تعیین کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری تا حدی نامتجانس با DEA[1]

رضا فرضی پور صائن[2]
عزیز الله معماریانی[3]
فرهاد حسین زاده لطفی[4]

چکیده

فرض کلیه مدل‌های فعلی DEA، بر تجانس کامل DMU[5]ها استوار می‌باشد. هدف این مقاله ارائه مدلی برای تعیین کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری تا حدی نامتجانس به کمک تکنیک DEA می‌باشد. در مدل پیشنهاد شده ابتدا توسط میانگین سری[6]، مقادیر گمشده[7] تکمیل می‌گردد، سپس به کمک تکنیک AHP[8] اندازه نسبی بزرگی DMUها در نظر گرفته می‌شود و در نهایت کارایی نسبی DMUها به کمک تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها محدود شده به قیود تصادفی[9] تعیین می‌شود. به منظور روشن شدن مطلب مثال عددی ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، فرآیند تحلیل سلسله مراتبی، مقادیر گمشده

مقدمه

تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها از سال ۱۹۷۸ با پایان نامه دکتری ادوارد رودز در دانشگاه کارنگی میلون با راهنمائی پروفسور کوپر آغاز گردید. رودز پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدارس ملی آمریکا را که در

1-Data Envelopment Analysis

۲-گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و حسابداری، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی

۳-گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۴-گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی

5-Decision Making Unit
6-Series Mean
7-Missing Values
8-Analytical Hierarchy Process
9-Chance Constrained DEA

برنامه فالو ترو شرکت می‌کردند یا نمی‌کردند را مورد مطالعه قرار داد. چارنز، کوپر و رودز بدون داشتن اطلاعات در مورد هزینه‌ها، برای محاسبه کارایی فنی مدارس که دارای ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه بودند، فرمولی را ارائه دادند (٤). به‌طور کلی، روش DEA بر پایه برنامه ریزی خطی است. این روش مقایسه‌ای بین واحدهای تصمیم‌گیری را انجام می‌دهد که از ورودی‌های مشابه جهت تولید خروجی‌های مشابه استفاده می‌کنند. هدف DEA این است که تعیین می‌کند کدام DMU روی مرز کارا و کدام داخل مرز کارا قرار دارد. به عبارت دیگر، DEA همه DMU ها را به ترکیبات کارا و ناکارا تجزیه می‌کند.

گاهی اوقات در دنیای واقعی، برای بعضی از DMU ها، ورودی‌ها و خروجی‌های کاملا مشترکی وجود ندارد. بنابراین نمی‌توان از مدل‌های موجود DEA برای ارزیابی کارایی نسبی این گونه واحدها استفاده نمود. نکته حائز اهمیت این است که عدم وجود برخی از پارامترهای ورودی و خروجی برای یک DMU، دلیل بر قوت یا ضعف آن DMU نیست بلکه در صورت وجود آن پارامتر، ممکن بود DMU مورد نظر مقدار قابل توجهی از آن پارامتر را به خود اختصاص دهد. بنابراین در صورت ورودی بودن پارامتر مورد نظر، در نظر گرفتن مقدار صفر، کارایی را به‌طور غیر واقعی افزایش می‌دهد و در صورت خروجی بودن پارامتر مورد نظر، در نظر گرفتن مقدار صفر، کارایی را به‌طور غیر واقعی کاهش می‌دهد. در ادبیات موضوع، به مشکلاتی که عدم تجانس DMUها در محاسبه کارایی ایجاد می‌نماید اشاره شده است، و نتیجه‌گیری می‌شود که " چنانچه به عدم تجانس بانک‌ها توجه نگردد، کارایی محاسبه شده اریب دار خواهد بود" (۹). همچنین به مشکل عدم تجانس DMUها به منظور محاسبه کارایی اشاره گردیده است (۳) و (٦). یک روش برخورد با این مساله، یافتن DMUهای خارجی می‌باشد، به‌طوری که بتوان کارایی DMU نامتجانس را با DMUهای خارجی مقایسه کرد (۱۲). روش دیگر، طبقه بندی DMUها به گروه‌های متجانس می‌باشد. به عبارت دیگر، ابتدا عدم تجانس میان DMUها با تشکیل گروه‌هایی از DMUهای متجانس رفع می‌گردد، آن گاه کارایی نسبی هر DMU در گروه خاص خود تعیین می‌شود (۱).

تحلیل پوششی داده‌ها روشی است که کارایی واحدهای تصمیم‌گیری را با این شرط که مجموعه کاملا متجانسی از واحدهای تصمیم‌گیری وجود داشته باشد، مقایسه می‌نماید. به عبارت دیگر فرض مدل‌هایی که تاکنون ارائه شده است، بر این است که تمامی ورودی‌ها و خروجی‌ها برای کلیه واحدهای تصمیم‌گیری مشترک می‌باشند (۱۳). در این مقاله برای اولین

بار به‌طور مستقیم به تعیین کارایی نسبی DMUهایی که تا حدی نامتجانس می‌باشند، اقدام می‌گردد.

ساختار مقاله به این شرح است. در بخش ۲ تعریف مساله ارائه می‌شود. در بخش ۳ پیش زمینه DEA به اختصار تشریح می‌شود. در بخش ۴ الگوریتم حل مساله معرفی می‌گردد. در بخش ۵ مثال عددی ارائه می‌شود و در بخش ۶ نتیجه‌گیری ارائه می‌گردد.

