

تأثیر دو رویکرد استدلال های خلاق مبتنی بر ریاضی و الگوریتمی در یادگیری

زهره رشیدیان^۱

مجید حق وردی^۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۰۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۲۲

چکیده

این مطالعه با بهره گیری از چارچوب نظری (لایتنر، ۲۰۰۸)، به بررسی تأثیر دو رویکرد استدلالی متفاوت در یادگیری ریاضی می پردازد: استدلال الگوریتمی (AR) و استدلال خلاق مبتنی بر ریاضی (CMR). چارچوب لایتنر با مرتبط ساختن استدلال به فرآیندهای تفکر، توانمندی های دانش آموز و محیط یادگیری، منشأ و پیامدهای انواع مختلف استدلال را تشریح می کند. هدف اصلی این پژوهش، بررسی این فرضیه است که یادگیری ریاضی با استفاده از استدلال خلاق می تواند کارآمدتر و پایدارتر از زمانی باشد که دانش آموزان صرفاً از استدلال الگوریتمی استفاده می کنند و صرفاً رویه های حل از پیش تعیین شده به آنها ارائه می شود. در این مطالعه تجربی، ۹۱ دانش آموز پایه نهم به دو گروه تقسیم شدند: گروه AR که با فرمول های از پیش تعیین شده آموزش دیدند ($n=48$) و گروه CMR که بدون راهنمایی مستقیم، دانش آموزان راه حل ها را کشف و تولید می کردند ($n=43$). تکالیف مطالعه حاضر بر اساس روشی بود که قبلاً توسط بوئنس؛ لایتنرو پالم (۲۰۱۰) و پالم و همکاران (۲۰۱۱) بصورت توسعه یافته استفاده شد. نتایج این مطالعه نشان داد که اگرچه گروه AR در طول جلسه تمرین عملکرد بهتری داشت ($p < 0.0001, r=0.77$) اما در آزمون یک هفته بعد، گروه CMR به طور معناداری برتر بود ($p = 0.001, d = 0.7$) تحلیل همبستگی نشان داد که برای گروه CMR، ارتباط قوی بین عملکرد تمرین و آزمون وجود دارد ($r = 0.81, p < 0.0001$)، در حالی که این ارتباط برای گروه AR معنادار نبود.

کلید واژه ها: استدلال ریاضی، استدلال خلاق، استدلال الگوریتمی، یادگیری طوطی وار.

^۱ دانشجوی دکتری برنامه درسی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران. zmath87z@gmail.com

^۲ دانشیار آموزش ریاضی، گروه ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران. Majid.Haghverdi@iau.ac.ir

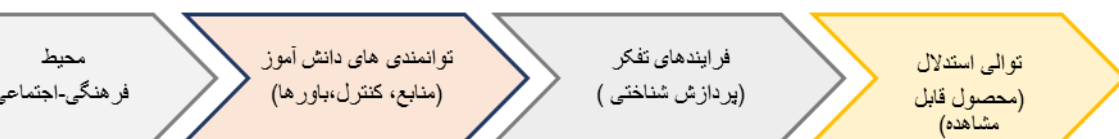
مقدمه

یکی از دشواری های اساسی در آموزش ریاضی این است که اگرچه هدف اصلی، تبدیل دانش آموزان به حل کننده های مسئله ماهر و مستقل است، اما حتی پس از گذشت دهه ها پژوهش گسترده در این حوزه، بسیاری از دانش آموزان هنوز هم به تفکر طوطی وار و به یادسپاری صرف روی می آورند و از درک عمیق مفاهیم ریاضی بازمی مانند (هیبرت، ۲۰۰۳). این نوع تفکر سطحی، که در آن دانش آموزان صرفاً فرمول ها و الگوریتم ها را بدون درک معنای زیربنایی آنها به خاطر می سپارند، یکی از عوامل اصلی دشواری های یادگیری و شکست در انتقال دانش به موقعیت های جدید است. پژوهش های متعدد نشان داده اند که رویکردهای سنتی تدریس ریاضی که بر حفظ و تکرار الگوریتم ها تأکید دارند، اگرچه ممکن است در کوتاه مدت به نتایج قابل قبولی در آزمون های استاندارد منجر شوند، اما در بلندمدت توانایی دانش آموزان را برای تفکر انعطاف پذیر، حل مسائل غیرروتین، و درک عمیق مفاهیم محدود می کنند (اسکمپ، ۱۹۹۵؛ هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲؛ زاهدی و حق وردی، ۱۴۰۱). این محدودیت ها نه تنها بر موفقیت تحصیلی دانش آموزان تأثیر می گذارد، بلکه نگرش آنها نسبت به ریاضی را نیز منفی می سازد.

چارچوب های مختلفی برای تحلیل جنبه های مربوط به یادگیری طوطی وار و درک مفهومی وجود دارد. برخی از این چارچوب ها اساساً به عنوان ابزار تحقیق طراحی نشده اند و تمام اهداف کلی آموزش ریاضی را در بر می گیرند، مانند) استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM, 2000) و چارچوب توانمندی های ریاضی (نیس، ۲۰۰۳). برخی دیگر از پژوهش ها به مراحل و سطوح فهمیدن می پردازند: (اسکمپ، ۱۹۹۵) بین درک ابزاری و درک رابطه ای تمایز قائل می شود؛ (آسیالا و همکاران، ۱۹۹۶) و (تال، ۲۰۰۴) به تحلیل نحوه تعامل و توسعه درک اشیاء و فرآیندها می پردازند؛ و (پیری و کایرن، ۱۹۹۴) سطوح مختلف درک را توصیف می کنند. همچنین، دسته بندی های حوزه های شناختی مانند طبقه بندی (بلوم، ۱۹۵۶) و مدل (ون هیل، ۱۹۸۶) نیز وجود دارند که بر مراحل پیچیدگی شناختی تأکید دارند. چارچوب های دیگر، توانمندی های خاص را ساختار بندی می کنند، به عنوان مثال چارچوب (شونفیلد، ۱۹۸۵) این کار را برای حل مسئله غیرروتین انجام می دهد و بر نقش منابع دانشی، روش های ابتکاری، کنترل فراشناختی و سیستم های باور تأکید می کند.

با این حال، چارچوب های زیادی وجود ندارند که هدف اصلی آنها توصیف دقیق و سیستماتیک ویژگی های خود استدلال باشد. اینجاست که چارچوب (لایتنر، ۲۰۰۸) اهمیت پیدا می کند. هدف این

چارچوب، بیان و توصیف استدلال تقلیدی (یادگیری طوطی‌وار) در مقابل استدلال خلاق، و تشریح منشأ پیدایش و پیامدهای انواع مختلف استدلال است. یک ایده اساسی و محوری در چارچوب لایتنر این است که استدلال در یادگیری طوطی‌وار، تقلیدی است، در حالی که نوع مقابل این استدلال، خلاق است. هنگام تلاش برای توضیح منشأ انواع مختلف استدلال، رویکرد این چارچوب (شکل ۱) بدین شکل است که توالی استدلال را از فرآیند تفکر ایجادکننده آن جدا می‌کنیم. این تمایز مفهومی بسیار مهم است زیرا به ما امکان می‌دهد نه تنها محصول نهایی (پاسخ یا راه‌حل) را بررسی کنیم، بلکه فرآیندهای شناختی که به آن منجر شده‌اند را نیز تحلیل کنیم. این چارچوب، به منظور درک اینکه چرا فرآیندهای تفکر مختلف فعال می‌شوند یا خیر، آنها را هدایت‌شده و محدودشده توسط توانمندی‌های دانش‌آموز می‌بیند که در یک محیط فرهنگی-اجتماعی-آموزشی شکل می‌گیرند. به عبارت دیگر، نوع استدلالی که یک دانش‌آموز به کار می‌برد نه تنها تابع توانایی‌های ذاتی اوست، بلکه به شدت تحت تأثیر فرصت‌های یادگیری، انتظارات معلم، ساختار تکالیف، و فرهنگ کلاس درس قرار دارد.



شکل ۱: منشأ و زنجیره علی استدلال

نمودار شکل شماره ۱ نشان می‌دهد که چگونه محیط یادگیری بر توانمندی‌های دانش‌آموز تأثیر می‌گذارد، که این توانمندی‌ها فرآیندهای تفکر را شکل می‌دهند، و در نهایت این فرآیندها به توالی استدلال قابل مشاهده منجر می‌شوند. درک این زنجیره علی برای طراحی مداخلات آموزشی مؤثر ضروری است. هدف اصلی این مطالعه، بررسی تجربی این فرضیه است که یادگیری ریاضی با استفاده از استدلال خلاق^۱ مبتنی بر ریاضی (CMR) می‌تواند کارآمدتر و پایدارتر از زمانی باشد که دانش‌آموزان از استدلال الگوریتمی^۲ (AR) استفاده می‌کنند و رویه‌های حل از پیش تعیین شده به آنها داده شود. به طور خاص، این پژوهش به دنبال پاسخ به این سؤالات است که آیا دانش‌آموزانی که

^۱. Creative Mathematically-founded Reasoning-CMR

^۲. Algorithmic Reasoning-AR

با رویکرد AR آموزش می‌بینند، در طول مرحله تمرین (با پشتیبانی الگوریتمی) عملکرد بهتری نسبت به دانش‌آموزان گروه CMR دارند و همچنین آیا دانش‌آموزانی که با رویکرد CMR آموزش می‌بینند، در آزمون تأخیری (یک هفته بعد، بدون پشتیبانی) عملکرد بهتری نسبت به گروه AR نشان می‌دهد. این پژوهش از دیدگاه نظری به ادبیات یادگیری و تدریس ریاضی کمک می‌کند و از دیدگاه عملی می‌تواند راهنمایی برای طراحی برنامه‌های درسی و استراتژی‌های تدریس ارائه دهد.

