

تمایز بین کارایی درون و برون گروهی در روش DEA

دکتر هوشنگ کیانی^۱
دکتر حسن قدرتی

چکیده

طی سالهای اخیر روش جدیدی در ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری، خصوصاً در حالت تعدد داده‌ها و ستاده‌ها و غیر انتفاعی بودن واحد مورد ارزیابی به نام DEA^۳ (تحلیل پوششی اطلاعات) ابداع گردیده است. در این روش واحدهایی که داده‌های مشابهی را به کار گرفته و ستاده‌های یکسانی را تولید کرده و اختلاف عملکرد آنها در کمیت داده‌ها و ستاده‌هایشان می‌باشد، در یک مقایسه نسبی، امتیازی کمی به عنوان اندازه کارایی در فاصله صفر تا یک اختیار می‌کنند. مفهوم بنیادی این روش در تعبیر واحد کارا^۴ به واحدی است که به ازاء به کارگیری داده‌هایی به اندازه داده‌های مصرف شده توسط آن واحد نتوان حتی یکی از ستاده‌ها را به مقدار بیشتر از ستاده‌های آن واحد تولید کرد.

در مواردی می‌توان جامعه تحت ارزیابی را بر اساس عامل تمایزی کیفی که احتمالاً ممکن است بر اندازه کارایی نسبی آنها مؤثر باشد، به زیر گروه‌های کوچکتری تقسیم بندی کرد. ارزیابی کارایی هر عضوی از این جامعه را می‌توان در دو حالت متفاوت، حذف و لحاظ نمودن این عامل صورت داده و در هر حالت اندازه متفاوتی را به دست آورد. تمایز بین این کارایی زیر بنای مفهوم کارایی درون و برون گروهی است و می‌تواند به نوعی تحلیل واریانس در روش DEA باشد.

در ارزیابی برون گروهی و ترکیب زیر گروه‌ها به عنوان یک جامعه بزرگتر، می‌توان محدودیت‌ها یا متغیرهای زائد در مدل سازی DEA را شناسایی و با حذف آنها از مدل ترکیبی، مدل را کوچکتر و نوعی فشرده سازی یا الگوریتمی برای حل مدل‌های بزرگ در روش DEA مطرح کرد. از آنجا که مدل DEA بر نقاط حدی^۵ تأکید دارد، انتظار می‌رود، واحدهایی که عملکردشان نقطه‌ای درون فضای n بعدی ارزیابی زیر گروه مربوط به خود واقع شده‌اند، در حالت ترکیب با دیگر زیر گروه‌های جامعه خود، روی مرز افراطی ترکیبی یا فراتر از آن قرار نگیرند.

این نوشتار علاوه بر بحث نظری، بر دستاوردهای یک تحقیق میدانی در قلمرو ارزیابی کارایی مدارس ابتدایی به عنوان یک رساله دکتری استوار است.

واژه‌های کلیدی: کارایی، ارزیابی، عملکرد، DEA، مدارس ابتدایی، درون گروهی، برون گروهی

۱- عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد کاشان

۲- عضو هیئت علمی دانشگاه علم و صنعت

3- Data Envelope ment Analysis

4- Efficient unit

5- Exterme Points

پیشینه نظری روش DEA

در سال ۱۹۵۷، «ام. ج. فارل» مفهوم نقاط هم ارز تولید را بدین صورت مطرح می‌کند که (۱) «اگر در یک فضای n بعدی اقلیدسی مجموعه محدب^۱ چون S در اختیار داشته X_2 و X_1 بیانگر عملکرد دو مؤسسه قابل مقایسه از جهت مصرف منابع و تولید ستاده باشند، نقاطی که مشخص کننده تولید یکسان ستاده‌ها به جهت کمی و کیفی به ازاء مصرف متفاوت منابع تولید می‌باشند، کلیه ترکیبات خطی محدب بین این دو نقطه که ستاده‌های یکسانی را به ازاء مصرف متفاوت منابع تولید کنند با دو مؤسسه یاد شده از جهت کارایی هم ارز می‌باشند، این بی نهایت ترکیب ممکن واقع بر پاره خط یاد شده معیاری برای تعیین کارایی واحدهای مورد مقایسه بوده، بدین معنا که نقاط واقع در بالای پاره خط کارا نمی‌باشند.»