۲- تعریف مساله

مساله، تعیین کارایی نسبی DMUهایی است که تا حدی نامتجانس می‌باشند. به عبارت دیگر ممکن است برخی از DMUها، ورودی‌ها و خروجی‌های کاملا مشترکی نداشته باشند. به‌طور کلی فقدان برخی از پارامترها برایDMUهای تحت بررسی را در دو حالت کلی می‌توان طبقه بندی نمود.

حالت اول : مشترک بودن تمامی ورودی‌ها و خروجی‌ها برای DMUهای تحت ارزیابی:

عدم مصرف ورودی و / یا تولید خروجی ناشی از عدم نیاز DMU_j، $j = 1,...,n$ به مصرف ورودی نوع i ام، $i =1,...,m$ و یا عدم توانایی DMU_j در تولید خروجی نوع r ام، $r =1,...,s$ می‌باشد. بدیهی است در این حالت به ازای عدم مصرف ورودی نوع i ام و / یا تولید خروجی نوع rام، مقدار صفر قرار می‌گیرد. مدل‌هایی که تاکنون از DEA ارائه شده است در این طبقه می‌باشد.

حالت دوم : مشترک نبودن برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها برای DMUهای تحت ارزیابی:

عدم مصرف ورودی و / یا تولید خروجی ناشی از عدم اشتراک کامل در ورودی‌ها و خروجی‌ها برای DMUهای تحت ارزیابی می‌باشد. بدیهی است در این حالت قرار دادن مقدار صفر برای ورودی نوع i ام و/ یا خروجی نوع r ام، $i =1,...,m$ و $r =1,...,s$ مقدار کارایی را غیر واقعی می‌نماید. برای مثال فرض کنید در نظر است کارایی نسبی دانشکده‌های مختلف در یک دانشگاه با یکدیگر مقایسه گردد. ممکن است اکثر ورودی‌ها و خروجی‌ها برای دانشکده‌ها همچون تعداد اعضای هیات علمی، فضای آموزشی، بودجه آموزشی و غیره مشترک باشند، ولی تعداد محدودی از ورودی‌ها و خروجی‌ها برای برخی از دانشکده‌ها به دلیل تفاوت در حوزه فعالیت دانشکده‌ها با یکدیگر متفاوت باشند. به‌طور نمونه دانشکده مکانیک دارای ورودی همچون کارگاه ماشین افزار می‌باشد. در حالیکه برای دانشکده حقوق، ورودی کارگاه ماشین افزار بی معنی می‌باشد. بدیهی است چنانچه این نوع ورودی برای دانشکده حقوق صفر در نظر

گرفته شود، کارایی نسبی آن به‌طور غیر واقعی افزایش می‌یابد و این به‌طور کامل گمراه کننده است.

۳- پیش زمینه

فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری موجود است، که هر واحد تصمیم‌گیری، mورودی را مصرف می‌کند وp خروجی را تولید می‌نماید. فرض کنید $X_+ \in {}^{n\times}R^m$ و $Y_+ \in {}^{n\times}R^p$ ماتریس‌هایی هستند که به ترتیب شامل عناصر نامنفی مقادیر خروجی و ورودی برای واحدهای تصمیم‌گیری باشد. بردار ورودی‌هایی که توسط DMU_j مصرف می‌شود با X_j (j امین ستون **X**) نشان داده می‌شود، و مقدار ورودی i که توسط DMU_j مصرف می‌شود با x_{ij} نشان داده می‌شود. بردار خروجی‌هایی که توسط DMU_j تولید می‌شود با Y_j (j امین ستون **Y**) نشان داده می‌شود و مقدار ورودی r که توسط DMU_j تولید می‌شود با y_{rj} نشان داده می‌شود. به علاوه $\mathbf{1}=[1,...,1]^T$ می‌باشد. اندیس صفر به DMU تحت بررسی اشاره می‌نماید. در اینجا فرمول‌های اساسی DEA با ماهیت ورودی ارائه می‌شود: فرض مدل CCR بازده به مقیاس ثابت (٤) و فرض مدل BCC بازده به مقیاس متغیر می‌باشد (۲).

مدل اولیه CCR و BCC با ماهیت ورودی

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = \theta+\varepsilon(\mathbf{1}^T s^+ + \mathbf{1}^T s^-) \\
&\text{s.t.} \\
&\quad \mathbf{Y}\lambda - s^- = y_0 \\
&\quad \mathbf{X}\lambda - \theta x_0 + s^- = \mathbf{0} \\
&\quad \lambda \epsilon \Lambda \qquad (1a) \\
&\geq 0 \qquad \lambda \\
&\quad s^+ \geq 0 \\
&\geq 0 \qquad s^-
\end{aligned}
$$

مدل ثانویه CCR و BCC با ماهیت ورودی

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } W = \mu^T y_0 + \zeta \\
&\text{s.t.} \\
&\quad v^T x_0 = 1 \\
&\quad \mu^T \mathbf{Y} - v^T \mathbf{X} + \zeta \mathbf{1}^T \leq \mathbf{0} \\
&\quad \zeta = 0 \text{ , در مدل CCR} \qquad (1b) \\
&\quad \zeta = \text{free , در مدل BCC} \\
&\epsilon \mathbf{1} \geq \qquad \mu \\
&\quad v \geq \epsilon \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

که در آن ϵ یک عدد مثبت بسیار کوچک غیرارشمیدسی است و :

برای مدل CCR، $\Lambda = \{\lambda | \lambda \in R^n +\}$

برای مدلBBC، $\Lambda = \{\lambda | \lambda \in R^n +, 1^T \lambda = 1\}$

یک DMU کارا است به شرطی که $Z^* = W^* = 1$ و تمام متغیرهای کمکی s^+ و s^- برابر صفر باشد، در غیر این صورت ناکارا است (٥).