استدلال ریاضی: تعاریف و مفاهیم بنیادی

استدلال ریاضی چیزی کمتر از یک مهارت پایه و اساسی نیست (بال و باس، ۲۰۰۳). با این حال، واژه «استدلال» اغلب در میان معلمان و پژوهشگران ریاضی بدون تعریف دقیق و روشن به کار می‌رود، که این امر می‌تواند منجر به سوءتفاهم و عدم هماهنگی در پژوهش و عمل شود. از نظر لایتنر (۲۰۰۰)، استدلال همان خط فکری است که برای تولید ادعاها و رسیدن به نتیجه‌گیری‌ها در حل تکالیف اتخاذ می‌شود. نکته مهم این است که استدلال ریاضی لزوماً مبتنی بر منطق صوری نیست و بنابراین به اثبات‌های صوری محدود نمی‌شود. بلکه، استدلال می‌تواند حتی ناقص یا نادرست باشد، مادامی که دلایل منطقی (از دیدگاه استدلال‌کننده) وجود داشته باشند که از آن پشتیبانی کنند.

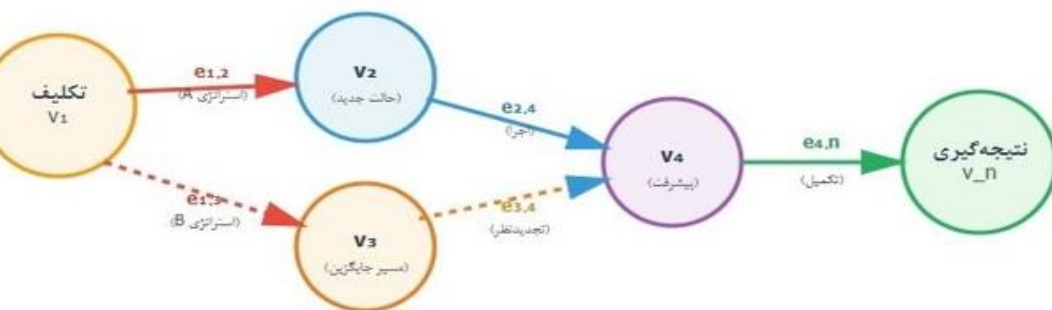
استدلال را می‌توان به عنوان فرآیندهای تفکر، یا محصول این فرآیندها، یا هر دو دانست. آنچه که ما عمدتاً می‌توانیم در داده‌های تجربی مشاهده کنیم، رفتار و محصولات قابل مشاهده است، در حالی که درباره فرایندهای تفکر زمینه‌ساز آنها فقط می‌توانیم استنباط و گمانه‌زنی کنیم (وینر، ۱۹۹۷). از آنجا که یک هدف این چارچوب توصیف داده‌های قابل مشاهده است، انتخاب ما این است که استدلال را به عنوان محصولی ببینیم که به صورت یک توالی استدلال ظاهر می‌شود - توالی‌ای که از یک تکلیف شروع و به یک پاسخ ختم می‌شود. این توالی استدلال ممکن است حاوی داده‌های بیشتری نسبت به یک راه‌حل مکتوب معمولی باشد، زیرا می‌تواند با روش‌های مختلفی مانند پروتکل‌های «تفکر با صدای بلند» و مصاحبه‌های تکمیلی غنی‌تر شود. این روش‌ها به پژوهشگران اجازه می‌دهند تا بینش عمیق‌تری نسبت به فرآیندهای شناختی کسب کنند.

استدلال می‌تواند عملکردهای متنوعی در ریاضیات داشته باشد که فراتر از صرفاً «پیدا کردن پاسخ» است. (یکل و هانا؛ ۲۰۰۳) کارکردهای متعددی را برای آن شناسایی کرده‌اند. این کارکردها شامل تأیید برای اطمینان از درستی یک ادعا، توضیح برای فهم چرایی درستی یک نتیجه، سیستم‌سازی جهت سازماندهی نتایج متعدد در یک ساختار منسجم، و کشف برای یافتن نتایج یا روابط جدید است. علاوه بر این، استدلال به انتقال ایده‌ها به دیگران، ساخت نظریه برای توسعه چارچوب‌های مفهومی، و کاوش برای بررسی امکانات و الگوها نیز کمک می‌کند. بنابراین، جنبه‌های متعدد و چندوجهی از استدلال و برهان‌آوری باید در نظر گرفته شوند.

این چارچوب، تمرکزی مشابه با مراحل حل مسئله را که توسط (پولیا، ۱۹۴۵) تنظیم و توسط (شونفیلد، ۱۹۸۵) بسط داده شده‌اند، پیشنهاد می‌کند. این فرایند با خواندن تکلیف آغاز می‌شود که شامل توجه دقیق به شرایط و اهداف است. سپس مرحله تحلیل قرار دارد که به درک عمیق مسئله و انتخاب دیدگاه مناسب می‌پردازد. در ادامه، کاوش به عنوان جستجوی گسترده‌تر برای راهکارها مطرح می‌شود و به برنامه‌ریزی یا طراحی استراتژی حل منجر می‌گردد. پس از آن، مرحله اجرا قرار دارد که پیاده‌سازی استراتژی را با ارزیابی مداوم پیشرفت همراه می‌سازد. در نهایت، فرایند با تأیید به پایان می‌رسد که در آن معقول بودن و درستی راه‌حل بررسی می‌شود.

(لایتنر، ۲۰۰۳) فرایند حل یک تکلیف را در چهار مرحله کلیدی مفهوم‌سازی کرد که چارچوبی برای تحلیل استدلال فراهم می‌کند. فرایند با مرحله اول آغاز می‌شود، جایی که با یک موقعیت دشوار مواجه هستیم؛ این وضعیت زمانی رخ می‌دهد که روش پیشروی در یک تکلیف یا تکلیف فرعی واضح نباشد و دانش‌آموز با عدم قطعیت شناختی روبرو شود. در مرحله دوم، یعنی انتخاب استراتژی، یک رویکرد حل مسئله انتخاب می‌شود. این انتخاب می‌تواند از رویه‌های خاص تا رویکردهای کلی متغیر باشد و ممکن است شامل یادآوری، ساخت، کشف یا حدس زدن باشد. این انتخاب اغلب با یک برهان پیش‌بینی‌کننده پشتیبانی می‌شود که توضیح می‌دهد چرا این استراتژی احتمالاً به نتیجه خواهد رسید. مرحله سوم، اجرای استراتژی است. در این مرحله، استراتژی پیاده‌سازی می‌شود و می‌تواند با یک برهان تأییدی همراه باشد که درستی نتیجه و معقول بودن آن را بررسی می‌کند. این مرحله نیازمند نظارت فراشناختی و ارزیابی مداوم است. در نهایت، در مرحله چهارم، نتیجه‌گیری حاصل می‌شود که می‌تواند پاسخ نهایی، درک جدید یا حتی تشخیص نیاز به یک استراتژی متفاوت باشد.

توالی استدلال را می توان با مسیری در یک نمودار جهت دار نشان داد (شکل ۲). یک راس v_n هم بیانگر حالت لحظه ای دانش و هم تکلیف (یا تکلیف فرعی) کنونی است. استدلال کننده از بین لبه های منتهی به v_n یک استراتژی را انتخاب می کند. اجرای استراتژی با یک لبه انتقال نشان داده می شود، $e_{\{n,m\}}$ در اینجا، دانشی که قبلاً در v_n به دست نیامده است، فراخوانی یا ساخته می شود و برای تشکیل حالت دانش جدید در v_m افزوده می شود، جایی که تکلیف تا حدی حل می شود و بنابراین یک حالت تکلیف جدید ایجاد می شود. یک دلیل محرک پشتیبانی کننده و توجیه کننده انتقال های بین رئوس است.



شکل ۲: حل تکلیف به صورت مسیری در نمودار جهت دار

نمودار شکل شماره ۲ نشان می دهد که حل یک تکلیف می تواند به عنوان یک مسیر در یک نمودار جهت دار مفهوم سازی شود. هر رأس (v) نمایانگر یک حالت دانش و تکلیف است، و هر لبه (e) نمایانگر یک انتقال از طریق اجرای یک استراتژی است. در استدلال CMR، مسیرهای جدید خلق می شوند (خطوط پیرنگ). در استدلال AR، مسیرهای از پیش تعیین شده دنبال می شوند. در استدلال MR، انتقال مستقیم از تکلیف به نتیجه است (بدون رئوس میانی). این نمایش گرافیکی به ما کمک می کند تا پیچیدگی و چندمسیری بودن فرآیند حل مسئله را درک کنیم. مسیرهای مختلف ممکن است به نتایج یکسان یا متفاوت منجر شوند، و انتخاب مسیر تحت تأثیر عوامل متعددی قرار دارد.

انواع استدلال: تقلیدی در مقابل خلاق

از نظر برخی پژوهشگران، «استدلال ریاضی» معادل اثبات دقیق و صوری است (دووال، ۲۰۰۲؛ هارل، ۲۰۰۶)، در حالی که برخی دیگر انواع استدلال‌های کمتر دقیق و غیرصوری را نیز قابل قبول و ارزشمند می‌دانند (NCTM، 2000؛ بال و باس، ۲۰۰۳). این تفاوت دیدگاه منعکس‌کننده تنش بین ریاضیات به عنوان یک رشته صوری و آکادمیک در مقابل ریاضیات به عنوان یک ابزار عملی و زمینه برای یادگیری است. براساس چارچوب معرفی شده توسط (لایتنر، ۲۰۰۸) دو نوع استدلال اصلی شناسایی می‌شود: استدلال تقلیدی و استدلال خلاق.