در سال ۱۹۷۶ مبتنی بر تحلیل فارل توسط «چارنز»، «کوپر» و «رودز» مدلی کسری جهت ارزیابی کارایی مؤسسات غیر انتفاعی ارائه شد که بعدها به مدل CCR معروف گردید (۲). در این مدل کارایی یک واحد در قیاس با واحدهای مشابه به ازاء انتساب ارزش‌های مجازی به داده‌ها و ستاده‌های واقعی آن واحد به طوری که در عین حصول بیشترین مقدار کارایی برای واحد مورد ارزیابی در

صورت انتساب این ارزش‌ها به داده‌ها و ستاده‌های کلیه واحدهای مورد مقایسه از جمله واحد تحت ارزیابی، مجموع ارزش مجازی ستاده‌ها به مجموع ارزش مجازی داده‌های هر واحد از یک تجاوز نکند. این ارزش‌های مجازی در قالب حل مدل ریاضی یاد شده که قابل تبدیل به یک برنامه ریزی خطی است، به دست می‌آیند. واحدهای کارا تلقی می‌گردد که اندازه کارایی اش معادل یک باشد.

در سال ۱۹۸۴ در تکمیل مدل فوق، مدلی به نام BCC^۲ با توجه به نام مبدعین آن توسط «بانکر»، «چارنز» و «رودز» عنوان شد که در آن با افزودن محدودیتی به مدل قبلی، امکان بررسی نوع بازدهی نسبت به مقیاس را نیز فراهم آورده، بدین ترتیب بین کارایی فنی، مقیاس و ترکیب آنها تمایز قائل شدند.

در سال ۱۹۸۶ «بانکر» و «مین درتا» (۴) فرض تحذب خطی در مدل‌های قبلی را به تحذب هندسی تغییر داده و امکان بررسی بازدهی نهایی فزاینده یا کاهنده نسبت به مقیاس را مبتنی بر تابع S شکل تولید فراهم کرده، با استفاده از لگاریتم گیری برنامه ریزی هندسی ارائه شده را به حالت خطی مبدل نمودند.

در سال ۱۹۸۶ در قالب یک تحقیق کاربردی در ارزیابی کارایی داروخانه‌ها «راجیو. دی. بانکر» و «ریچارد موری» (۵) الگوی

2- Banker, Charnes & Cooper

1- Convex Set

به کارگیری داده‌ها در مقایسه با ضرایب مجازی آنها، روابط منطقی بین ضرایب مجازی و ارزش‌های واقعی داده‌ها و ستاده‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند.

در سال ۱۹۹۰ تحقیقی در مورد «نسبت مخروطی»^۳ امکان آزاد در علامت فرض کردن ضرایب مجازی داده‌ها و ستاده‌ها را بررسی می‌نمایند. این ضرایب در مدل DEA ارزش‌های واقعی نبوده و در قالب حل مدل به گونه‌ای تعیین می‌شوند که حداکثر کارایی برای واحد مورد ارزیابی به دست آید. از این جهت می‌تواند تولید یک ستاده یا به کارگیری یک داده در ایجاد کارایی نقش منفی داشته باشد.

در سال ۱۹۹۰ «تامسون» و دیگران مدل «منطقه اطمینان»^۴ را پیشنهاد می‌دهند که به واسطه آن منطقه‌ای از اطمینان را که حداقل و حداکثر کارایی یک واحد در آن قرار می‌گیرد می‌توان برآورد نمود.

در مطالعات دیگری، تغییراتی که ممکن است در پارامترهای مدل DEA حاصل شده و جواب‌های مدل را متأثر سازد، به عنوان تحلیل حساسیت مدل‌های یاد شده مورد بررسی واقع می‌شود.

دسته سوم این تحقیقات، کاربردهای الگوی DEA در اندازه‌گیری و تحلیل کارایی

کارایی را با فرض تحدب خطی مشروط بر اینکه یکی از متغیرهایش مثلاً یکی از داده‌ها، به صورت رتبه‌ای باشد را مورد مطالعه قرار داده نشان دادند که در صورت لحاظ کردن یک متغیر به صورت رتبه‌ای نسبت به حالت پیوسته، تعداد واحدهای کمتری کارا ارزیابی می‌گردند.

در ماه مارس سال ۱۹۹۳ «جان. بی. روسو» و «جان. اچ. اسمپل» (۶) کلی‌تر از موارد قبل، حالتی که در آن کلیه داده‌ها و ستاده‌ها به صورت رتبه‌ای تعریف می‌گردند را با ارائه یک برنامه ریزی مختلط اعداد صحیح مورد بررسی قرار دادند.