متدولوژی حل مسأله

از آن جایی که DMUهای تحت ارزیابی تا حد زیادی متجانس می‌باشند و فقط تعداد محدودی

از ورودی‌ها و خروجی‌ها با یکدیگر تفاوت دارند، با فرض توزیع نرمال تمامی بردارهای ورودی و خروجی و محاسبه میانگین و واریانس برای تک تک بردارهای ورودی و خروجی که حداقل یک DMU در حالت دوم داشته باشند (از این به بعد مقدار گمشده نامیده می‌شود) می‌توان مقدار گمشده در هر بردار ورودی و خروجی را تکمیل نمود.[1] به عبارت دیگر برای هر بردار ورودی و خروجی که در آن حداقل یک DMU دارای مقدار گمشده می‌باشد، به کمک روش میانگین سری[2]، مقدار میانگین جایگزین مقدار گمشده می‌گردد. مقدار میانگین با حرفA نشان داده می‌شود. نکته حائز اهمیت تفاوت در اندازه بزرگی DMUها می‌باشد. بنابراین نباید مقدار A به‌طور یکسان برای کلیه DMUهایی که در هر بردار دارای مقادیر گمشده می‌باشند تکرار شود. به عبارت دیگر مقدارA با توجه به اندازه بزرگی DMUها محاسبه می‌گردد. در این تحقیق اندازه بزرگی DMU ای که در یک بردار دارای مقدار گمشده می‌باشد (اندازه بزرگی DMU با حرف α نشان داده می‌شود)، براساس مقدار میانگین سایر بردارهای ورودی و خروجی (به غیر از پارامتر ورودی یا خروجی متناظر با DMUای که دارای مقدار گمشده می‌باشد) نسبت به مقادیر ورودی و خروجی کهDMU دارای مقدار گمشده می‌باشد (اندازه بزرگی میانگین سایر DMUها در هر بردار ورودی و خروجی با حرف β نشان داده می‌شود)، تعریف می‌گردد. تکنیک AHP اهمیت نسبی گزینه‌ها را تعیین می‌نماید. بنابراین به منظور محاسبه اندازه نسبی بزرگی هر DMU در هر بردار ورودی و خروجی که دارای مقدار گمشده می‌باشد، از تکنیکAHP استفاده می‌گردد(۱۱). پس از محاسبه مقادیر α و β ، نسبت β/α محاسبه می‌شود و حاصل با حرف γ نشان داده می‌شود. سپس مقدار A تقسیم بر γ می‌گردد و حاصل با حرف H نشان داده می‌شود. در نتیجه به جای مقدار گمشده، مقداری جایگزین می‌گردد که بزرگی سایرDMUها در کلیه بردارهای ورودی و خروجی نسبت به DMUای که دارای مقدار گمشده می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود.

پس از جایگزین نمودن مقدار گمشده با مقدار H و با توجه به مقدار واریانس، از آن جایی که مقادیر جایگزین شده قطعی نیستند و احتمالی هستند، به کمک تحلیل پوششی داده‌ها محدود شده به قیود تصادفی با سطح احتمال دلخواه اقدام به حل مساله و در نهایت تعیین کارایی هر DMU می‌گردد (به‌طور کلی با محاسبه میانگین و واریانس یک بردار، قیدهای تصادفی خطی به قیدهای قطعی غیر خطی تبدیل می‌شوند (۱۰)). در صفحهٔ بعد مدل قطعی تحلیل پوششی داده‌ها محدود شده به قیود تصادفی با سطح احتمال ۹۵٪ ارائه می‌شود(۸).

۱- به منظور آشنایی با انواع شیوه‌های برخورد با مقادیر گمشده ، به خوانندگان علاقمند مطالعه مرجع (٤) توصیه می‌گردد.

۲- بر اساس روش میانگین سری (Series Mean)، میانگین حسابی یک بردار به جای مقادیر گمشده همان بردار قرار می‌گیرد. در نرم افزار SPSS چنین روشی وجود دارد.