استدلال تقلیدی

به نظر می‌رسد متداول‌ترین نوع کاهش پیچیدگی در یادگیری ریاضی، تمرکز روی اقدامات به شکل روش‌های معمول و از پیش تعیین شده باشد (تال، ۱۹۹۶؛ وینر، ۱۹۹۷). این رویکرد، اگرچه ممکن است در کوتاه‌مدت به نظر کارآمد بیاید، اما ممکن است مانع توسعه درک مفهومی و رابطه‌ای عمیق شود (اسکمپ، ۱۹۷۸؛ هیبرت و کارپنتر، ۱۹۹۲).

در یک بررسی جامع ادبیات تحقیق، (هیبرت، ۲۰۰۳، ص ۱۲) مقادیر زیادی داده‌های همگرا پیدا کرد که نشان می‌دهند دانش‌آموزان برخی از مهارت‌های ابتدایی را می‌دانند اما درک و عمق آنها محدود است. او می‌نویسد: «می‌توان رفتار آنها را تنها با مشاهده قوانین دستکاری نمادهایی که به آنها آموخته شده است مدل‌سازی کرد و خطاهایی را که مرتکب می‌شوند پیش‌بینی کرد، و نشان داد که آنها مانند روبات‌هایی که حافظه ضعیفی دارند از این قوانین پیروی می‌کنند». این توصیف تصویری نگران‌کننده اما واقع‌بینانه از وضعیت یادگیری در بسیاری از کلاس‌های درس ریاضی ارائه می‌دهد. عملیات‌های به خاطر سپرده شده بدون مفاهیم ساختاری را فقط می‌توان در طرحواره‌های شناختی متوالی بدون ساختار ذخیره کرد که برای محدودیت‌های حافظه میان‌مدت انسان مناسب نیستند (اسفارد، ۱۹۹۱). این محدودیت شناختی توضیح می‌دهد که چرا دانش‌آموزان اغلب فرمول‌هایی را که به خاطر سپرده‌اند فراموش می‌کنند یا آنها را به اشتباه به کار می‌برند. بنابراین، کاهش پیچیدگی می‌تواند تا آنجا پیش رود که تفکر تقلیدی از معنای ریاضی آن جدا شود و به یک فعالیت مکانیکی و

بی معنا تبدیل گردد. مطالعات تجربی شکل دهنده این چارچوب، دو نوع استدلال تقلیدی را شناسایی کرده اند: استدلال حفظی (MR) و استدلال الگوریتمی (AR).

لایتنر (۲۰۰۸) معتقد است استدلال حفظی زمانی رخ می دهد که انتخاب استراتژی بر اساس یادآوری یک پاسخ کامل بنا شده باشد. در این حالت، دانش آموز صرفاً یک پاسخ از پیش آموخته شده را از حافظه بازیابی می کند. به دنبال آن، اجرای استراتژی فقط شامل نوشتن آن پاسخ بر روی برگه است و هیچ پردازش شناختی عمیقی در این فرآیند صورت نمی گیرد. همه حل تکلیف ها تا حدی بر اساس یادآوری بنا شده اند - این امری طبیعی و ضروری است. اما یادآوری به عنوان یک استراتژی کلی و اصلی فقط در چند نوع تکلیف محدود مانند مواردی که در مورد واقعیت ها («یک لیتر چند سانتی متر مکعب است؟»)، تعریف ها («چند جمله ای چیست؟»)، و اثبات های استاندارد سوال می کنند، مفید است.

یک مثال روشنگر از مطالعه آسیالا و همکاران، (۱۹۹۶) می آید. در یک تکلیف امتحان لیسانس، از دانشجویان خواسته شد: «قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را بیان و اثبات کنید». پاسخ تقریباً ۵۰٪ از ۱۵۰ دانشجویی که نمره کامل را کسب کردند، کپی دقیق اثبات دو صفحه ای کتاب درسی بود. در پس آزمون، آنها یافتند بیشتر پاسخ های ناقص شامل قسمت های زیادی از همان اثبات بودند، اما بعضی از قسمت ها جا افتاده بودند یا به ترتیب معکوس نوشته شده بودند که منجر به شکستن زنجیره منطقی شده بود. در پس آزمون، از دانشجویان خواسته شد که توالی شش تساوی موجود در اثبات را که بیشتر آنها در رابطه با پیچیدگی کل اثبات بسیار ساده هستند، توضیح دهند.

$$(1) \int_a^b f(x) dx$$

↓

$$(2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

↓

$$(3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

↓

$$(4) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})]$$

↓

$$(5) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n) - f(x_0)]$$

↓

$$(6) = f(b) - f(a)$$

شکل ۳: اثبات قضیه اساسی حساب دیفراسیل و انتگرال

در شکل شماره ۳، در مطالعه (آسیلا و همکاران، ۱۹۹۶) دانشجویانی که این اثبات دو صفحه‌ای را کاملاً حفظ کرده و در امتحان بازنویسی کرده بودند، نتوانستند این شش تساوی نسبتاً ساده را توضیح دهند. این یافته نشان می‌دهد که حفظ سطحی استدلال MR می‌تواند به موفقیت در آزمون منجر شود، اما بدون درک واقعی همراه است. برابری‌های (۳) تا (۵) به ویژه حیاتی هستند زیرا نشان می‌دهند چگونه جمع تلسکوپی کار می‌کند. این مثال قدرتمند نشان می‌دهد که موفقیت در بازتولید یک اثبات طولانی لزوماً معادل درک آن نیست. دانشجویانی که نمره کامل گرفتند نتوانستند توضیح دهند که چرا $f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots$ برابر است با $f(x_n) - f(x_0)$.

نوع «درک ابزاری» بدون «درک رابطه‌ای» (اسکمپ، ۱۹۷۸) در آموزش ریاضی بسیار رایج است. در این مطالعه، فقط تعداد محدودی از دانشجویان توانستند این برابری‌های ساده را توضیح دهند، و بنابراین مشخص شد که آنها آن اثبات طولانی را که موفق به حفظ آن شده بودند، درک نکرده بودند. این یافته نشان می‌دهد که حفظ سطحی می‌تواند به موفقیت کوتاه‌مدت در آزمون‌ها منجر شود، اما بدون درک واقعی همراه است. نوع دیگر تأثیر استدلال حفظی از طریق تجربه‌های حاصل از محیط یادگیری است، از جمله درک واقعیت‌ها، تصاویر مفهومی نادرست، و باورهای محدودکننده. یک مثال از این تأثیر این است که دانش‌آموزی مقدار $k = 6$ را به عنوان مقدار صحیح شیب یک تابع خطی پس از محاسبه درست بدست می‌آورد، اما با این استدلال که « k نباید اینقدر عدد بزرگی باشد چون خط خیلی شیب‌دار است، همیشه عدد کوچک‌تری مثل ۱ یا ۲- است» آن را رد می‌کند. این قبیل استدلال‌های مبتنی بر تصورات نادرست، غالباً بر استدلال‌هایی که بیشتر بر پایه ریاضی هستند، غلبه دارند و می‌توانند مانعی جدی در یادگیری باشند.

تکالیف مدرسه معمولاً محاسبات را در صورتی درخواست می‌کنند که یادآوری الگوریتم از یادآوری مستقیم پاسخ مناسب‌تر باشد. «الگوریتم توالی محدودی از دستورالعمل‌های قابل اجراست که به شما اجازه می‌دهد نتیجه مشخصی را برای دسته مشخصی از مسئله‌ها پیدا کنید» (بروسو، ۱۹۹۷). اهمیت آن در این است که می‌توان آن را از قبل تعیین کرد، بطوریکه انتقال n -ام به هیچ شرایط پیش‌بینی نشده‌ای در انتقال $(n-1)$ ام، به یافتن اطلاعات جدید، هیچ تصمیم جدیدی، هیچ تفسیری و بنابراین به هیچ معنایی که می‌توان به آنها نسبت داد، بستگی ندارد.

در این نوع، «الگوریتم» شامل تمام رویه‌های از پیش تعیین شده (نه تنها محاسبات عددی) است، به عنوان مثال یافتن صفرهای یک تابع با تمرکز روی محل تقاطع نمودار با محور X . (لایتنر، ۲۰۰۸) بیان می‌کند که استدلال الگوریتمی (AR) دو شرط را فراهم می‌کند. نخست اینکه انتخاب استراتژی، یادآوری الگوریتم راه‌حل است. برهان پیش‌بینی‌کننده ممکن است انواع مختلفی داشته باشد، اما نیازی به ایجاد راه‌حل جدید نیست و دانش‌آموز صرفاً یک روش از پیش آموخته شده را فراخوانی و به کار می‌برد. دوم اینکه، قسمت‌های باقی‌مانده استدلال، یعنی اجرای استراتژی، برای استدلال‌کننده بسیار ساده هستند، به طوری که فقط یک اشتباه سهل‌انگارانه می‌تواند از رسیدن به پاسخ جلوگیری کند و پیچیدگی شناختی اصلی به الگوریتم سپرده شده است. این مفهوم «الگوریتم»

بسیار گسترده‌تر از مفهوم نسبتاً معمول آن به عنوان چیزی است که صریحاً در قالب زنجیره‌ای از دستورالعمل‌های قابل اجرا - به عنوان مثال الگوریتم تقسیم طولانی - آموزش داده می‌شود. نکته اصلی در مورد این مفهوم گسترده‌تر این است که تمام قسمت‌هایی که از نظر مفهومی دشوار هستند به الگوریتم سپرده می‌شوند و فقط قسمت‌های آسان و مکانیکی به عهده دانش‌آموز هستند، که ممکن است اثر یادگیری عمیق را محدود کند.