در ماه اکتبر سال ۱۹۹۳ «پیتر آندرسن» و «نیلز کریستین پیترسن» (۷) الگویی را جهت رتبه بندی واحدهای کارا در مدل BCC معرفی کرده، به این ترتیب که در ارزیابی کارایی چنین واحدهایی، آنها را از متغیرها یا محدودیت‌های مدل حذف کرده و بر اساس مقدار به دست آمده جدید کارایی، که بزرگتر از ۱ بود آنها را رده بندی نمودند.

دسته دیگری از تحقیقات به بررسی مبانی تئوریک مدل‌های DEA پرداخته‌اند. به عنوان مثال:

«گالنی»^۱ در سال ۱۹۸۸، «علی و دیگران»^۲ در سال ۱۹۹۱ با بررسی هزینه واقعی

3- Cone Ratio

4- Assurance Region

1- Galony

2- Ali & et al

مفاوت و تولید ستاده‌های مختلف بوده و کلیه مجموعه‌های دارای خواص زیر باشند:

(۱) مقایسه پذیری: کیفیت یکسان داده‌ها و ستاده‌ها به ازاء کلیه واحدهای عضو هر یک از مجموعه‌ها و صرفاً اختلاف در کمیت آنها به ازاء هر واحد باشد.

(۲) تحدب: تعلق ترکیبات خطی محدب هر چند نقطه دلخواه از هر یک از مجموعه‌ها و به عبارتی تعلق ترکیبات خطی محدب عملکردهای واقعی هر دو واحد دلخواه از یک مجموعه به همان مجموعه می‌باشد. این فرض بر مبنای تحلیل هم ارزی «فارل» برای ایجاد واحدهای با عملکرد هم ارز در مقایسه واحدهای مورد ارزیابی تعریف شده است.

(۳) جامعیت: هر مجموعه در برگیرنده عملکرد واقعی جمیع واحدهای متعلق به آن مجموعه و نیز ترکیبات خطی محدب دلخواه عملکرد هر چند واحد عضو مجموعه می‌باشد.

(۴) کارایی: در صورتی به عضوی از یک مجموعه «کارا» گوئیم که دیگر اعضا یا ترکیب خطی آنها نتوانند ستاده‌هایی معادل تولید واحد یاد شده را به ازاء مصرف کمتر اقلأ یکی از داده‌ها تولید کرده، یا به ازاء به کارگیری منابعی معادل آن واحد اقلأ یکی از ستاده‌ها را بیشتر تولید نماید، چنین واحدی در ارزیابی، اندازه یک را اختیار می‌نماید.

مؤسسات مختلف را بیان می‌کنند که از جمله می‌توان به: اندازه‌گیری کارایی واحدهای دانشگاهی در دانشگاه کالجاری کانادا و دانشگاه تربیت معلم ایران، بررسی عملکرد بیمارستان‌های آلبرتا، ارزیابی کارایی داروخانه‌ها، ارزیابی کارایی مدارس در آمریکا، کانادا و... و حتی ایران توسط محقق اشاره نمود.

الگوریتم پیشنهادی

هدف از این الگوریتم اولاً: تمایز بین کارایی درون و برون گروهی و به عبارتی نوعی آنالیز واریانس در به کارگیری روش DEA و ثانیاً: فراهم آوردن امکان فشرده و کوچکتر کردن مدل DEA به عنوان گامی در راستای حل مدل‌های بزرگ می‌باشد. در این نوشتار الگوریتم پیشنهادی را مبتنی بر مدل CCR^۱ مطرح کرده ولی به شیوه مشابهی می‌توان آن را به مدل‌های دیگر DEA تعمیم داد.

