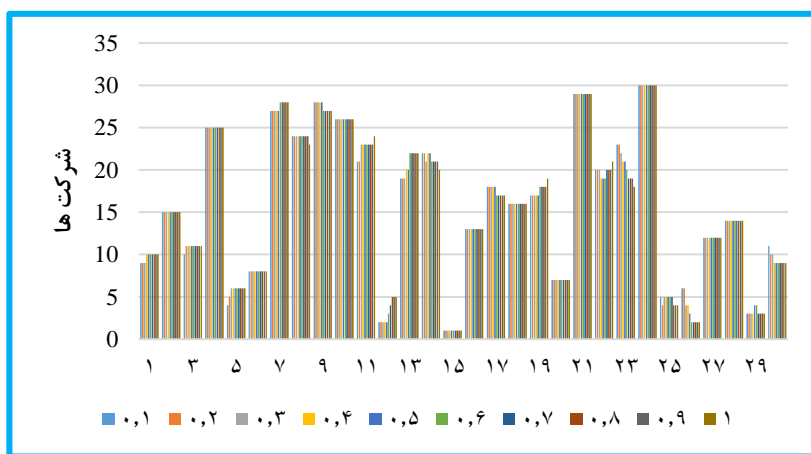
□
جدول ۴: شاخص رابطه نزدیکی کارایی فازی RC_j^α