برای نشان دادن محدودیت این رویکرد، می‌توان به راحتی به کودکان ۷ ساله با استعداد معمولی آموزش داد که از چند جمله‌ای‌های ساده مشتق بگیرند (به عنوان مثال، با استفاده از قاعده توانی: مشتق x^n برابر nx^{n-1} است). واضح است که آنها هیچ درک مفهومی در مورد آنچه انجام می‌دادند ندارند - مفهوم نرخ تغییر لحظه‌ای، حد، یا معنای هندسی مشتق - اما عملکرد مکانیکی آنها ممکن است باعث شود در امتحانات ریاضی متوسطه معمول چند امتیاز بگیرند. بنابراین AR ممکن است با درک محدود و همچنین با درک کامل روش انجام شود، و این تفاوت مهم است.

استدلال خلاق

در چارچوب معرفی شده توسط (لایتنر، ۲۰۰۸)، متضاد واژه تقلید، خلق است. «خلاق» یک مثال کلاسیک از یک کلمه «هورا» در کنار واژه‌هایی مانند منطقی، آزادی و غیره است. «معنی کلمات هورا به طور معمول دقیق نیستند. آنها اغلب تعاریف قابل بحثی دارند، اما همگی به شدت دارای بار معنایی مثبت هستند» (هاکستپ و رولند، ۲۰۰۰). کلمه خلاق که در ابتدا با ایده‌هایی در حوزه هنر مرتبط بوده است، امروزه در طیف گسترده‌ای از زمینه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد (به عنوان مثال «آشپزی خلاق»، «نوشتن خلاق»، «حل مسئله خلاق»).

مجموعه بزرگی از ادبیات وجود دارد که به خلاقیت ریاضی‌دانان بزرگی مانند پوانکاره و هادامارد اشاره دارد. (سیرامان، ۲۰۰۴) نتیجه گرفت که ریاضی‌دانان تحقیقاتی از مدل گشتالت خلاقیت پیروی می‌کنند: آماده‌سازی، دوره نهفتگی، روشنگری، تأیید. این مدل نشان می‌دهد که خلاقیت یک فرآیند آنی نیست، بلکه شامل مراحل مختلف پردازش شناختی است. اگرچه خلاقیت اغلب با مفهوم «تبوغ» یا توانایی استثنایی مرتبط است، اما برای مربیان ریاضی می‌تواند مثمرتر باشد که خلاقیت را در

عوض به عنوان یک جهت‌گیری یا گرایش به سمت فعالیت ریاضی ببینند که می‌تواند به طور گسترده در جامعه عمومی مدرسه پرورش یابد (سیلور، ۱۹۹۷). این دیدگاه دموکراتیک‌تر از خلاقیت، آن را از حوزه نخبگان به دامنه همه دانش‌آموزان می‌آورد.

هیچ تعریف واحدی از «خلاق» که به طور کلی در تحقیقات استفاده شود وجود ندارد (هایلوک، ۱۹۹۷)، و این اصطلاح دو کاربرد عمده دارد. کاربرد اول به یک فرآیند تفکر اشاره دارد که واگرا است، بر تثبیت غلبه می‌کند و انعطاف‌پذیری نشان می‌دهد. کاربرد دوم به یک محصول اشاره دارد که به دلایلی خلاق تصور می‌شود، مانند آثار هنری یا راه‌حل‌های نوآورانه. هایلوک دو نوع تثبیت فرآیند را در نظر می‌گیرد که مانع خلاقیت هستند: تثبیت کلی محتوا دامنه عناصری را که برای کاربردهای یک مسئله خاص مناسب دیده می‌شوند، محدود می‌کند. برای مثال، دانش‌آموزی که فکر می‌کند فقط می‌تواند از اعداد صحیح برای حل یک مسئله استفاده کند. تثبیت الگوریتمی استفاده مکرر و خودکار از الگوریتمی است که در ابتدا موفق است اما به یک تثبیت نامناسب تبدیل می‌شود. برای مثال، دانش‌آموزی که همیشه از حل معادله درجه دو با فرمول کلی استفاده می‌کند، حتی زمانی که تجزیه ساده‌تری ممکن است.

(سیلور، ۱۹۹۷) دیدگاهی از خلاقیت را پیشنهاد می‌کند که در آن فرآیندهای تفکر با دانش عمیق و انعطاف‌پذیر در حوزه‌های محتوا مرتبط هستند و همراه با دوره‌های طولانی کار و تأمل هستند، نه صرفاً بینش‌های سریع و استثنایی. سیلور سه ویژگی اصلی خلاقیت را شناسایی می‌کند که عبارتند از تسلط یا تعداد راه‌حل‌ها و ایده‌های تولید شده، انعطاف‌پذیری که به تنوع رویکردها و استراتژی‌های مختلف اشاره دارد، و تازگی که بیانگر اصالت و نوآوری در راه‌حل است. هایلوک بر اصالت و انعطاف‌پذیری تأکید دارد، اما معتقد است که مفهوم محدود تسلط کمتر مفید است. او استدلال می‌کند که اگر از دانش‌آموزی خواسته شود سوالاتی با جواب ۴ ایجاد کند، ممکن است با «۱-۵»، «۲-۶»، «۳-۷» شروع کند و این کار را برای مدت نامحدود ادامه دهد. این عمل در صورتی که فقط به عنوان تعداد پاسخ‌های قابل قبول در نظر گرفته شود، ممکن است در تسلط نمره بالایی بگیرد، اما در انعطاف‌پذیری که تعداد پاسخ‌های متفاوت است، نمره بالایی ندارد.

بنابراین، خلاقیت در حل تکلیف دانش‌آموزان عادی مبتنی بر فرآیندهای تفکری است که انعطاف‌پذیر هستند، به راحتی روش‌های متفاوت و سازگاری با شرایط را قبول می‌کنند، تثبیت مانع آنها نمی‌شود و مبتنی بر استدلال منطقی و قابل دفاع هستند. ممکن است توجه داشته باشید که شرایط قابل قبول بودن در تعریف CMR شامل محصولات حاصل از فرآیندهای تفکر خلاق کاملاً تکنانشی یا هیجانی (به عنوان مثال خلق هنر صرفاً بر اساس احساسات) نمی‌شود. در ریاضیات، استدلال باید مبنای منطقی داشته باشد.

استدلال خلاق مبتنی بر ریاضی (CMR) باید تمام معیارهای زیر را فراهم کند. معیار اول تازگی است، به این معنی که برای استدلال‌کننده یک توالی استدلال جدید خلق می‌شود، یا یک استدلال فراموش شده دوباره ساخته می‌شود. این ویژگی تضمین می‌کند که دانش‌آموز صرفاً یک رویه از پیش آموخته شده را بازتولید نمی‌کند. معیار دوم قابل قبول بودن است؛ یعنی باید برهان‌هایی وجود داشته باشند که از انتخاب و اجرای استراتژی حمایت کرده و دلیل درستی یا حداقل قابل قبول بودن نتیجه‌گیری را ارائه دهند، بنابراین دانش‌آموز نمی‌تواند صرفاً حدس بزند. معیار سوم **بنیان ریاضی** است، به این معنا که برهان‌ها باید به خصوصیات ذاتی ریاضی مؤلفه‌های دخیل در استدلال، مانند اشیاء، تبدیل‌ها و مفاهیم، متکی باشند و نه بر عوامل غیرریاضی مانند قرارداد، اقتدار یا حافظه صرف.

CMR، به عنوان حل مسئله، لازم نیست که یک چالش شدید باشد یا به مسائل پیچیده محدود شود. این تعریف شامل استدلال ابتدایی نیز می‌شود، مشروط بر اینکه سه معیار بالا برآورده شوند. با این حال، در بیشتر مطالعات، CMR نادر است و AR غالب است. تنها استثناها تاکنون دو مطالعه در مورد الزامات استدلال در سنجش بوده‌اند. مطالعه پالم و همکاران (۲۰۰۵) اذعان دارد که آزمون‌های سراسری رسمی دارای تعداد زیادی تکلیف هستند که به CMR احتیاج داشتند، در حالیکه چنین تکلیف‌هایی در آزمون‌های معلم‌ساخته نایاب‌اند CMR. به طور گسترده و موفقیت‌آمیزی در تکلیف‌هایی که به CMR ساده نیاز داشتند مورد استفاده قرار گرفت، اما در تکلیف‌های دشوار CMR، AR محدودکننده ناموفق معمول‌تر بود (بوسن و همکاران، ۲۰۰۵). لذا با مراجعه به شکل شماره ۲، انتقال در CMR خلق می‌شود - دانش‌آموز مسیر جدیدی را کشف یا می‌سازد. در AR، دانش‌آموز یک مسیر شناخته‌شده از پیش تعیین شده را دنبال می‌کند. در MR، انتقال بلاواسطه و از طریق یادآوری مستقیم است. علاوه بر این، در CMR ارزش معرفتی بستگی

به قابل قبول بودن و ارزش منطقی استدلال دارد، در حالی که ارزش معرفتی در MR و AR با اختیارات و قدرت منبع اطلاعات تقلیدی (معلم، کتاب درسی، یا الگوریتم استاندارد) تعیین می شود.