تعریف علائم

n	تعداد خروجی
n_0	خروجی مربوط به DMU تحت ارزیابی
m	تعداد ورودی
m_0	ورودی مربوط به DMU تحت ارزیابی
Y^n	سطر n ام Y
y_{n0}	بردار ستونی خروجی‌های DMU تحت ارزیابی
x_{m0}	بردار ستونی ورودی‌های DMU تحت ارزیابی
X^m	سطر m ام X
$[y_{ni}] = Y$	ماتریس خروجی نمونه
$[x_{mi}] = X$	ماتریس ورودی نمونه
$i , j = 1,\ldots,I$	
E	عملگر امید ریاضی
s.d	عملگر انحراف معیار
Cov	عملگر کوواریانس
A	مقدار میانگین بردار ستونی متناظر با DMU ای که دارای مقدار گمشده می‌باشد
α	اندازه بزرگی DMU ای که در یک بردار دارای مقدار گمشده می‌باشد
β	اندازه بزرگی میانگین سایر DMUها در هر بردار ورودی و خروجی
γ	$\frac{\beta}{\alpha}$
H	$\frac{A}{\gamma}$

مدل (۲)

$$\text{Min } \theta$$

s.t.

$$E(Y^n \lambda - y_{n0}) - 1.645\,\sigma >= 0 \quad , n = 1,\ldots,N$$

$$E(\theta x_{m0} _ X^m \lambda) - 1.645\,\sigma >= 0 \quad , m = 1,\ldots,M$$

θ متغیر آزاد ، $\lambda >= 0$

که :

$$\sigma = s.d\,(Y^n \lambda - y_{n0}) = \{\sum_{i=1}^{i=I}\sum_{j=1}^{j=I} \mu_i \mu_j \, cov(y_{ni} , y_{nj})\}^{0.5}$$

$$\sigma = s.d\ (\theta x_{m0} _ X^m \lambda) = \{\sum_{i=1}^{i=I}\sum_{j=1}^{j=I} \mu_i \mu_j cov(x_{mi}, x_{mj})\}^{0.5}$$

$$\mu_i = \lambda_i \qquad \text{for} \qquad i = 1,\ldots,I \qquad , i \neq 0$$

$$\mu_i = (\lambda_i - 1) \qquad \text{for} \qquad i = 0$$

عدد۱/۶۴۵ همان F^{-1} (۰/۹۵) می‌باشد که F تابع توزیع نرمال استاندارد است.

۱-۴- الگوریتم حل مساله

توضیحات ارائه شده در بخش ۴ را می‌توان در الگوریتم زیر خلاصه نمود. توجه نمائید که الگوریتم برای هر مقدار گمشده تکرار می‌شود.

الگوریتم :

۱- مقدار A را محاسبه نمائید.

۲- میانگین کلیه بردارهای ورودی و خروجی را محاسبه نمایید و در سطح گزینه سلسله مراتب AHP قرار دهید. توجه نمایید که در محاسبه میانگین برای هر بردار ورودی و خروجی، سطر متناظر با DMU ای که دارای مقدار گمشده می‌باشد در نظر گرفته نمی‌شود. همچنین بردار سطری متناظر با DMU ای که دارای مقدار گمشده می‌باشد، در سطح گزینه سلسله مراتب AHP قرار می‌گیرد.

۳- مقادیر α و β را به کمک تکنیک AHP محاسبه نمائید.

۴- نسبت γ را محاسبه کنید.

۵- نسبت H را محاسبه کنید.

۶- در جدول داده‌ها به جای مقدار گمشده، مقدار H را قرار دهید. الگوریتم را مجددا برای سایر مقادیر گمشده تکرار کنید.

۷- به منظور تعیین کارایی نسبی هرDMU از مدل ۲ استفاده نمایید.

۵- مثال عددی

در مثال زیر دو ورودی و دو خروجی موجود است. برای ۱۲ واحد تصمیم‌گیری در نظر است کارایی نسبی اندازه‌گیری گردد. DMUهایی که از نظر ورودی یا خروجی دارای مقدار گمشده می‌باشند، با علامت ((_)) مشخص می‌شوند. در جدول ۱، مقادیر ورودی و خروجی برای هر DMU

ارائه می‌گردد. در جدول ۲ بر اساس تکنیک میانگین سری، مقادیر میانگین هر بردار ورودی و خروجی، جایگزین مقادیر گمشده می‌گردد. برای این منظور از نرم افزار SPSS استفاده می‌شود. به منظور تعیین اندازه نسبی بزرگی هر DMU که در هر بردار ورودی و خروجی دارای مقدار گمشده می‌باشد مطابق الگوریتم ارائه شده در بخش ۱-۴ عمل می‌شود.

جدول۱ – مقادیر ورودی و خروجی

DMU	ورودی۱	ورودی۲	خروجی۱	خروجی۲
۱	۵	۳	۸	۳
۲	-	۹	۲	۴
۳	۳	۴	۹	۰
٤	۶	-	۳	۶
۵	۲	۶	۴	-
٦	-	۲	۵	۳
۷	۳	۳	۴	۶
۸	-	۲	-	۲
۹	۴	۰	۵	۳
۱۰	۳	۲	۲	-
۱۱	۲	۵	-	۴
۱۲	۵	۹	۳	۷