الف) مفروضات بنیانی

فرض کنیم مجموعه T بر اساس عامل تمایز به خصوص به t مجموعه ناسازگار S_1 تا S_r قابل تجزیه بوده که هر یک از مجموعه‌ها بیانگر عملکرد واقعی گروه ۱ تا t واحد تصمیم‌گیری به جهت مصرف واقعی منابع

1- Charnes, Cooper & Rhoades

ب) تمایز بین کارایی درون و برون گروهی
 ارزیابی مقایسه‌ای عملکرد هر یک از واحدهای متعلق به مجموعه T را می‌توان به دو طریق انجام داد که عبارتند از:

۱) مقایسه درون گروهی:

در این ارزیابی هر عضو از هر یک از مجموعه‌های S_1 تا S_k صرفاً با اعضاء متعلق به مجموعه خود مقایسه گردیده و کارایی‌اش در قیاس با آنها تعیین می‌شود. به این نوع کارایی، کارایی درون گروهی گوئیم و به عبارتی عضو کارا در مجموعه S_k در مقایسه با اعضاء مجموعه خود ستاده بیشتری را تولید یا منبع «داده» کمتری را به کار گرفته است.

جهت تعیین اندازه کارایی درون گروهی به ازاء گروه K ام و به اتکاء عملکرد واحدهای این گروه یا مجموعه S_k مبتنی بر الگوی متداول CCR، الگوی ارزیابی به صورت بیان شده در رابطه ۱ در خواهد آمد.

$$\text{Max}(E_r) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{l=k}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=k}}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{l=k}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=k}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n_k$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, m$$

E_0 کارایی واحد مورد ارزیابی زام از گروه K ، y_{rj}^k ستاده تولید شده نوع r توسط واحد تصمیم‌گیری زام از گروه S_k ، x_{ij}^k میزان داده‌ها به کار گرفته شده نوع i ام توسط واحد زام از گروه K ، u_r ارزش مجازی ستاده نوع r ام و v_i ارزش مجازی داده نوع i ام است که به ازاء حل مدل به دست می‌آید.

۲) فشرده سازی مدل:

با توجه به بنیان‌های نظری مطرح شده در الگوی رتبه‌بندی (۶) واحدهای کارا که در آن هدف تمایز بین واحدهایی که کارایی ۱ را به دست آورده به لحاظ ارزشی یکسان تلقی می‌گردند زنه اینکه متغیر یا مقیاس رتبه‌ای به کار گرفته باشند. واحدهایی از گروه K ام که در ارزیابی کارایی درون گروهی کارا تلقی نشده‌اند و کارایی کمتر از ۱ را به خود اختصاص داده‌اند، واحدهای مؤثری نبوده و در نتیجه محدودیت متعلق به واحد یاد شده در مجموعه محدودیت‌های رابطه ۱ محدودیت زائد بوده و حذف آن تأثیری بر اندازه کارایی یا مقادیر متغیرهای u_r و v_i نمی‌گذارد. با شناسایی و حذف چنین محدودیت‌هایی می‌توان مدل را فشرده‌تر ساخت.

اگر محدودیت‌های $n_k, \dots, p_k = z$ به ازاء گروه مورد ارزیابی K ام متعلق به عملکرد واحدهای غیر کارا، محدودیت‌های زائد باشند

اندازه ۱ را به خود اختصاص دهد. بدیهی است از آنجا که به ازاء اضافه کردن اعضاء دیگر گروه‌ها، محدودیت‌های دیگری به مجموعه محدودیت‌های گروه K اضافه شده و هر گروه محدودیت می‌تواند مؤثر بوده یا نباشد و به عبارتی فضای محدب جواب قبلی را کوچکتر کرده و یا تغییر ندهد، امکان فشرده سازی مدل ترکیبی به ازاء اعضاء مجموعه T به قوت خود باقی مانده و در این ارزیابی که اعضاء همه مجموعه‌ها ترکیب می‌شوند، فقط واحدهایی که در ارزیابی درون گروهی مؤثر بوده و اندازه کارایی ۱ را به خود اختصاص داده‌اند، در مجموعه محدودیت‌های مدل جدید منظور کرده و به جهت تحذب هر یک از مجموعه‌ها و به تبع آن تحذب اشتراک همه مجموعه‌ها امکان اینکه واحدی که در ارزیابی کارایی درون گروهی اندازه کمتر از ۱ اختیار و درون مجموعه خود قرار گرفته بتواند در ارزیابی بین گروهی کارایی ۱ را اختیار و کارا تلقی گردد و وجود ندارد. چون با مجموعه بزرگتری مورد مقایسه قرار می‌گیرد که مجموعه قبلی جزئی از این مجموعه بزرگتر است. این امر از جهت تئوری به استدلال «چارلز»، «کوپر» و «رودز» متکی است. بر مبنای نظر آنها واحدی که به عنوان نقطه حدی در مرز ترسیم شده مدل DEA برای ارزیابی دیگر واحدها واقع نشده است در ترکیب با مدل مربوط به گروه دیگر نیز روی مرز حدی ترکیبی قرار نمی‌گیرد. علاوه بر این کاربرد مدل فشرده در