شرکت	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.7$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$
۱	۰,۳۰۸۱	۰,۳۲۷۰	۰,۳۴۵۸	۰,۳۶۴۶	۰,۳۸۳۵	۰,۴۰۲۳	۰,۴۲۱۱	۰,۴۳۹۹	۰,۴۵۸۸	۰,۴۷۷۶
۲	۰,۱۷۱۸	۰,۱۸۴۰	۰,۱۹۶۲	۰,۲۰۸۴	۰,۲۲۰۵	۰,۲۳۲۷	۰,۲۴۴۹	۰,۲۵۷۱	۰,۲۶۹۳	۰,۲۸۱۴
۳	۰,۲۹۶۲	۰,۳۱۴۵	۰,۳۳۲۸	۰,۳۵۱۱	۰,۳۶۹۴	۰,۳۸۷۷	۰,۴۰۶۰	۰,۴۲۴۳	۰,۴۴۲۶	۰,۴۶۰۹
۴	۰,۱۰۶۴	۰,۱۱۶۰	۰,۱۲۵۷	۰,۱۳۵۳	۰,۱۴۵۰	۰,۱۵۴۶	۰,۱۶۴۳	۰,۱۷۳۹	۰,۱۸۳۶	۰,۱۹۳۲
۵	۰,۳۹۳۳	۰,۴۱۸۸	۰,۴۴۴۳	۰,۴۶۹۸	۰,۴۹۵۲	۰,۵۲۰۷	۰,۵۴۶۲	۰,۵۷۱۷	۰,۵۹۷۲	۰,۶۲۲۷
۶	۰,۳۶۲۰	۰,۳۸۷۶	۰,۴۱۳۳	۰,۴۳۹۰	۰,۴۶۴۶	۰,۴۹۰۳	۰,۵۱۶۰	۰,۵۴۱۶	۰,۵۶۷۳	۰,۵۹۳۰
۷	۰,۰۸۰۸	۰,۰۸۹۳	۰,۰۹۷۸	۰,۱۰۶۳	۰,۱۱۴۸	۰,۱۲۳۳	۰,۱۳۱۸	۰,۱۴۰۳	۰,۱۴۸۸	۰,۱۵۷۳
۸	۰,۱۱۴۳	۰,۱۲۳۷	۰,۱۳۳۱	۰,۱۴۲۵	۰,۱۵۱۹	۰,۱۶۱۳	۰,۱۷۰۷	۰,۱۸۰۲	۰,۱۸۹۶	۰,۱۹۹۰
۹	۰,۰۷۲۲	۰,۰۸۲۷	۰,۰۹۳۳	۰,۱۰۳۸	۰,۱۱۴۴	۰,۱۲۵۰	۰,۱۳۵۵	۰,۱۴۶۱	۰,۱۵۶۶	۰,۱۶۷۲
۱۰	۰,۱۰۴۴	۰,۱۱۳۹	۰,۱۲۳۵	۰,۱۳۳۰	۰,۱۴۲۶	۰,۱۵۲۱	۰,۱۶۱۶	۰,۱۷۱۲	۰,۱۸۰۷	۰,۱۹۰۳
۱۱	۰,۱۲۵۵	۰,۱۳۳۵	۰,۱۴۱۶	۰,۱۴۹۶	۰,۱۵۷۶	۰,۱۶۵۶	۰,۱۷۳۷	۰,۱۸۱۷	۰,۱۸۹۷	۰,۱۹۷۸
۱۲	۰,۴۴۴۷	۰,۴۶۷۰	۰,۴۸۹۴	۰,۵۱۱۷	۰,۵۳۴۰	۰,۵۵۶۴	۰,۵۷۸۷	۰,۶۰۱۱	۰,۶۲۳۴	۰,۶۴۵۷
۱۳	۰,۱۳۸۹	۰,۱۴۸۱	۰,۱۵۷۳	۰,۱۶۶۶	۰,۱۷۵۸	۰,۱۸۵۰	۰,۱۹۴۲	۰,۲۰۳۵	۰,۲۱۲۷	۰,۲۲۱۹
۱۴	۰,۱۲۰۳	۰,۱۳۳۴	۰,۱۴۶۵	۰,۱۵۹۶	۰,۱۷۲۶	۰,۱۸۵۷	۰,۱۹۸۸	۰,۲۱۱۹	۰,۲۲۵۰	۰,۲۳۸۰
۱۵	۰,۵۱۹۱	۰,۵۵۱۱	۰,۵۸۳۱	۰,۶۱۵۲	۰,۶۴۷۲	۰,۶۷۹۲	۰,۷۱۱۳	۰,۷۴۳۳	۰,۷۷۵۳	۰,۸۰۷۳
۱۶	۰,۲۴۱۳	۰,۲۵۷۲	۰,۲۷۳۱	۰,۲۸۹۰	۰,۳۰۴۸	۰,۳۲۰۷	۰,۳۳۶۶	۰,۳۵۲۴	۰,۳۶۸۳	۰,۳۸۴۲
۱۷	۰,۱۳۹۱	۰,۱۵۲۳	۰,۱۶۵۵	۰,۱۷۸۷	۰,۱۹۱۹	۰,۲۰۵۲	۰,۲۱۸۴	۰,۲۳۱۶	۰,۲۴۴۸	۰,۲۵۸۰
۱۸	۰,۱۵۷۰	۰,۱۷۰۰	۰,۱۸۳۰	۰,۱۹۶۰	۰,۲۰۹۰	۰,۲۲۲۰	۰,۲۳۵۰	۰,۲۴۸۰	۰,۲۶۱۰	۰,۲۷۴۰
۱۹	۰,۱۴۴۲	۰,۱۵۶۱	۰,۱۶۸۱	۰,۱۸۰۰	۰,۱۹۲۰	۰,۲۰۳۹	۰,۲۱۵۸	۰,۲۲۷۸	۰,۲۳۹۷	۰,۲۵۱۷
۲۰	۰,۳۶۳۰	۰,۳۸۹۱	۰,۴۱۵۲	۰,۴۴۱۳	۰,۴۶۷۴	۰,۴۹۳۴	۰,۵۱۹۵	۰,۵۴۵۶	۰,۵۷۱۷	۰,۵۹۷۸
۲۱	۰,۰۵۶۵	۰,۰۶۲۴	۰,۰۶۸۳	۰,۰۷۴۲	۰,۰۸۰۱	۰,۰۸۶۱	۰,۰۹۲۰	۰,۰۹۷۹	۰,۱۰۳۸	۰,۱۰۹۷
۲۲	۰,۱۳۳۸	۰,۱۴۵۳	۰,۱۵۶۸	۰,۱۶۸۴	۰,۱۷۹۹	۰,۱۹۱۴	۰,۲۰۳۰	۰,۲۱۴۵	۰,۲۲۶۰	۰,۲۳۷۶
۲۳	۰,۱۱۴۵	۰,۱۲۹۸	۰,۱۴۵۱	۰,۱۶۰۳	۰,۱۷۵۶	۰,۱۹۰۹	۰,۲۰۶۲	۰,۲۲۱۴	۰,۲۳۶۷	۰,۲۵۲۰
۲۴	۰,۰۲۵۱	۰,۰۳۰۶	۰,۰۳۶۱	۰,۰۴۱۷	۰,۰۴۷۲	۰,۰۵۲۷	۰,۰۵۸۲	۰,۰۶۳۷	۰,۰۶۹۲	۰,۰۷۴۷
۲۵	۰,۳۸۸۵	۰,۴۱۸۹	۰,۴۴۹۴	۰,۴۷۹۹	۰,۵۱۰۴	۰,۵۴۰۹	۰,۵۷۱۳	۰,۶۰۱۸	۰,۶۳۲۳	۰,۶۶۲۸
۲۶	۰,۳۸۲۴	۰,۴۱۸۶	۰,۴۵۴۷	۰,۴۹۰۸	۰,۵۲۶۹	۰,۵۶۳۱	۰,۵۹۹۲	۰,۶۳۵۳	۰,۶۷۱۴	۰,۷۰۷۶
۲۷	۰,۲۴۴۴	۰,۲۶۷۳	۰,۲۹۰۲	۰,۳۱۳۲	۰,۳۳۶۱	۰,۳۵۹۰	۰,۳۸۱۹	۰,۴۰۴۹	۰,۴۲۷۸	۰,۴۵۰۷
۲۸	۰,۲۲۲۰	۰,۲۳۹۰	۰,۲۵۶۰	۰,۲۷۳۰	۰,۲۹۰۱	۰,۳۰۷۱	۰,۳۲۴۱	۰,۳۴۱۱	۰,۳۵۸۱	۰,۳۷۵۲
۲۹	۰,۴۱۲۲	۰,۴۴۰۵	۰,۴۶۸۷	۰,۴۹۷۰	۰,۵۲۵۲	۰,۵۵۳۵	۰,۵۸۱۷	۰,۶۱۰۰	۰,۶۳۸۲	۰,۶۶۶۵
۳۰	۰,۲۸۹۱	۰,۳۱۶۰	۰,۳۴۳۰	۰,۳۷۰۰	۰,۳۹۶۹	۰,۴۲۳۹	۰,۴۵۰۹	۰,۴۷۷۹	۰,۵۰۴۸	۰,۵۳۱۸