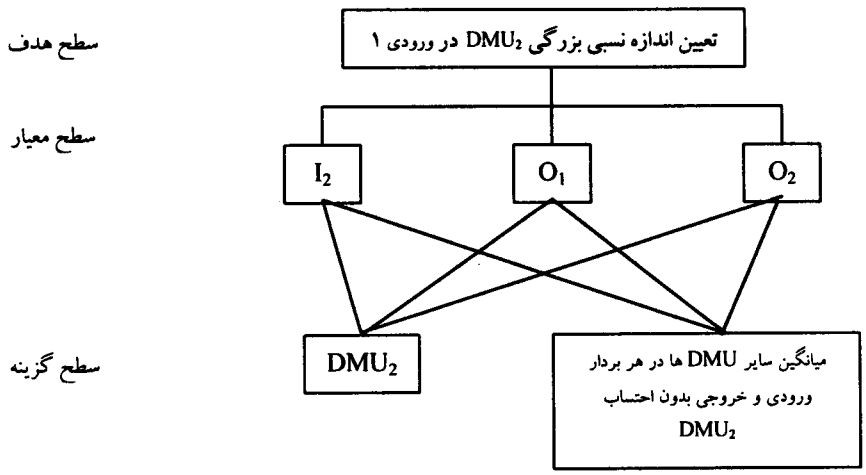
جدول۲- مقادیر میانگین جایگزین شده به جای مقادیر گمشده

DMU	ورودی۱	ورودی۲	خروجی۱	خروجی۲
۱	۵	۳	۸	۳
۲	۳/٦٦٧*	۹	۲	٤
۳	۳	٤	۹	۰
٤	٦	٤/۰۹۱*	۳	٦
۵	۲	٦	٤	۳/۸*
٦	۳/٦٦٧*	۲	۵	۳
۷	۳	۳	٤	٦
۸	۳/٦٦٧*	۲	٤/۵*	۲
۹	٤	۰	۵	۳
۱۰	۳	۲	۲	۳/۸*
۱۱	۲	۵	٤/۵*	٤
۱۲	۵	۹	۳	۷

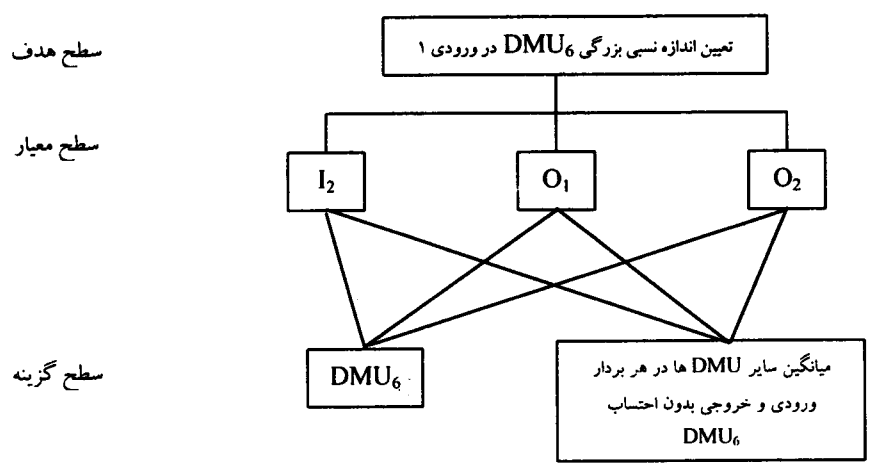
توجه : علامت * در مقابل هر عدد مربوط به مقادیر میانگین جایگزین شده به جای مقادیر گمشده می‌باشد.

به منظور تعیین اندازه نسبی بزرگی هر DMU که دارای مقدار گمشده می‌باشد، در شکل‌های ۱ الی ۸ سلسله مراتبAHP ارائه می‌شود. توجه نمائید که به ازای هر مقدار گمشده یک سلسله مراتب ارائه می‌گردد. در این شکل‌ها فرض بر این است که در سطح معیار، ورودی‌ها و خروجی‌ها نسبت به یکدیگر دارای اهمیت یکسانی می‌باشند در حالیکه چنانچه از نظر تصمیم‌گیر ورودی‌ها و خروجی‌ها نسبت به هم دارای اهمیت مختلفی باشند می‌توان این اهمیت را مشخص نمود.[۱]

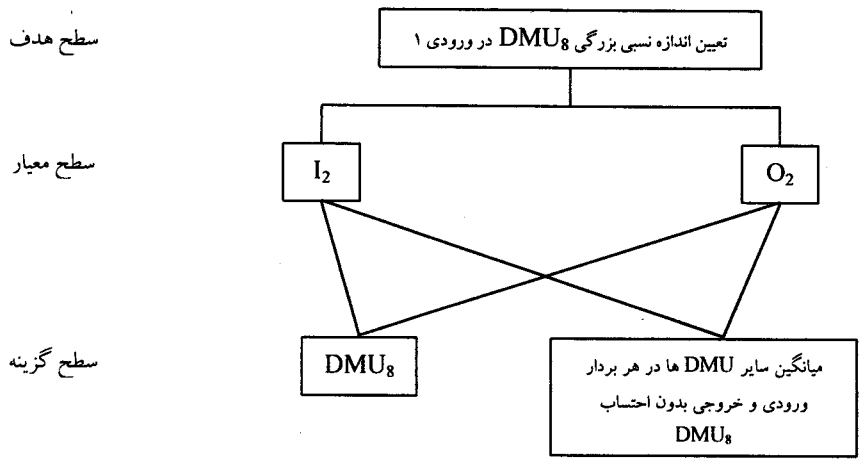
۱- برای جزئیات بیشتر به مرجع (۷) مراجعه کنید.



