

قیمت گذاری قراردادهای اختیار معامله با معادله فوکر پلانک و لم ایتو

(مطالعه موردی: قراردادهای اختیار معامله سکه طلا در بورس کالای ایران)

امیر فراهانی^۱/محمود رحمانی^۲/فرهاد غفاری^۳/بهزاد پرویزی^۴

چکیده:

اوراق اختیار معامله یکی از ابزارهای نوین مالی و به عنوان ابزاری برای مدیریت ریسک و سودآوری در بازار سرمایه مطرح بوده و قیمت گذاری این اوراق با روش قیمت گذاری بلک شولز بسیار متداول است. از مهمترین مفروضات مدل بلک شولز، تبعیت تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت بروانی هندسی بوده که نمی تواند ویژگی های آماری سری زمانی را در تمام حالات بیان کند. هدف این پژوهش، ارائه مدل جدید قیمت گذاری اختیار معامله سکه طلا در بورس کالای ایران است و این مدل مبتنی بر مدل بلک شولز اصلی و زمانی است که تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت براونی کسری تبعیت می نماید. در این پژوهش با بکارگیری روش حل معادله دیفرانسیل فوکر پلانک و لم ایتو، برای قیمت گذاری اختیار معامله مدل جدید و متفاوت ارائه گردیده است. دقت بیشتر قیمت گذاری، تعمیم مدل بلک شولز کلاسیک و در نهایت اعمال محدودیت های کمتر، از مزیت های مدل جدید می باشد. جهت مقایسه کارایی مدل جدید با قیمت گذاری اختیار معامله خرید تحت مدل اصلی بلک شولز و قیمت های واقعی بازار، از اطلاعات یازده قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران از فروردین ۱۴۰۱ تا اسفندماه ۱۴۰۲ بصورت روزانه و از آزمون مقایسه ای دو گروه مستقل ناپارامتریک من ویتنی استفاده گردید. نتایج نشان داد؛ امکان ارائه ی مدلی جدید برای قیمت گذاری اختیار با بکارگیری معادله فوکر پلانک و لم ایتو امکان پذیر بوده و در سطح ۹۵٪ بر اساس معیار MAPE (میانگین درصد قدر مطلق خطا) تفاوت معناداری بین میانگین امتیازها در دو مدل وجود نداشته و این دو مدل کارایی یکسانی داشته اند.

واژگان کلیدی: اختیار معامله اروپایی، توان هرست، حرکت براونی کسری، روش فوکر پلانک، معادله قیمت گذاری بلک – شولز کسری.

۱- دانشجوی دکتری، گروه مالی، واحد سنندج، دانشگاه آزاد اسلامی، سنندج، ایران. farahani90@yahoo.com

۲- گروه مدیریت مالی، واحد سنندج، دانشگاه آزاد اسلامی، سنندج، ایران (نویسنده مسئول). mahmood80933@yahoo.com

۳- گروه اقتصاد، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. farhad.ghaffari@yahoo.com

۴- گروه حسابداری، واحد سنندج، دانشگاه آزاد اسلامی، سنندج، ایران. parvizibehzadaccounting@yahoo.com