ارتباط استدلال با حل مسأله و توانمندی های ریاضی

روش های زیادی برای توصیف دانش ریاضی مورد استفاده و آموخته شده در استدلال وجود دارد، اما توصیف آن فقط از نظر محتوای ریاضی کافی نیست. اصول و استانداردهای (NCTM، ۲۰۰۰) پنج استاندارد محتوای خود (عدد و عملیات، جبر، هندسه، اندازه گیری، و تحلیل داده ها و احتمال) را با پنج استاندارد فرآیند (حل مسئله، استدلال و اثبات، ارتباطات، ارتباط سازی، و بازنمایی) تکمیل می کند. این رویکرد دویعدی به ریاضیات - محتوا و فرآیند - نشان می دهد که یادگیری ریاضی فراتر از دانستن واقعیت ها و فرمول ها است. یک چارچوب مشابه توسط (نیس، ۲۰۰۳) شامل عواملی مشابه استانداردهای فرآیند NCTM می شود، اما آنها را «توانمندی» می نامد. توانمندی ریاضی، توانایی درک، قضاوت، انجام و استفاده از ریاضی در زمینه ها و موقعیت های مختلف ریاضی و غیرریاضی است. سه توانمندی به ویژه به این چارچوب مرتبط هستند.

استانداردهای (NCTM، ۲۰۰۰) استدلال و اثبات را به عنوان جنبه های اساسی و غیرقابل تفکیک ریاضی می دانند. «افرادی که استدلال می کنند و به طور تحلیلی فکر می کنند، تمایل دارند به الگوها، ساختار یا قانونمندی ها هم در موقعیت های دنیای واقعی و هم در اشیاء نمادین توجه کنند. آنها می پرسند که آیا این الگوها تصادفی هستند یا به دلیل خاصی رخ می دهند و حدس می زنند و اثبات می کنند».

توانمندی استدلال فراتر از صرفاً ساختن استدلال است و شامل توانایی های متعددی می شود. این توانمندی به فرد امکان می دهد تا زنجیره استدلال های دیگران را دنبال کرده و ارزیابی کند و بداند اثبات چیست و چه تفاوتی با انواع دیگر استدلال مانند استدلال تجربی دارد. همچنین، این توانمندی شامل کشف ایده های پایه در یک خط برهان، ابداع برهان های صوری و غیرصوری، و تشخیص زمان نیاز به اثبات در مقابل کفایت یک استدلال غیرصوری می شود.

روش تحقیق

برای این مطالعه، ۱۳۱ دانش‌آموز پایه نهم در ابتدا موافقت کردند که مشارکت کنند. شرکت‌کنندگان از چهار مدرسه متوسطه اول در اراک بودند. دانش‌آموزان از طریق تماس با مدیران و معلمان ریاضی در این مدارس جذب شدند. دانش‌آموزان مطالعه را در طول سال تحصیلی، اما خارج از برنامه‌های درسی عادی و در زمان‌های داوطلبانه تکمیل کردند تا تأثیر منفی بر یادگیری عادی آنها نداشته باشد. در ابتدا، ۲۸ شرکت‌کننده به دلیل عدم حضور حذف شدند، زیرا آنها در جلسه تمرین یا جلسه آزمون یک هفته بعد شرکت نکردند. حضور در هر دو جلسه برای اطمینان از یکپارچگی داده‌ها ضروری بود. چهار شرکت‌کننده دیگر که در طول جلسات تمرین کمتر از ۱۰٪ از تکالیف را تکمیل کردند، فرض شد که واقعاً سعی جدی نکرده‌اند تکالیف تمرینی را حل کنند و بنابراین حذف شدند. این معیار برای اطمینان از تعامل واقعی با مواد آموزشی استفاده شد. برای جلوگیری از خطاهای نوع اول احتمالی (تشخیص اثر غیرواقعی)، شرکت‌کنندگانی که نمره سقف داشتند (یعنی تقریباً همه سؤالات را در هر دو تمرین و آزمون درست پاسخ دادند) حذف شدند، زیرا برای این افراد دیگر فضای رشد وجود نداشت. در مجموع، ۹۱ شرکت‌کننده در تحلیل‌های نهایی گنجانده شدند (۴۸ نفر در گروه AR و ۴۳ نفر در گروه CMR). این دو گروه از نظر متغیرهای جمعیت‌شناختی و شناختی متوازن بودند. همانطور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، دو گروه از نظر آماری در متغیرهای مهم پیش‌زمینه‌ای تفاوت معناداری نداشتند، این تطبیق دقیق به ما اطمینان می‌دهد که هرگونه تفاوت در عملکرد بین گروه‌ها می‌تواند به مداخله آموزشی نسبت داده شود، نه به تفاوت‌های پیش‌موجود.

گروه	تعداد	سن(میانگین ±انحراف معیار)	جنسیت (زن/مرد)	CPI(میانگین ±انحراف معیار)	نمره ریاضی (میانگین±انحراف معیار)
AR	۴۸	0.۵۱۶,۵±	۲۴/۲۴	۰,۰۲±۰,۹۸	۰.۷۳,۸±
CMR	۴۳	0.۱۶,۴±۵	۲۲/۲۱	1.۰,۰۳±۰.۲	۰.۳,۷±۸
کل	۹۱	0.۱۶,۴۵±۵	۴۵/۴۶	1.۰,۰۰±۰.۰	۰.۳,۷۵±۷۵

جدول ۱: مشخصات جمعیت‌شناختی شرکت‌کنندگان

مواد و طراحی تکالیف

مجموعه‌ای از تکالیف آموزشی جدید به طور خاص برای این مطالعه طراحی شد تا یادگیری دانش‌آموزان را از طریق AR یا CMR افزایش دهد. تکالیف مطالعه حاضر بر اساس روشی بود که قبلاً توسط (بوئن؛ لیترو پالم، ۲۰۱۰) و (پالم و همکاران، ۲۰۱۱) بصورت توسعه یافته استفاده شده بود. این روش از طریق تحلیل سیستماتیک کتاب‌های درسی ریاضی استفاده شده در مدارس، احتمال استفاده یک دانش‌آموز (یا گروه دانش‌آموزی) از CMR یا AR را تخمین می‌زند.

محتوای ریاضی تکالیف شامل الگوهای عددی و هندسی بود که نیاز به کشف قاعده یا فرمول زیربنایی داشتند. این نوع تکالیف به چند دلیل انتخاب شدند. نخست، این تکالیف برای دانش‌آموزان دبیرستانی مناسب و قابل دسترسی هستند. دوم، امکان ایجاد نسخه‌های متعدد مشابه اما متفاوت را فراهم می‌کنند که برای طراحی تمرین و آزمون ضروری است. سوم، این تکالیف می‌توانند هم به صورت الگوریتمی (با دادن فرمول) و هم به صورت خلاق (با کشف فرمول) حل شوند، که این امر برای مقایسه دو رویکرد مطالعه حیاتی است. در نهایت، این تکالیف دارای ارزیابی واضح و عینی هستند که نمره‌دهی را قابل اعتماد می‌سازد.

تکالیف تمرینی

دانش هدف برای هر دو گروه آموزشی، روش‌های حل برای ۱۴ مجموعه تکلیف ریاضی مختلف بود. «روش حل» به روشی برای حل یک تکلیف خاص اشاره دارد که برای مقادیر ورودی عددی مختلف قابل اجرا و تعمیم‌پذیر است. به عنوان مثال، اگر تکلیف این باشد که چه تعداد چوب کبریت برای تشکیل یک ردیف از n مربع لازم است، روش‌های مختلفی وجود دارد. روش اول بصری- شمارشی است که در آن فرد یک تصویر ذهنی از مربع‌ها تشکیل داده و چوب‌ها را می‌شمارد. روش دوم بازگشتی است که با یک مربع شروع کرده و برای هر مربع جدید سه چوب اضافه می‌کند. روش سوم فرمولی است که از رابطه جبری تعداد چوب کبریت‌ها $n+1=3$ استفاده می‌کند، که در آن n تعداد مربع‌ها است.

دانش‌آموزان در گروه **استدلال الگوریتمی (AR)** برای هر یک از ۱۴ مجموعه تکلیف، پنج زیرتکلیف عددی دریافت کردند (در مجموع ۷۰ زیرتکلیف). برای این تکلیف، روش‌های حل به صورت یک فرمول جبری صریح ارائه شد، همراه با یک مثال کامل از نحوه به‌کارگیری آن. برای مثال، برای مسئله چوب کبریت، فرمول $M = 3n + 1$ داده می‌شد و مثالی مانند "برای $n = 4$ مربع، $M = 3(4) + 1 = 13$ چوب کبریت" ارائه می‌گردید. سپس دانش‌آموزان باید ۵ زیرتکلیف عددی با مقادیر مختلف n را حل می‌کردند. بنابراین، برای هر یک از ۱۴ مجموعه تکلیف، شرکت‌کنندگان گروه AR با یک فرمول صحیح و کاربردی برای همه پنج زیرتکلیف متوالی تأمین شدند و فقط باید فرمول را به خاطر می‌سپردند و اعمال می‌کردند.