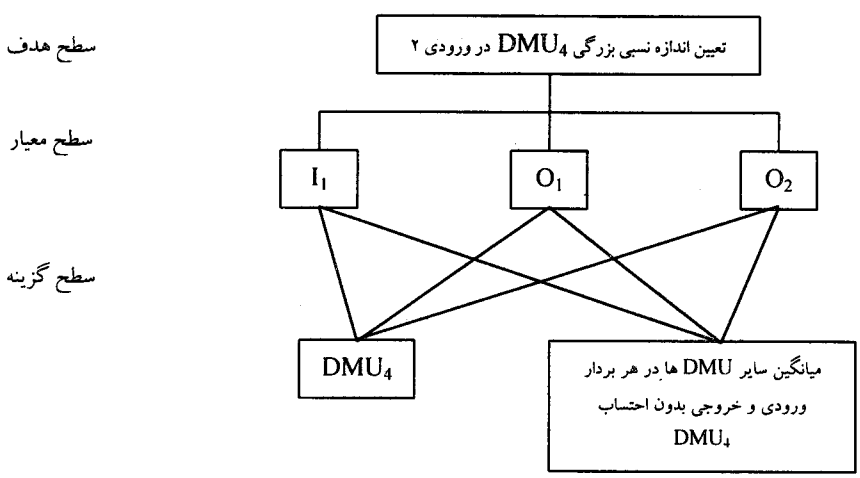
شکل ۱- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_2 در بردار ورودی ۱ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۲ ، خروجی ۱ و خروجی ۲



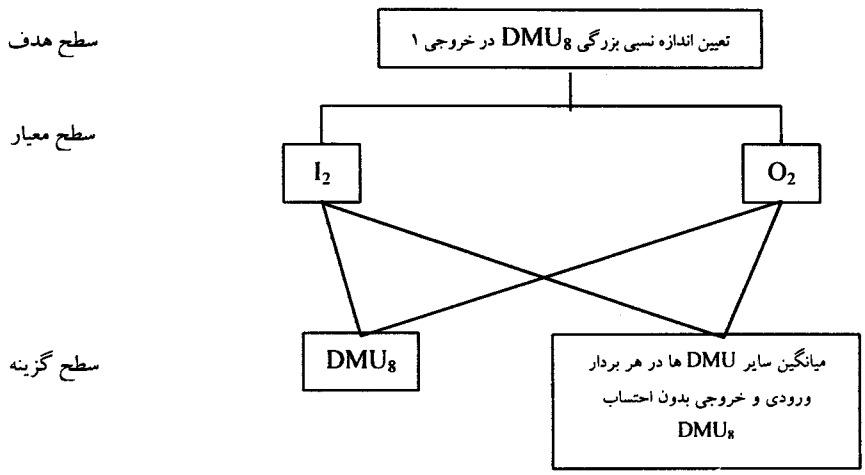
شکل ۲- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_6 در بردار ورودی ۱ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۲ ، خروجی ۱ و خروجی ۲



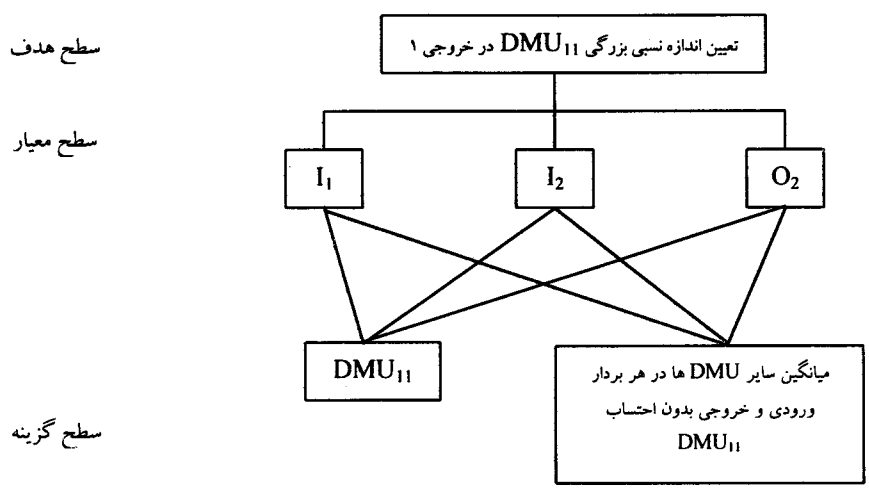
شکل ۳- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_8 در بردار ورودی ۱ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۲ و خروجی ۲



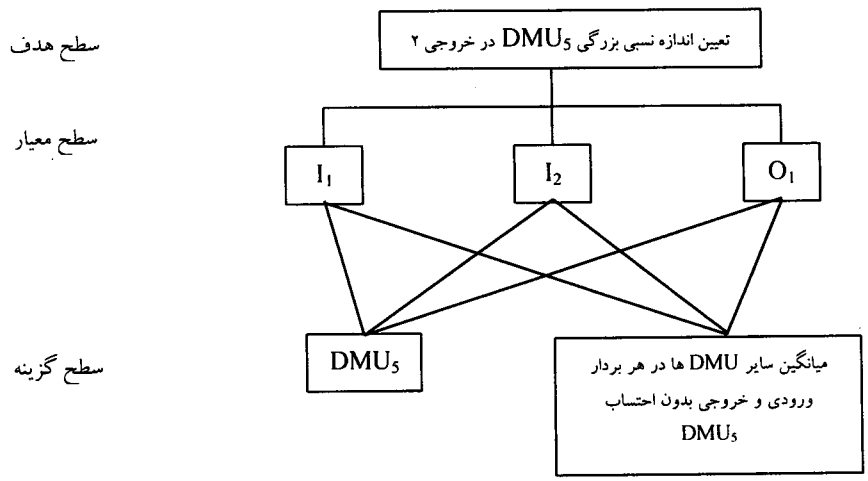
شکل ٤- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_4 در بردار ورودی ۲ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۱ ، خروجی ۱ و خروجی ۲