مقدمه

فعالان بازار سرمایه به دلیل شرایط حاکم بر بازارها، نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار، همواره با ریسک‌های مواجه هستند که ممکن است آنها را در معرض زیان قرار دهد. راهکارها و ابزارهای مناسبی برای پوشش ریسک‌های ناشی از نوسان قیمت‌ها اتخاذ می‌شود، یکی از این ابزارهای اوراق مشتقه است و از ابزارهای مشتقه در بازارهای مالی، می‌توان به قراردادهای آتی^۱ و قراردادهای اختیار معامله^۲ اشاره کرد (امیری، ۱۳۹۹). قراردادهای اختیار معامله بر روی دارایی‌های مختلف مالی و کالا معامله می‌شود (بهرادمهر، ۱۴۰۱). به دلیل آنکه قراردادهای اختیار معامله سکه در ایران جزء ابزارهای نوین در بازار بورس کالا محسوب می‌شود، نحوه قیمت‌گذاری این قراردادها و بررسی فرصت آربیتراژ^۳ این بازار برای سرمایه‌گذاران مورد نیاز تلقی می‌شود (بهرادمهرو همکاران، ۱۴۰۱). یکی از متداول‌ترین مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملات، مدل قیمت‌گذاری بلک - شولز است، فیشر بلک^۴ و میرون شولز^۵ حرکت براونی هندسی را برای مدل سازی قیمت اوراق مشتقه، به عنوان معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر رفتار قیمت دارایی پایه در نظر گرفتند. تحقیقات نشان می‌دهند که بسیاری از سری‌های زمانی بازار مالی، دارای فرآیند حرکت براونی کسری^۶ با وابستگی و دامنه بلندمدت هستند و در تکامل مدل‌های مالی برای قیمت‌گذاری دارایی پایه، ارائه مدل‌های باحافظه اهمیت یافته است و یکی از مهم‌ترین فرآیندهای باحافظه، حرکت براونی کسری می‌باشد (صمیمی، ۱۴۰۰). در این پژوهش مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز تحت حرکت براونی کسری تعمیم و توسعه یافته است و معادله دیفرانسیل آن به کمک معادله فوکر پلانک و لم ایتو حل می‌گردد. مبنای این پژوهش تحلیلی و کاربردی است و در حوزه تحلیلی، ارائه معادله جدید قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله بررسی و در حوزه کاربردی امکان بکارگیری و قیمت‌گذاری اوراق با مدل جدید ارزیابی می‌شود. اهمیت این پژوهش، کاهش نواقص مدل قیمت‌گذاری بلک شولز و افزایش قابلیت آن با بکارگیری روش‌های جدید حل معادلات دیفرانسیل همانند روش معادله فوکر پلانک و لم ایتو است و همچنین نشان می‌دهیم که مدل بلک شولز کلاسیک حالت خاصی از مدل پیشنهادی بوده و بر اساس معیار MAPE (میانگین درصد قدر مطلق خطا) تفاوت معناداری بین میانگین امتیازها در دو مدل وجود نداشته و این دو مدل کارایی یکسانی داشته‌اند.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

مبانی نظری

قراردادهای اختیار معامله^۷ یکی از انواع اوراق مشتقه^۸ است، که به دو نوع اختیار خرید و اختیار فروش تقسیم می‌شود. دارنده اختیار خرید با پرداخت مبلغی این حق (نه الزام و تعهد) را برای خود می‌خرد که دارایی موضوع قرارداد را با مبلغی معین (قیمت اعمال)^۹ و در تاریخی مشخص یا قبل از آن بخرد. اختیار معامله می‌تواند آمریکایی یا اروپایی باشد، اختیار معامله آمریکایی در هر زمان از طول عمر قرارداد تا تاریخ انقضاء یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است، ولی اختیار معامله اروپایی تنها در تاریخ انقضای آن قابل اعمال است (جان هال، ۱۳۸۴، ص. ۳۰۴). به دلیل اهمیت اوراق اختیار معامله در پوشش ریسک و کسب بازدهی آربیتراژی^{۱۰}، طی چند دهه گذشته، تلاش‌های زیادی برای ارزش‌گذاری این اوراق صورت پذیرفته است (لطفی و همکاران، ۱۴۰۱). در اوایل دهه ۱۹۷۰، فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند و نتیجه کار آنها ارائه مدلی بود که تحت عنوان "مدل بلک شولز" معروف گشت و این مدل تاثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. اولین گام در راستای درک چگونگی قیمت‌گذاری اختیار معامله، داشتن درک درستی از فرآیند حرکت قیمت‌ها می‌باشد، در مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز فرض بر این می‌گردد که قیمت‌ها در هر دوره زمانی آتی دارای توزیع لگاریتم نرمال است (جان هال، ۱۳۹۷، ص. ۴۱۷). اگر چه این مدل هنوز هم در بازارهای مالی استفاده می‌شود ولی به آن انتقادهای زیادی وارد شده است. در واقع این انتقادهای به فرض‌های این مدل هست که در مدل بلک - شولز فرآیند تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت براونی هندسی و بصورت رابطه زیر :

$$\frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dz \quad \text{رابطه ۱}$$