در این صورت می‌توان این محدودیت‌ها را حذف و مدل را به صورت فشرده رابطه ۲ تعریف کرد. تشخیص غیر کارا بودن یک واحد و حرف محدودیت مربوط به آن پس از حل مدل در مرحله ارزیابی درون گروهی بوده و برای تلفیق آن با مدل مربوط به گروه‌های دیگر است، به عبارتی از فشرده سازی در فشرده کردن مدل ارزیابی برون گروهی که از ترکیب همه واحدها به دست می‌آید، استفاده می‌شود و به کارگیری آن در ارزیابی درون گروهی کاری زائد است.

$$2) \text{Max}(E_i) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{l=k}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=k}}$$

$$\text{s.t: } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{l=k}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=k}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, P_k$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, m,$$

که نسبت به رابطه ۱ معادل $P_k - N_k$ محدودیت کمتری دارد.

۳) ارزیابی بین گروهی

در ارزیابی عملکرد عضو دلخواهی از گروه K علاوه بر گروه K با اعضاء کلیه گروه‌های دیگر نیز مورد مقایسه واقع شده و در این صورت واحدی از کارایی برون گروهی برخوردار است که در مقایسه با اعضاء t گروه،

به مدلی خطی تبدیل نموده که منبع ارجاع شده در این مقاله آنها را به تفصیل مورد بحث قرار داده است.

در اینجا صرفاً یکی از این روش‌ها را برای تبدیل رابطه ۲ به برنامه خطی به کار گرفته‌ایم و متذکر می‌شویم که به طریق مشابهی، این روش را می‌توان برای سایر روابط نیز مورد استفاده قرار داد.

برای تبدیل رابطه ۲ به مدلی خطی، به جای حداکثر سازی کسر تعریف شده در تابع هدف، صرفاً صورت کسر را حداکثر ساخته و مخرج آن را مساوی یک قرار می‌دهیم. چون در مدل DEA به اتکای تعریف کارایی فنی، حداکثر مقدار کارایی که یک واحد اختیار می‌کند مساوی ۱ می‌شود و این امر در محدودیت‌های مدل کسری CCR منظور شده است. ضمناً این تبدیل خطی یاد شده روش پیشنهادی «چارنرز» و «کوپر» و «رودز» در منبع شماره ۷ می‌باشد.

کسرهای تعریف شده در محدودیت‌های رابطه (۲) نیز با عنایت به اینکه حداکثر مساوی ۱ می‌باشند، به جای آنها تفاضل مخرج از صورت کسر که حداکثر می‌تواند معادل صفر باشد را جایگزین می‌نمائیم در نتیجه:

$$f) \text{Max}(E.) = \sum_{r=1}^s u_r y_r^{l=k}$$

$$s.t: \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=k} = 1$$

منبع مورد اتکاء این مقاله یعنی رساله نویسنده نیز همین امر را تأیید می‌کند (۸).

لذا با تلفیق محدودیت‌های مجموعه S_1 ، S_2 ، ... و با حذف محدودیت‌های زائد هر مجموعه، مدل فشرده و ترکیبی رابطه ۳ را به دست آمده که به ازاء آن کارایی بین (برون) گروهی هر واحد در قیاس با اعضای جامعه T تعیین می‌گردد:

$$3) \text{Max}(E.) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r^{l=k}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=k}}$$

$$s.t: \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{l=1}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=1}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, P_1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{l=t}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=t}} \leq 1 \quad j = 1, \dots, P_t$$

$$u_r, v_i \geq 0 \quad r = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, m$$

رابطه ۳ نوعی برنامه‌ریزی کسری است که می‌توان آن را به صورت برنامه‌ریزی خطی در آورد (۹).