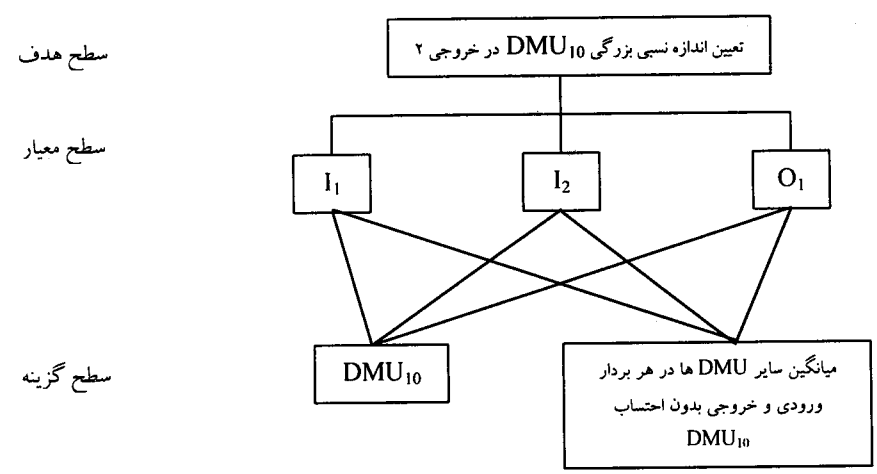
شکل ۵- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_8 در بردار خروجی ۱ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۲ و خروجی ۲



شکل ٦- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_{11} در بردار خروجی ۱ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۱ ، ورودی ۲ و خروجی ۲



شکل ۷- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_5 در بردار خروجی ۲ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۱ ، ورودی ۲ و خروجی ۱



شکل ۸- سلسله مراتب تعیین اندازه بزرگی DMU_{10} در بردار خروجی ۲ نسبت به میانگین سایر DMU ها در بردارهای ورودی ۱ ، ورودی ۲ و خروجی ۱

پس از انجام محاسبات، خلاصه نتایج در جدول ۳ ارائه می‌گردد. به منظور محاسبه ستون‌های α و β از نرم افزار Expert Choice استفاده می‌شود.

جدول ۳- خلاصه نتایج محاسبه شده

شماره شکل	A	α	β	$\gamma=\frac{\beta}{\alpha}$	$H=\frac{A}{\gamma}$
۱	۳/٦٦٧	۰/٤٧٧	۰/٥٢٣	۱/۰۹٦	۳/۳٤٦
۲	۳/٦٦٧	۰/٤۳٦	۰/٥٦٤	۱/۲۹٤	۲/۸۳٤
۳	۳/٦٦٧	۰/۳۲٥	۰/٦۷٥	۲/۰۷۷	۱/۷٦٦
٤	٤/۰۹۱	۰/٥٥۱	۰/٤٤۹	۰/۸۱٥	٥/۰۲
٥	٤/٥	۰/۳۲٥	۰/٦۷٥	۲/۰۷۷	۲/۱٦۷
٦	٤/٥	۰/٤۷	۰/٥۳	۱/۱۲۸	۳/۹۹
۷	۳/۸	۰/٤۷۱	۰/٥۲۹	۱/۱۲۳	۳/۳۸٤
۸	۳/۸	۰/۳٥۲	۰/٦٤۸	۱/۸٤۱	۲/۰٦٤

در جدول ۴، اندازه نسبی بزرگی هر DMU در تکمیل مقادیر گمشده در نظر گرفته می‌شود و مقادیری که دارای علامت * می‌باشند، از ستون H جدول ۳ استخراج می‌شوند. به هر حال در جدول ۴، مقادیری که علامت * دارند، قطعی نمی‌باشند، بلکه احتمالی هستند، لذا از مدل (۲) به منظور حل مساله استفاده می‌گردد. با توجه به مدل (۲)، با سطح احتمال ۹۵٪ نتایج کارایی نسبی در جدول ۵ ارائه می‌گردد. محاسبات کارایی در جدول ۵ بر این فرض استوار می‌باشند که در هر بردار ورودی و خروجی، مقادیر هرDMU نسبت به DMU دیگر مستقل هستند. بنابراین کوواریانس برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. واریانس بردارهای ورودی ۱، ورودی ۲، خروجی۱ و خروجی۲ بدون احتساب مقادیری که با علامت * در جدول ۴ مشخص هستند، به ترتیب برابر با ۲، ۸/۴۹۰۹۱، ۵/۶۱۱۱۱ و ۴/۴ می‌باشند. با توجه به جدول ۵، مشاهده می‌گردد که واحدهای تصمیم‌گیری ۴، ۶، ۹، ۱۰ و ۱۱ کارا هستند و سایر واحدهای تصمیم‌گیری ناکارا می‌باشند.