مطابق با مقادیر شاخص رابطه نزدیکی در جدول ۴ واحدها در سطوح مختلف $\alpha \in (0,1)$ رتبه بندی شده و نتایج آن در جدول ۵ قابل مشاهده است. همان طور که در جدول ۵ مشاهده می‌کنید، تغییراتی در رتبه‌بندی واحدها در سطوح مختلف $\alpha = (0,1)$ دیده می‌شود، اما به نظر می‌رسد که این تغییرات خیلی محسوس نیستند.

به طور کلی، شرکت‌های شماره ۲، ۴، ۶، ۱۰، ۱۵، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۱، ۲۴، ۲۷ و ۲۸ در سطوح مختلف $\alpha = (0,1)$ به ترتیب رتبه‌های ۱۵، ۲۵، ۸، ۲۶، ۱، ۱۳، ۱۶، ۷، ۲۹، ۳۰، ۱۲ و ۱۴ دارند. شرکت‌های شماره ۱۵ و ۲۴ به ترتیب اولین و آخرین رتبه را در میان ۳۰ شرکت دارا هستند. اما اگر به صورت جزئی‌تر به مساله نگاه کنیم، شرکت شماره ۱ در سطوح $\{0/1, 0/2, 0/3\}$ دارای رتبه ۹ و در باقی سطوح رتبه ۱۰ را دارد. شرکت شماره ۳ تنها در