در مقابل، دانش‌آموزان در گروه **استدلال خلاق مبتنی بر ریاضی (CMR)** برای هر یک از ۱۴ مجموعه تکلیف، سه زیرتکلیف دریافت کردند (در مجموع ۴۲ زیرتکلیف)، بدون آنکه هیچ راهنمایی مستقیمی در مورد چگونگی حل تکلیف به آنها ارائه شود. ساختار این سه زیرتکلیف به گونه‌ای بود که دو زیرتکلیف اول شامل دو مورد عددی خاص بود که دانش‌آموز باید با کاوش، آزمایش، و استدلال آنها را حل می‌کرد. زیرتکلیف سوم از آنها می‌خواست تا بر اساس الگوهای کشف‌شده در دو زیرتکلیف قبلی، یک فرمول کلی (تابع ریاضی) تولید کنند. در طول تمرین، شرکت‌کنندگان CMR باید یک توالی استدلال جدید ایجاد می‌کردند (تازگی)، در مورد درستی راه‌حل‌های خود تأمل می‌کردند (قابل قبول بودن)، و استدلال خود را بر ویژگی‌های ذاتی ریاضی استوار می‌کردند (بنیان ریاضی). این خودتولیدی فرمول، دانشی تعمیم‌یافته (یک اصل اساسی) از تکالیف عددی تولید می‌کند که می‌تواند به درک عمیق‌تر و بازیابی بهتر منجر شود.

رویکرد AR مشابه چیزی است که معمولاً از طریق آموزش سنتی و کتاب‌های درسی متداول ارائه می‌شود: معلم فرمول را می‌دهد، مثال می‌زند، و دانش‌آموزان تمرین‌های مشابه را حل می‌کنند. بنابراین AR به عنوان یک خط پایه آموزشی در نظر گرفته می‌شود که CMR با آن مقایسه می‌شود. در تلاشی برای برابر کردن زمان تمرین و تعداد تمرین‌ها، زیرتکالیف تمرینی AR بیشتری (۵) نسبت به زیرتکالیف تمرینی (3) CMR وجود داشت. این طراحی تضمین می‌کند که هیچ گروهی صرفاً به دلیل زمان بیشتر یا تعداد تمرین بیشتر برتری نداشته باشد.

تکالیف آزمون

تکالیف آزمون برای هر دو گروه AR و CMR کاملاً یکسان بودند تا مقایسه عادلانه امکان پذیر باشد. برای هر یک از ۱۴ مجموعه تکلیف، سه نوع زیر تکلیف آزمون طراحی شد که جنبه های مختلف یادگیری را ارزیابی می کردند. **تکلیف آزمون (I فرمول)** با محدودیت زمانی ۳۰ ثانیه، از شرکت کنندگان می خواست فرمول متناظر را بنویسند. این محدودیت زمانی کوتاه عمدتاً بازبایی حافظه را ارزیابی می کند، زیرا فقط زمان کافی برای یادآوری و نوشتن فرمول وجود دارد. **تکلیف آزمون II (عددی کوتاه)** نیز با محدودیت زمانی ۳۰ ثانیه، شامل تکالیف عددی بود و یادآوری و اعمال سریع راه حل را می سنجید. در نهایت، **تکلیف آزمون (III عددی طولانی)** همان تکلیف عددی نوع دوم را با محدودیت زمانی ۳۰۰ ثانیه (۵ دقیقه) ارائه می داد. این زمان طولانی تر به دانش آموزان امکان (باز)سازی راه حل را می داد، حتی اگر فرمول را فراموش کرده باشند، و بدین ترتیب درک مفهومی و توانایی بازسازی را ارزیابی می کرد. تکالیف آزمون II و III مشابه تکالیف تمرینی CMR بودند، اما با اعداد متفاوت برای جلوگیری از یادگیری صرف پاسخ های خاص. این طراحی سه گانه به ما اجازه می دهد تا بفهمیم که آیا تفاوت ها در عملکرد به دلیل حافظه بهتر، اعمال سریع تر، یا درک عمیق تر است که امکان بازسازی را فراهم می کند.

طرح و روش اجرا

این مطالعه از یک طرح عاملی مختلط استفاده کرد. متغیر مستقل بین آزمودنی، گروه (AR یا CMR) بود که با تخصیص تصادفی دستکاری شد. متغیرهای وابسته درون آزمودنی شامل عملکرد در تکالیف تمرین و عملکرد در سه نوع تکلیف آزمون (I, II, III) بودند. روند اجرا در سه هفته سازماندهی شد. در هفته صفر، جلسه پیش آزمون برگزار شد که طی آن آزمون های شناختی اجرا گردید، اطلاعات زمینه ای جمع آوری شد و شرکت کنندگان تطبیق داده شده و به گروه ها تخصیص یافتند. در هفته اول، جلسه تمرین برگزار شد. هر دو جلسه تمرین و آزمون در یک مرورگر وب استاندارد اجرا شدند و داده های عملکرد به طور خودکار ذخیره گردید. گروه AR بر روی ۷۰ زیر تکلیف با فرمول های ارائه شده تمرین کرد، در حالی که گروه CMR بر روی ۴۲ زیر تکلیف بدون راهنمایی مستقیم کار کرد. زمان مجاز برای هر دو گروه ۲۱۰ دقیقه بود، هرچند گروه CMR به طور

متوسط ۸ دقیقه بیشتر زمان صرف کرد که منعکس‌کننده تلاش بیشتر است. در هفته دوم، یک هفته پس از تمرین، جلسه آزمون برای ارزیابی یادگیری بلندمدت برگزار شد. هر دو گروه تکالیف آزمون یکسان را که شامل ۱۴ مجموعه و ۳ نوع تکلیف بود، در زمان مجاز ۸۵ دقیقه تکمیل کردند. برای اطمینان از اعتبار نتایج، چندین شرط کنترل شد. تمام شرکت‌کنندگان به صورت انفرادی کار کردند تا از تأثیر همتایان جلوگیری شود. یک آزمایش‌گر در طول هر دو جلسه برای نظارت بر روند حضور داشت. به شرکت‌کنندگان هیچ اطلاعات قبلی در مورد محتوای آزمون آینده داده نشد تا از تأثیر انتظارات جلوگیری شود. همچنین، حداقل کمک محتوایی ارائه شد تا ساختار آزمایش، یک موقعیت آموزشی غیرمستقیم را منعکس کند، که در آن دانش‌آموز باید دانش جدیدی را بدون تأثیر مستقیم معلم بسازد. معیارهای وابسته عملکرد تکالیف تمرین و آزمون همگی بر اساس نسبت پاسخ‌های صحیح هستند. یک نمره ترکیبی شامل میانگین مقدار ۱۴ مجموعه تکلیف که برای رسیدن به راه‌حل در طول جلسات تمرین یا آزمون استفاده شدند محاسبه شد، و این نمره در نهایت از هر زیرتکلیف مشتق شد. برای تکالیف آزمون، میانگین نمره برای هر زیرتکلیف (I, II, III) نیز به طور جداگانه محاسبه شد تا تحلیل جزئی‌تر امکان‌پذیر باشد.

نتایج

این بخش نتایج آماری مطالعه را با استفاده از جداول و نمودارها ارائه می‌دهد.

عملکرد تکالیف تمرین و آزمون

نمرات ترکیبی تمرین و آزمون به وضوح الگویی معکوس و قابل توجه را نشان می‌دهند: گروه AR در طول جلسه تمرین به طور معناداری بهتر از CMR عمل کرد، اما در آزمون، الگو کاملاً معکوس شد و گروه CMR به طور معناداری برتر بود.

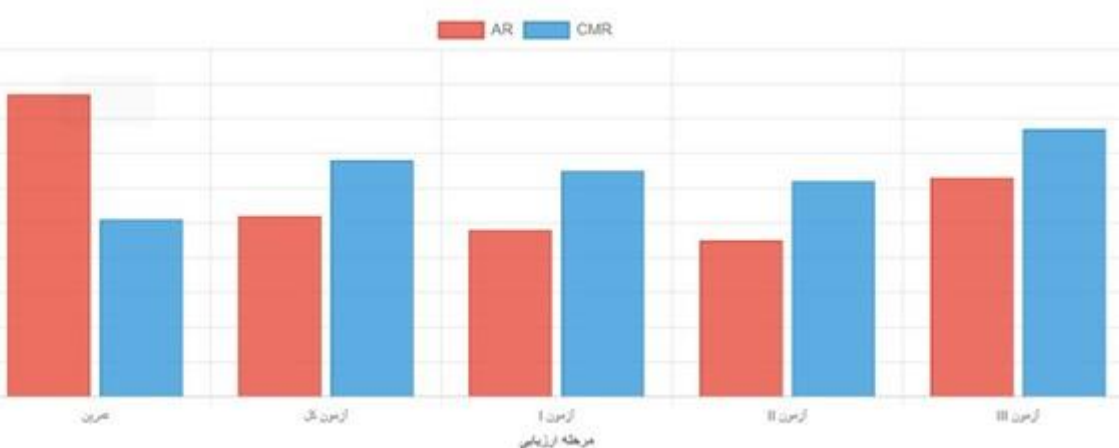
نتایج تمرین:

آزمون من-ویتنی که نمرات تمرین ترکیبی را بین گروه‌های CMR و AR مقایسه می‌کند، تایید کرد که افراد در گروه AR به طور معناداری بهتر از افراد در گروه CMR عمل کردند $U =$:

106.5, $p < .0001$, $r = .77$. این اندازه اثر بسیار بزرگ ($r = .77$) نشان می‌دهد که گروه AR تقریباً ۸۷٪ از تکالیف تمرین را درست حل کرد، در حالی که گروه CMR فقط ۵۱٪ را درست حل کرد. این تفاوت قابل انتظار بود زیرا گروه AR با فرمول‌های از پیش تعیین شده تأمین شده بودند.