(۴) تبدیل خطی مدل‌ها:

هر یک از مدل‌های بیان شده در رابطه ۱، ۲ و ۳ را می‌توان بسته به روش یا تعبیر خاصی

تصمیم‌گیری انتخاب و با توجه به عملکرد سال تحصیلی ۷۵ - ۱۳۷۴ اطلاعات مربوط به واحدها گردآوری شد. در این مطالعه، سطح تحصیلات و سابقه تدریس معلمان کلاس پنجم، هزینه جاری سالانه هر مدرسه، سرانه فضای آموزشی در هر مدرسه، و نسبت معلم به دانش آموز در هر مدرسه به عنوان داده‌ها و متوسط نمره ریاضی، هنر، فارسی و معدل دانش آموزان کلاس پنجم و تعداد فارغ التحصیلان هر مدرسه (درصد قبولی دانش آموزان کلاس پنجم) به عنوان ستاده‌ها انتخاب گردیده. اتکا به مقطع پنجم ابتدایی به دلیل یکنواختی رویه آزمون نهایی در این سطح بود.

ارزیابی کارایی درون گروهی

براساس عامل تمایز جنسیت، مدارس به ۳ دسته مدارس دخترانه، پسرانه و مختلط تقسیم گردیده که ۷۹ مدرسه در گروه اول، ۷۶ مدرسه دخترانه و ۶۴ مدرسه باقی مانده مختلط و کلاً در مناطق روستایی واقع شده بودند. هر دسته از این مدارس به عنوان یک گروه و هر مدرسه به عنوان عضو یک گروه تلقی شد.

در ابتدا به ازاء هر یک از گروه‌ها مدل‌هایی به صورت رابطه اول (و تبدیل خطی آن) تعریف و با نرم افزار STORM نسخه سوم، کارایی هر یک از واحدها تعیین شده و واحدهای با کارایی ۱ یا کارا مشخص گردیدند

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^{l=k} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^{l=k} \leq 0, \quad j = 1, \dots, P_k$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1, \dots, s \quad i = 1, \dots, m$$

شایان ذکر است رابطه (۴) که مدلی خطی است در صورت حل دقیقاً جواب‌های مدل کسری و غیر خطی رابطه (۲) را به دست خواهد آورد. رابطه (۴) را می‌توان براساس تئوری ثنویت در برنامه ریزی خطی به مدل خطی بیان شده در رابطه (۵) نیز تبدیل نمود.

$$(5) \text{Min } (z.) = z.$$

$$\text{S.T: } \sum_{j=1}^{P_k} \lambda_j y_{rj}^{l=k} \geq y_{ro} \quad r = 1, \dots, s$$

$$z_0 x_{ro}^{l=k} - \sum_{j=1}^{P_k} \lambda_j x_{ij}^{l=k} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, P_k$$

که در آن z ، عکس E_0 ، یعنی $Z_0 = \frac{1}{E_0}$ به عنوان اندازه کارایی واحد مورد ارزیابی مربوط به گروه K ام، و λ ترکیبی از داده‌ها و ستاده‌های واحدهای $P_k, \dots, 1 = z$ بوده که با داده‌ها و ستاده‌های واحد مورد ارزیابی مقایسه شده و مقدار این متغیر از حل مدل به دست می‌آید.

کاربرد الگوریتم پیشنهادی (۹)

به عنوان یک مطالعه میدانی در کاربرد الگوریتم پیشنهادی، ۲۱۹ مدرسه ابتدایی شهرستان کاشان به عنوان واحدهای

به دیگر گروه‌ها داشته و کاراتر از آنها بوده‌اند. دلیل این امر به کارگیری به مراتب داده‌های کمتر و ایجاد نتایج آموزشی تقریباً مشابه با دیگر گروه‌ها بوده است.

در این مطالعه، تقسیم بندی‌های دیگری نظیر منطقه استقرار مدارس، نوع مدرسه و... نیز مد نظر قرار گرفته و کارایی درون و برون گروهی و فشرده سازی بررسی شد.

از جمله نتایج این مطالعه میدانی، فراهم آوردن امکان بررسی متغیرهای کیفی در مدل DEA به عنوان عوامل تمایز گروه‌ها و ارزیابی کارایی درون و برون گروهی از یک طرف و امکان حل مدل‌های بزرگ یا فشرده سازی آنها و در نتیجه استفاده از نرم افزارهای با قابلیت محدودتر و حساس به تعداد محدودیت‌ها و سرعت و دقت بیشتر اجرای مدل‌ها از طرف دیگر بود.

شایان ذکر است در تحقیق کاربردی یاد شده علاوه بر ارزیابی کارایی درون و برون گروهی به موارد دیگری نیز پرداخته شده است که از جمله عبارتند از:

ارزیابی مقایسه ای کارایی به روش رگرسیونی، شاخص عملکرد و DEA

تعیین عوامل مؤثر در اختلاف کارایی واحدهای مورد ارزیابی

تحلیل ربعی کارایی و داده‌ها و ستاده‌ها

و....