سطح ۰/۱ رتبه ۱۰ و در باقی سطوح رتبه ۱۱ دارد. شرکت شماره ۵ در سطوح ۰/۱ و ۰/۲ به ترتیب رتبه‌های ۴ و ۵ و در باقی سطوح رتبه ۶ را دارا می‌باشد. شرکت شماره ۷ تا قبل از سطح ۰/۶ دارای رتبه ۲۷ و بعد از آن رتبه ۲۸ را به خود گرفته است. این در حالی است که شرکت شماره ۹ نیز وضعیت عکس با شرکت ۷ را داراست یعنی تا قبل از سطح ۰/۶ دارای رتبه ۲۸ و بعد از آن رتبه ۲۷ را داشته است. شرکت‌های شماره ۱۷ و ۱۹ نیز وضعیتی مشابه با شرکت‌های ۷ و ۹ دارند. به این صورت که شرکت شماره ۱۷ تا قبل از سطح ۰/۶ رتبه ۱۸ و بعد از آن رتبه ۱۷ را دارد در حالی که شرکت شماره ۱۹ عکس آن می‌باشد. شرکت شماره ۸ در همه سطوح به جز سطح آلفا برابر با یک که رتبه ۲۳ را دارد رتبه ۲۴ را دریافت نموده است. شرکت شماره ۱۱ در سطوح ۰/۱، ۰/۲ و ۱ به ترتیب دارای رتبه‌های ۲۱ و ۲۴ و در باقی سطوح دارای رتبه ۲۳ می‌باشد. شرکت‌های ۱۲، ۲۳ و ۲۶ در میان ۳۰ شرکت، نوسان رتبه بیشتری را داشته‌اند. شرکت شماره ۱۳ در سه سطح ۰/۱ تا ۰/۳ رتبه ۱۹، در دو سطح ۰/۴ و ۰/۵ رتبه ۲۰ و در باقی سطوح رتبه ۲۲ را داراست. شرکت شماره ۱۴ در سطوح مختلف دارای رتبه‌های ۲۰، ۲۱ و ۲۲ می‌باشد. شرکت شماره ۲۲ در سطح ۰/۴ تا ۰/۶ دارای رتبه ۱۹ و در باقی سطوح رتبه ۲۰ را دارد. شرکت شماره ۲۹ در سطوح ۰/۵ و ۰/۶ دارای رتبه ۴ و در باقی سطوح رتبه ۳ را داراست. همچنین، شرکت شماره ۳۰ در سطح ۰/۱ رتبه ۱۱، در دو سطح ۰/۲ و ۰/۳ رتبه ۹ و در باقی سطوح رتبه ۹ را دارد. تفاوت در رتبه بندی واحدها در سطوح مختلف آلفا حاکی از این مطلب است که علاوه بر تغییرات در مقدار کارایی، رتبه‌بندی واحدها نیز در سطوح مختلف نیز تغییر می‌کند. تغییرات رتبه بندی در روش پیشنهادی، در شکل ۴ به خوبی قابل ملاحظه است.



شکل ۴: تغییرات رتبه بندی واحدها در سطوح مختلف $\alpha \in (0, 1]$

۵- نتیجه گیری

عدم قطعیت یا مبهم بودن داده‌ها در برخی از برنامه‌های کاربردی در دنیای واقعی منجر به معرفی روش‌هایی برای ارزیابی سیستم‌هایی با داده‌های این چنین در سال‌های اخیر شده است که تجزیه و تحلیل پوششی داده‌های فازی یکی از تکنیک‌های موجود در برخورد با چنین موارد است. پس از ارزیابی عملکرد فرآیندهای تولیدی، موضوع رتبه‌بندی واحدها از نظر نحوه عملکرد آن‌ها در سیستم یکی از مهمترین مسائل است. از این رو، محققان همیشه در تلاش هستند تا روش‌های مناسبی را برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه دهند که می‌تواند

قدرت تمایز بین واحدها را افزایش دهد. یکی از روش‌های تجزیه و تحلیل پوششی داده‌ها برای حل این مشکل، روش مجموعه‌ی وزن‌های مشترک است که می‌تواند همزمان با تعیین وزن‌های مطلوب بهینه برای همه واحدها، کارایی آن‌ها را به حداکثر برساند و برای تمام واحدهای کارا رتبه کامل به دست آورد.