نتایج آزمون:

یک آزمون t نمونه‌های مستقل که نمرات آزمون ترکیبی را بین AR و CMR مقایسه می‌کند، نشان داد که الگو معکوس شده است $t(89) = 3.54$, $p = .001$, $d = 0.73$. CMR به طور معناداری بهتر از AR عمل کرد (۶۸٪ در مقابل ۵۲٪). این اندازه اثر متوسط تا بزرگ ($d = 0.73$) نشان‌دهنده تفاوت قابل توجه و عملاً مهم است.



نمودار ۱: مقایسه عملکرد تمرین و آزمون

تحلیل تکالیف آزمون جداگانه:

تحلیل واریانس مدل مختلط با تکالیف آزمون (I-III) به عنوان عامل درون‌آزمودنی‌ها و گروه AR در مقابل CMR به عنوان عامل بین‌آزمودنی‌ها انجام شد. نتایج نشان داد که اثر اصلی تکلیف آزمون بسیار قوی بود ($F(2, 178) = 139$, $p < .0001$, $\eta^2 = .61$)، به این معنی

که عملکرد در سه نوع تکلیف آزمون به طور معناداری متفاوت بود؛ تکلیف III (عددی طولانی) آسان‌ترین و تکلیف II (عددی کوتاه) دشوارترین بود. اثر اصلی گروه نیز معنادار بود ($F(1, 89) = 12.52, p < .001, \eta^2 = .12$) و تأیید کرد که گروه CMR در کل بهتر از AR عمل کرد. نکته بسیار مهم، غیرمعنادار بودن تعامل تکلیف آزمون $\times$ گروه بود ($F(2, 178) = 0.60, p = .55, \eta^2 = .007$). این یافته نشان می‌دهد که برتری CMR در سراسر هر سه نوع تکلیف آزمون پایدار و یکنواخت بود. به عبارت دیگر، CMR نه تنها در یادآوری فرمول‌ها بهتر بود، بلکه در اعمال سریع و بازسازی راه‌حل‌ها نیز برتر بود.

جدول ۲: نتایج آماری مقایسه عملکرد

مرحله	AR (میانگین $\pm$ SD)	CMR (میانگین $\pm$ SD)	اندازه آزمون	مقدار P	اندازه اثر
تمرین	0.87 ± 0.08	0.51 ± 0.15	$U=106.5$	$< .001$	$0.77 =$
آزمون (کل)	0.52 ± 0.18	0.68 ± 0.17	$t(89) = 3.24$	$.001$	$0.73 =$
آزمون I (فرمول)	0.48 ± 0.22	0.65 ± 0.21	-	$< .01$	$0.79 =$
II (عددی کوتاه)	0.45 ± 0.20	0.62 ± 0.19	-	$< .001$	$0.87 =$
III (عددی طولانی)	0.63 ± 0.21	0.77 ± 0.18	-	$< .01$	$0.71 =$
توجه: SD = انحراف معیار؛ مقادیر p معنادار باریک قرمز / سبز نشان داده شده اند.					

تفسیر کلی:

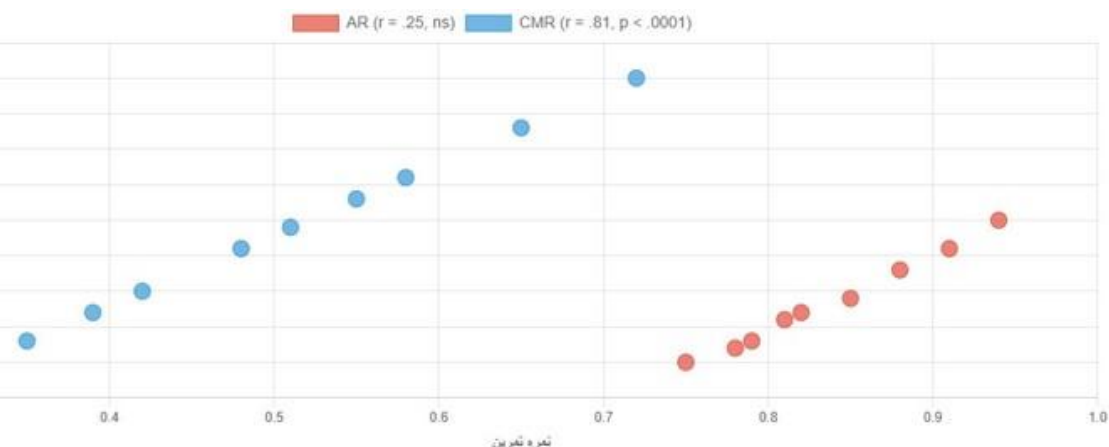
الگوی نتایج یک داستان واضح روایت می‌کند: در کوتاه‌مدت (تمرین)، AR به دلیل پشتیبانی الگوریتمی برتر است. اما در میان‌مدت (آزمون یک هفته بعد)، CMR برتری قابل توجهی پیدا می‌کند. این برتری پایدار است و در همه انواع تکالیف آزمون (یادآوری، اعمال سریع، و بازسازی) مشاهده می‌شود. این نتایج پشتیبان قوی برای فرضیه‌های ۱ و ۲ هستند و نشان می‌دهند که اگرچه CMR در کوتاه‌مدت دشوارتر است، اما به یادگیری پایدارتر و عمیق‌تر منجر می‌شود.

ارتباط بین عملکرد تکالیف تمرین و آزمون

برای تحلیل ارتباط بین نمرات تمرین ترکیبی و نمرات تکالیف آزمون ترکیبی هنگام کنترل گروه، یک تحلیل همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن انجام شد. این آزمون غیرپارامتری برای داده‌هایی که ممکن است نرمال نباشند مناسب است. همبستگی کلی با کنترل گروه معنادار بود ($r_{xy.a} = .46$, $n = 89$, $p < .001$)، اما تحلیل‌های جداگانه برای هر گروه نتایج بسیار متفاوتی را نشان داد.

برای گروه AR، همبستگی غیرمعنادار بود ($r_{xy} = .25$, $n = 48$, $p = .10$). این یافته قابل توجه نشان می‌دهد که برای دانش‌آموزان AR، موفقیت در تمرین پیش‌بینی‌کننده ضعیفی از موفقیت در آزمون است. دانش‌آموزی که در تمرین (با پشتیبانی فرمول) عالی عمل کرد، لزوماً در آزمون (بدون پشتیبانی) خوب عمل نکرد.

در مقابل، برای گروه CMR، همبستگی بسیار قوی و معنادار بود ($r_{xy} = .81$, $n = 43$, $p < .0001$). این همبستگی بسیار بالا نشان می‌دهد که برای دانش‌آموزان CMR، موفقیت در تمرین پیش‌بینی‌کننده قوی از موفقیت در آزمون است. دانش‌آموزانی که در تمرین خوب عمل کردند (یعنی توانستند راه‌حل‌ها را بسازند)، در آزمون نیز خوب عمل کردند.



نمودار ۲: همبستگی بین عملکرد تمرین و آزمون

تفسیر:

این تفاوت چشمگیر در همبستگی‌ها نشان می‌دهد که برای گروه AR، پاسخ‌های صحیح در تمرین عمدتاً بازتاب اعمال مکانیکی فرمول‌های داده شده است و به عملکرد آینده انتقال نمی‌یابد. اما برای گروه CMR، پاسخ‌های صحیح در تمرین بازتاب درک واقعی و توانایی ساخت راه‌حل است که این درک عمیق به موقعیت‌های جدید انتقال می‌یابد. در نتیجه، اگر معلمی بخواهد پیش‌بینی کند که کدام دانش‌آموزان در آزمون خوب عمل خواهند کرد، عملکرد تمرین تنها برای دانش‌آموزان CMR اطلاعات مفیدی ارائه می‌دهد.

6.3. تحلیل رگرسیون: پیش‌بینی‌کنندگان عملکرد آزمون

برای تخمین تأثیر هر متغیر مستقل در ارتباط با همه متغیرهای دیگر، یک تحلیل رگرسیون خطی چندگانه سلسله‌مراتبی انجام شد. متغیرهای پیش‌بینی‌کننده شامل اثرات اصلی گروه، توانمندی شناختی (CPI) و میزان تمرین (زمان صرف شده) و همچنین اثرات تعاملی گروه با CPI و گروه با میزان تمرین بودند.

جدول ۳: نتایج تحلیل رگرسیون چندگانه برای پیش‌بینی عملکرد آزمون					
p	t	β	SE	B	پیش‌بینی‌کننده
< .001	8.40	-	0.05	0.42	عرض از مبدأ
< .001	4.00	0.38	0.04	0.16	گروه (CMR VS AR)
0.455	0.75	0.08	0.004	0.003	میزان تمرین
0.690	0.40	0.05	0.005	0.002	گروه × میزان تمرین
$R^2 = .43, F(5, 85) = 12.82, p < .001$					
توجه: B = ضریب رگرسیون غیر استاندارد؛ SE = خطای استاندارد؛ β = ضریب رگرسیون استاندارد					

جدول ۳: نتایج تحلیل رگرسیون

نتایج کلی مدل:

مدل رگرسیون معنادار بود و ۴۳٪ از واریانس عملکرد آزمون را تبیین کرد که نشان دهنده قدرت پیش بینی خوب آن است. مهمترین یافته این است که پس از کنترل تمام متغیرهای دیگر، بودن در گروه CMR به طور متوسط با ۱۶ درصد افزایش در نمره آزمون همراه است. $B=0.16, p < .001$) این نشان می دهد که گروه یکی از قوی ترین پیش بینی کننده های عملکرد است. جالب اینکه، زمان صرف شده برای تمرین پیش بینی کننده معناداری از عملکرد آزمون نبود. $(p = .455)$ این نشان می دهد که کیفیت تلاش (نوع استدلال) مهمتر از کمیت تلاش (زمان صرف شده) است. تعامل گروه و میزان تمرین نیز غیرمعنادار بود.