جدول٤- نتیجه تاثیر اندازه نسبی بزرگی هر DMU در مقادیر جایگزین شده

DMU	ورودی۱	ورودی۲	خروجی۱	خروجی۲
۱	٥	۳	۸	۳
۲	۳/۳٤٦*	۹	۲	٤
۳	۳	٤	۹	۰
٤	٦	٥/۰۲*	۳	٦
٥	۲	٦	٤	۳/۳۸٤*
٦	۲/۸۳٤*	۲	٥	۳
۷	۳	۳	٤	٦
۸	۱/۷٦٦*	۲	۲/۱٦۷*	۲
۹	٤	۰	٥	۳
۱۰	۳	۲	۲	۲/۰٦٤*
۱۱	۲	٥	۳/۹۹*	٤
۱۲	٥	۹	۳	۷

توجه: علامت * در مقابل هر عدد، مربوط به مقادیر میانگینی می‌باشد که با در نظر گرفتن اندازه نسبی بزرگی DMUها، جایگزین مقادیر گمشده می‌گردد.

جدول ۵- نتایج کارایی نسبی با سطح احتمال ۹۵٪

DMU	کارایی‌نسبی
۱	۰/٦۲۵
۲	۰/۱٤
۳	۰/۷۲۱
٤	۱
۵	۰/۷۲۳
٦	۱
۷	۰/۹۰۵
۸	۰/٦٦٦
۹	۱
۱۰	۱
۱۱	۱
۱۲	۰/٤۹۷

۶- نتیجه‌گیری

فرض کلیه مدل‌هایی که تاکنون از DEA ارائه شده است بر تجانس کامل DMUها استوار می‌باشد. درحالی که در همه مسائل تعیین کارایی این فرض صحیح نمی‌باشد و مواردی پیش می‌آید که DMU ها تا حدی نامتجانس می‌باشند، به عبارت دیگر برخی از ورودی‌ها و خروجی‌ها برای همه DMU ها مشترک نمی‌باشند. در این مقاله شیوه تعیین کارایی برای DMU های تا حدی نامتجانس به کمک تکنیک DEA تشریح گردید. به کمک این مقاله مشکلات عملی تعیین کارایی تا حد زیادی کاهش می یابد و تکنیک DEA کاربرد به مراتب بیشتری می یابد. نتیجه اصلی این مطالعه عبارت است از اینکه چنانچه برای ورودی‌ها و خروجی‌هایی که برای برخی از DMU ها مشترک نمی‌باشند مقدار صفر اختصاص داده شود، کارایی محاسبه شده گمراه کننده و غیرواقعی خواهد بود در حالیکه با رویکرد ارائه شده در این مقاله کارایی محاسبه شده(با احتمال ۹۵٪) واقعی می‌باشد. در انتها به خوانندگان علاقمند پیشنهاد می‌گردد در مورد تعیین میزان حداکثر عدم تجانس DMU ها تحقیق نمایند.

منابع و مآخذ

1- **Athanassopoulos, A.D, E. Thanassoulis (1995). Separating Market Efficiency from Profitability and its Implications for Planning. *Journal of Operational Research Society*, 46, pp. 20-34.**

2- Banker, R.D., A. Charnes and W.W. Cooper (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science,* 30, pp. 1078-1092.
3- Barr, R., M. Durchholz and L.M. Seiford (1994). Peeling the DEA Onion: Layering and Rank – Ordering DMUs Using Tiered DEA. Southern Methodist University *Technical Report,* 1994/2000.
4- Charnes, A., W.W. Cooper and E. Rhodes (1978). Measuring Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research,* 2, pp. 429-444.
5- Charnes, A., W.W. Cooper, A.Y. Lewin and L.M. Seiford (1994). *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications.* Boston: Kluwer Academic Publishers.
6- Dyson, R.G., R. Allen, A.S. Camanho, V.V. Podinovski, C.S. Sarrico and E.A. Shale (2001). Pitfalls and Protocols in DEA. *European Journal of Operational Research,* 132, pp. 245-259.
7- Hair, JR., R.E. Anderson, R.L. Tatham, W.C. Black (1998). *Multivariate Data Analysis.* Prentice Hall, pp. 46-64.
8- Land K.C., C.A. Knox Lovell and S. Thore (1993). Chance – Constrained Data Envelopment Analysis. *Managerial and Decision Economics,* Vol. 14, pp. 541-554.
9- Mester, Loretta (1997). Measuring Heterogeneity at US Banks: Accounting for Heterogeneity is Important. *European Journal of Operational Research,* Vol. 98, pp. 230-242.
10- Rao S.S, (1984). *Optimization Theory and Applications.* Wiley Eastern Limited, Second Edition.
11- Saaty T.L (1990). *Decision Making for Leaders.* RWS Publications. Pittsburgh.
12- Sarrico C.S, R.G. Dyson (2000). Using DEA for Planning in UK University - an Institutional Perspective. *Journal of Operational Research Society,* 51, pp. 789-800.
13- Seiford L.M (1999). A Cyber – *Bibliography for Data Envelopment Analysis* (1978-1999), University of Massachusetts.
http://www.ecs.umass.edu/mie/faculty/seiford.html