بر این اساس، در این مقاله، ابتدا دو واحد مجازی ایده‌آل و آنتی ایده‌آل فازی FIDMU و FADMU تعریف شده و بر اساس روش پیشنهادی ابراهیم نژاد و امانی [۲۳]، بهترین و بدترین کارایی فازی واحدهای مجازی محاسبه شد. سپس، با توجه به مقدار کارایی‌های به دست آمده، مدل‌هایی برای تعیین مجموعه‌ی وزن‌های مشترک ارائه شد و بهترین و بدترین کارایی همه واحدها شامل داده‌های فازی مثلثی تعیین گردید. در نهایت، شاخص نزدیکی نسبی برای کارایی فازی در سطوح مختلف محاسبه و واحدها بر اساس آن رتبه بندی شدند. از آن جایی که مدل پیشنهادی بر اساس مجموعه‌ای از وزن‌های بهینه مشترک، همه واحدها را ارزیابی می‌نماید، پراکندگی وزن‌های اختصاص داده شده به ورودی و خروجی‌ها را کاهش می‌دهد و امکان مقایسه و رتبه‌بندی تمام واحدها را بر پایه یکسان فراهم می‌آورد و این می‌تواند ارزیابی منطقی‌تری را برای واحدهای مختلف فراهم سازد. برای تحقیقات آتی می‌توان رویکرد پیشنهادی را برای مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با ساختار شبکه توسعه داد.

- [۱] A. Charnes, W. W. Cooper, and E. Rhodes, "Measuring the efficiency of decision making units." *Eur. J. Oper. Res.*, vol. ۲, no. ۶, pp. ۴۲۹-۴۴۴, ۱۹۷۸.
- [۲] W. D. Cook, Y. Roll, and A. Kazakov, "A dea model for measuring the relative efficiency of highway maintenance patrols." *INFOR: information systems and operational research*, vol. ۲۸, no. ۲, pp. ۱۱۳-۱۲۴, ۱۹۹۰.
- [۳] Y. M. Wang, and Y. Luo, "DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units." *Applied Mathematics and Computation*, vol. ۱۷۳, no. ۲, pp. ۹۰۲-۹۱۵, ۲۰۰۶.
- [۴] D. Wu, "A note on DEA efficiency assessment using ideal point: An improvement of Wang and Luo's model." *Applied Mathematics and Computation*, vol. ۱۸۳, no. ۲, pp. ۸۱۹-۸۳۰, ۲۰۰۶.
- [۵] C. Kao, and S. T. Liu, "Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis." *Fuzzy Sets and Systems*, vol. ۱۱۳, no. ۳, pp. ۴۲۷-۴۳۷, ۲۰۰۰.
- [۶] S. Saati, A. Memariani, and G. R. Jahanshahloo, "Efficiency analysis and ranking of DMUs with fuzzy data." *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. ۱, no. ۳, p. ۲۵۵-۲۶۷, ۲۰۰۲.
- [۷] C. Kao, and S. T. Liu, "Efficiencies of two-stage systems with fuzzy data." *Fuzzy Sets and Systems*, vol. ۱۷۶, no. ۱, pp. ۲۰-۳۵, ۲۰۱۱.
- [۸] S. Lozano, "Process efficiency of two-stage systems with fuzzy data." *Fuzzy Sets and Systems*, vol. ۲۴۳, pp. ۳۶-۴۹, ۲۰۱۴.
- [۹] S. Saati, and A. Memariani, "Reducing weight flexibility in fuzzy DEA." *Applied Mathematics and Computation*, vol. ۱۶۱, no. ۲, pp. ۶۱۱-۶۲۲, ۲۰۰۵.
- [۱۰] A. Hatami-Marbini, S. Saati, and M. Tavana, "An ideal-seeking fuzzy data envelopment analysis framework." *Applied Soft Computing*, vol. ۱۰, no. ۴, pp. ۱۰۶۲-۱۰۷۰, ۲۰۱۰.
- [۱۱] J. Puri, and S. P. Yadav, "A fuzzy DEA model with undesirable fuzzy outputs and its application to the banking sector in India." *Expert Systems with Applications*, vol. ۴۱, no. ۱۴, pp. ۶۴۱۹-۶۴۳۲, ۲۰۱۴.
- [۱۲] H. E. Shermeh, S. E. Najafi, and M. H. Alavidooost, "A novel fuzzy network SBM model for data envelopment analysis: A case study in Iran regional power companies." *Energy*, vol. ۱۱۲, pp. ۶۸۶-۶۹۷, ۲۰۱۶.
- [۱۳] B. Simsek, and F. Tüysüz, "An application of network data envelopment analysis with fuzzy data for the performance evaluation in cargo sector." *Journal of Enterprise Information Management*, vol. ۳۱, no. ۴, pp. ۴۹۲-۵۰۹, ۲۰۱۸.