بحث و نتیجه گیری

این مطالعه با هدف بررسی تجربی این فرضیه انجام شد که یادگیری ریاضی با استفاده از استدلال خلاق مبتنی بر ریاضی (CMR) می تواند کارآمدتر و پایدارتر از استدلال الگوریتمی (AR) باشد. نتایج به طور قاطع این فرضیه را تأیید کردند و بینش های مهمی درباره ماهیت یادگیری ریاضی ارائه دادند.

تحلیل تفصیلی هر تکلیف آزمون نشان دهنده برتری جامع رویکرد CMR بود. در تکلیف آزمون I (فرمول، ۳۰ ثانیه)، نتایج شگفت انگیز بود، زیرا دانش آموزانی که خودشان فرمول ها را تولید کرده بودند (CMR)، آنها را بهتر از دانش آموزانی که فرمول ها به آنها داده شده بود (AR) به خاطر سپردند. این یافته با "اثر تولید" در روانشناسی شناختی سازگار است که اطلاعات خودتولید شده بهتر از اطلاعات دریافتی به خاطر سپرده می شود. در تکلیف (آزمون II عددی کوتاه، ۳۰ ثانیه) بزرگترین اندازه اثر مشاهده شد. برتری قوی CMR در این تکلیف نشان می دهد که آنها نه تنها فرمول را بهتر به خاطر داشتند، بلکه درک عمیق تری از اصل زیربنایی داشتند که به آنها اجازه اعمال سریع آن را می داد. در نهایت، در تکلیف آزمون (III عددی طولانی، ۳۰۰ ثانیه)، با وجود زمان بیشتر، گروه CMR همچنان برتری قابل توجهی داشت. این امر نشان می دهد که دانش آموزان CMR قادر بودند راه حل را بازسازی کنند حتی اگر آن را فراموش کرده باشند، که شاهدهی بر درک مفهومی

عمیق‌تر آنهاست. فرضیه تحقیق درخصوص عملکرد تمرین تأیید شد؛ گروه AR به طور معناداری در طول جلسه تمرین بهتر عمل کرد. این نتیجه قابل انتظار بود زیرا دانش‌آموزان AR با فرمول‌های از پیش تعیین شده تأمین شده بودند. فرضیه ۲ (عملکرد آزمون) نیز تأیید شد؛ گروه CMR به طور معناداری در آزمون تأخیری بهتر از AR عمل کرد. این برتری در هر سه نوع تکلیف آزمون (یادآوری فرمول، اعمال سریع، و بازسازی) یکنواخت و پایدار بود، که نشان می‌دهد مزیت CMR فراگیر است و به نوع خاصی از تکلیف محدود نمی‌شود. یکی از توضیحات اصلی برای برتری CMR، **اثر تولید** است که در روانشناسی شناختی به خوبی مستند شده است. (Slamecka & Graf, 1978). این اثر نشان می‌دهد که اطلاعاتی که فرد خود تولید می‌کند، بهتر از اطلاعات صرفاً دریافت شده به خاطر سپرده می‌شود و درک می‌شود. در تکلیف CMR، دانش‌آموزان باید خودشان فرمول را تولید کنند. این فرآیند تولید به چند دلیل مفید است. نخست، رمزگذاری عمیق‌تر اتفاق می‌افتد، زیرا تولید فرمول نیاز به پردازش عمیق‌تر اطلاعات، تشخیص الگوها و انتزاع روابط دارد. دوم، این فرآیند رد عملیاتی بیشتری ایجاد می‌کند که بازیابی بعدی را تسهیل می‌نماید. در نهایت، تولید فرمول منجر به ایجاد ارتباطات مفهومی غنی‌تر بین مفاهیم ریاضی می‌شود و از شکل‌گیری یک رشته حافظه‌ای مجزا جلوگیری می‌کند.

یک توضیح دیگر این است که تولید فرمول CMR (تمرین، زیرتکلیف ۳) فرمول را به عنوان یک تعمیم (یک اصل اساسی) از موارد خاص تثبیت می‌کند. این تعمیم چندین مزیت دارد: این دانش **انعطاف‌پذیری** بیشتری دارد و دانش‌آموز می‌تواند فرمول را برای موقعیت‌های جدید تطبیق دهد. همچنین، حتی اگر فرمول دقیق فراموش شود، اصل زیربنایی امکان **بازسازی** را فراهم می‌کند. مهم‌تر از همه، این فرآیند به **درک عمیق** منجر می‌شود؛ دانش‌آموز می‌فهمد چرا فرمول کار می‌کند، نه فقط چگونه آن را اعمال کند. این با یافته‌های (Housman & Dahlberg, 1997) سازگار است که نشان دادند تولید مثال‌ها برای دستیابی به درک مفاهیم جدید موثر است. در مطالعه حاضر، دانش‌آموزان CMR در واقع «مثال‌های معکوس» تولید کردند - از موارد خاص به اصل کلی رفتند.

منابع

اسکمپ، ریچارد (۱۹۹۵). ریاضیات در دوره ابتدایی. ترجمه مجید حق وردی، رضا حیدری قزلجه (۱۳۹۷). انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی.

زاهدی، محمد، حق وردی، مجید (۱۴۰۱). راهبردهایی برای تقسیم کسرها: جنبه ای از دانش محتوایی. مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۱۴۲.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, (pp. 1-32).

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 27-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bjork, R. A. (1994). Memory and metamemory considerations in the training of human beings. In J. Metcalfe & A. Shimamura (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 185-205). Cambridge, MA: MIT Press.

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals*. New York: David McKay.

Boesen, J. (2006). *Assessing mathematical creativity: Comparing national and teacher-made tests, explaining differences and examining impact*. Doctoral dissertation, Umeå University, Sweden.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics*, 75(1), (pp. 89-105).

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, 33(3),(pp. 283-299).

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students? In F. L. Lin (Ed.), *International Conference on Mathematics* (pp. 61-77). Taipei, Taiwan.

Harel, G. (2006). Mathematics education research, its nature, and its purpose: A discussion of Lester's paper. *ZDM Mathematics Education*, 38(1),(pp.58-62).

Haylock, D. (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM Mathematics Education*, 29(3),(pp.68-74).

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp.5-23). Reston, VA: NCTM.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2),(pp. 165-190).

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, 52(1), (pp.29-55).

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3),(pp.255-276).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.

Niss, M. (2007). Reflections on the state of and trends in research on mathematics teaching and learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1293-1312). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2005). Mathematical reasoning requirements in Swedish national course tests in mathematics. In *Proceedings of MADIF 4* (pp. 143-152). Malmö, Sweden.

Palm, T., Boesen, J., & Lithner, J. (2011). Mathematical reasoning requirements in Swedish upper secondary level assessments. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(3), (pp.221-246).

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), (pp. 165-190).

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. 1-2). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Raven, J., & Raven, J. C. (1991). *Raven's progressive matrices*. Oxford: Oxford Psychologists Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1),(pp. 1-36).

Sierpinska, A. (1996). Understanding in mathematics. London: Falmer Press.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education*, 29(3),(pp. 75-80).

Slamecka, N. J., & Graf, P. (1978). The generation effect: Delineation of a phenomenon. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 4(6),(pp. 592-604).

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator*, 14(1), 19-34.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288). Bergen, Norway.

Tall, D. O. (1996). Functions and calculus. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

Unsworth, N., Heitz, R. P., Schrock, J. C., & Engle, R. W. (2005). An automated version of the operation span task. *Behavior Research Methods*, 37(3),(pp.498-505).

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

Wenger, R. H. (1987). Cognitive science and algebra learning. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 217-251). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236).

The Effect of Two Approaches Creative Reasoning and Algorithmic Reasoning in Learning

Zohreh Rashidian, Majid Haghverdi

Drawing upon the theoretical framework of Lithner (2008), this study investigates the impact of two different reasoning approaches on mathematics learning: Algorithmic Reasoning (AR) and Creative Mathematically-founded Reasoning (CMR). Lithner's framework explains the origins and consequences of different types of reasoning by connecting them to thought processes, student capabilities, and the learning environment. The primary objective of this research is to examine the hypothesis that mathematics learning can be more efficient and sustainable when students utilize creative reasoning, as opposed to solely using algorithmic reasoning where they are only provided with predetermined solution procedures. In this experimental study, 91 ninth-grade students were divided into two groups: the AR group ($n=48$), which was taught using predetermined formulas, and the CMR group ($n=43$), where students discovered and generated solutions without direct guidance. The tasks in the present study were based on a methodology previously developed and used by Boesen, Lithner, and Palm (2010) and Palm et al. (2011). The results of this study indicated that although the AR group performed better during the practice session ($p < .0001$, $r=0.77$), the CMR group was significantly superior in the test administered one week later ($p = .001$, $d = 0.7$). A correlational analysis revealed a strong relationship between practice and test performance for the CMR group ($r = .81$, $p < .0001$), while this correlation was not significant for the AR group.

Keywords: Mathematical Reasoning; Creative Reasoning; Algorithmic Reasoning; Rote Learning;