که تشریح موارد یاد شده به مقاله‌های دیگری موکول می‌گردد.

در این ارزیابی هدف، تعیین کارایی درون گروهی مثلاً تعیین کارایی یک مدرسه پسرانه در مقایسه با مدارس پسرانه دیگر بود.

فشرده سازی مدل‌ها:

برای آزمودن روایی فرض فشرده سازی، واحدهای غیر کارا از هر گروه حذف و مجدداً کارایی مدارس در هر گروه با تعداد محدودیت‌های کمتر (پسرانه با ۲۱ محدودیت، دخترانه با ۲۵ و مختلط با ۴۰ محدودیت) اندازه گیری شده که دقیقاً نتایج قبلی به دست آمد. در این ارزیابی تاثیر عامل جنسیت دانش آموزان بر کارایی حذف شده بود.

ارزیابی کارایی برون گروهی

نهایتاً با ترکیب همه مدارس و ساخت مدلی با ۲۱۹ محدودیت در حالت ترکیبی ارزیابی برون گروهی را صورت داده و حذف محدودیت‌های زائد و به کمک مدلی براساس رابطه ۳ با ۸۶ محدودیت (به تعداد واحدهای کارا در ارزیابی درون گروهی) همان نتایج به دست آمد. در این ارزیابی عامل جنسیت حذف نشده و لذا گروهی که در مجموع درصد بیشتری از مدارس کارا و کارایی متوسط بیشتری را به خود اختصاص داده بود، نسبت به دیگر گروه‌ها کاراتر بود. در این ارزیابی مدارس مختلط درصد بیشتری از مدارس کارا و پارامترهای آماری بهتر از جهت کارایی نسبت

پیشنهادها

به عنوان رهنمودی برای انجام مطالعات بعدی توصیه می‌شود:
الگوریتم پیشنهادی در سطحی وسیع تر، به عنوان مثال در ارزیابی مدارس یک استان یا سطح کشور به کار رفته و نتایج بررسی شود.
فرض‌های دیگری نظیر تحذب هندسی و نحوه اعمال آن در الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار گیرد.
نرم افزار کامپیوتری فارسی جهت ارزیابی کارایی واحدها مبتنی بر الگوریتم پیشنهادی تهیه گردد.
سیستم ارزیابی کارایی که ورودی‌های آن داده‌ها و ستاده‌ها و خروجی‌های آن نتایج کارایی درون و برون گروهی و موارد لازم دیگر باشد طراحی گردد.

منابع و مآخذ

- 1- Farrel M.J. "The Measurement of Productive Efficiency" J. Roy. Soc.Ser. A, III, 1957, pp: 253-290
- 2- Charnes, Cooper, Rhodes, "Measuring the Efficiency of Decision Making units" European Journal of Operational Research, 1978, p: 436
- 3- Banker, Charnes & Cooper, "Some Models for Estimating Technical and Scale In – efficiencies in DEA" Management Science, Vol: 30, No: 9, PP: 1078-1092
- 4- Banker, Charnes & Agay Maindirata, "Piece wise loglinear Estimation of Efficient Production Surfaces" Management Science, Vol:32, No:1, 1986, PP: 126-135
- 5- Banker & Morey "The Use of Categorical variables In DEA" Management Science, Vol: 32, No:12, 1986 PP:384-6
- 6- J. Roussev & J. H. Sempe "Categorical Outputs In DEA" Management Science, Vol:39, No: 3, 1993, P:38
- 7- P. Anderson & N.C. Peterson "A Procedure for Ranking Efficient Units In DEA Management Science, Vol: 39, No:10 1993, PP: 1261-4

8-Charnes, Cooper Rhoades "Evaluating Program and Managerial Efficiency" Management Science, Vol:127, No:6, 1981, PP:668-697

۹- جهت آگاهی از روش تبدیل مدل به DEA به برنامه ریزی خطی به پایان نامه دکتری نویسنده تحت عنوان «تحلیل ریاضی مدل‌های DEA، رگرسیون و شاخص عملکرد در ارزیابی کارایی مدارس ابتدایی کاشان، از دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات یا مآخذ ذکر شده در آن رجوع شود.