- [۱۴] M. Izadikhah, "Modelling Bank Performance: A Novel Fuzzy Two-Stage DEA Approach." *Fuzzy Information and Engineering*, vol. ۱۱, no. ۲, pp. ۱۴۹-۱۷۴, ۲۰۱۹.
- [۱۵] C. Heydari, H. Omrani, H. and R. Taghizadeh, "A fully fuzzy network DEA-range adjusted measure model for evaluating airlines efficiency: a case of Iran." *Journal of Air Transport Management*, vol. ۸۹, pp. ۱۰۱۹۲۳, ۲۰۲۰.
- [۱۶] S. Kazemi, M. Tavana, M. Toloo, and N. A. Zenkevich, "A common weights model for investigating efficiency-based leadership in the russian banking industry." *RAIRO-Operations Research*, vol. ۵۵, no. ۱, pp. ۲۱۳-۲۲۹, ۲۰۲۱.
- [۱۷] A. Fathi, and R. Farzipoor Saen, "Assessing sustainability of supply chains by fuzzy Malmquist network data envelopment analysis: Incorporating double frontier and common set of weights." *Applied Soft Computing*, vol ۱۱۳, pp. ۱۰۷۹۲۳, ۲۰۲۱.
- [۱۸] S. Tabatabaei, M. R. Mozaffari, M. Rostamy-Malkhalifeh, and F. Hosseinzadeh Lotfi, "Fuzzy efficiency evaluation in relational network data envelopment analysis: application in gas refineries." *Complex & Intelligent Systems*, vol. ۸, no. ۵, pp. ۴۰۲۱-۴۰۴۹, ۲۰۲۲.
- [۱۹] Y. M. Wang, Y. Luo, and L. Liang, "Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises." *Expert systems with applications*, vol. ۳۶, no. ۳, pp. ۵۲۰۵-۵۲۱۱, ۲۰۰۹.
- [۲۰] B. Bhardwaj, J. Kaur, and A. Kumar, "A new fuzzy CCR data envelopment analysis model and its application to manufacturing enterprises. In *Soft Computing Applications for Group Decision-making and Consensus Modeling* (pp. ۳۴۵-۳۶۸). Springer, Cham, ۲۰۱۷.
- [۲۱] A. Azar, M. Zarei Mahmoudabadi, and A. Emrouznejad, "A new fuzzy additive model for determining the common set of weights in Data Envelopment Analysis." *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, vol. ۳۰ no. ۱, pp. ۶۱-۶۹, ۲۰۱۶.
- [۲۲] A. Ebrahimnejad, and N. Amani, "Fuzzy data envelopment analysis in the presence of undesirable outputs with ideal points." *Complex & Intelligent Systems*, vol. ۷, no. ۱, pp. ۳۷۹-۴۰۰, ۲۰۲۱.
- [۲۳] A. Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, and J. Stutz, "Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions." *Journal of Econometrics*, vol. ۳۰, no. ۱-۲, pp. ۹۱-۱۰۷, ۱۹۸۵.
- [۲۴] A. Charnes, and W. W. Cooper, "Programming with Linear Fractional Functional." *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. ۹, no. ۳, pp. ۱۸۱-۱۸۶, ۱۹۶۲.