تبعیت می‌کند که در آن پارامتر μ نرخ جابه جایی (جمله رانش) و پارامتر σ نوسان پذیری قیمت دارایی پایه است که ثابت در نظر گرفته شده‌اند (نیسی، ۱۳۹۷، ص. ۲۰۱). مدل قیمت‌گذاری بلک - شولز برای ارزش‌گذاری اختیار خرید به صورت رابطه زیر می‌باشد (جان هال، ۱۳۸۸، ص. ۳۸۰).

$$C = S_0 N(d_1) - E e^{-rT} N(d_2) \quad \text{رابطه ۲}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

در رابطه‌های بالا، $N(x)$ تابع توزیع احتمال تجمعی یک متغیر با توزیع نرمال استاندارد شده می باشد و متغیر C قیمت اختیار خرید اروپایی، S_0 قیمت جاری سهام، k قیمت اعمال، r نرخ بهره بدون ریسک، T مدت زمان باقی مانده تا زمان انقضاء و σ نوسان پذیری قیمت دارایی پایه را نشان می دهد. همانطور که مطرح می‌باشد حرکت براونی فاقد حافظه است و گذشته خود را فراموش می‌کند و نمی‌تواند وابستگی‌های بلندمدت در سری زمانی قیمت‌ها را به خوبی توصیف کند. برای حل این معضل، حرکت براونی کسری توسط هارست در سال ۱۹۵۶ معرفی شد و توسط مندلیبرات و وان نس در سال ۱۹۶۸ توسعه داده شد. این فرآیند به دلیل داشتن ویژگی‌های خاصی همچون حافظه بلند مدت که توسط نمای هرست^{۱۱} میزان آن اندازه گیری می‌شود در مدل سازی مالی، به ویژه در پیش‌بینی نوسانات بازارهای مالی و بررسی رفتار قیمت‌ها بسیار کاربرد دارد. وجود حافظه بلندمدت در بازده دارایی‌ها بیانگر وجود خود همبستگی^{۱۲} میان مشاهدات با فاصله زمانی زیاد است، بنابراین می توان از بازده های گذشته به منظور پیش بینی بازده آینده استفاده نمود و از آنجایی که حافظه بلند مدت شکل خاصی از دینامیک غیر خطی است، مدل سازی آن با استفاده از روش های خطی امکان پذیر نیست و توسعه استفاده از مدل های قیمت گذاری غیر خطی را ترغیب می‌کند.

در این پژوهش، فرض بر آن است که تغییرات قیمت از فرآیند حرکت براونی کسری تعمیم یافته پیروی می‌کند. اگر S_t قیمت دارایی پایه و فرآیند گوسی $Z_t^{H,a,b}$ یک حرکت براونی کسری تعمیم یافته^{۱۳} باشد، آنگاه معادله دیفرانسیل تغییرات قیمت به شکل زیر می‌باشد:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t Z_t^{H,a,b} \quad \text{رابطه ۳}$$

که از طریق حل معادله دیفرانسیل به روش لم ایتو و معادله فوکر پلانک، مدلی جدید با فرم بسته برای قیمت گذاری اختیارمعاملات ارائه می‌گردد که مدل بلک شولز کلاسیک یک حالت خاص از مدل ارائه شده می‌باشد و این مدل می‌تواند یکی از نواقص مترتب بر مدل اصلی بلک شولز را مرتفع سازد.

در نهایت قیمت‌های خروجی حاصل از مدل جدید با قیمت‌های مستخرج از مدل بلک شولز و قیمت‌های بازار مقایسه و کارایی مدل‌ها آزمون می‌شوند.

پیشینه پژوهش

مطالعات داخلی

رحمانی، جعفریان (۱۳۹۶)، در مقاله ای تحت عنوان بررسی مدل بلک شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه های معاملاتی پرداختند. در این مقاله جواب تقریبی قیمت گذاری مدل بلک شولز کسری با هزینه های معامله به وسیله روش تکرار تغییرات بررسی شده است و نتایج نشان می دهد که ارزش گذاری توسط مدل بلک - شولز کسری به نتایج واقعی قیمت اختیار خرید نزدیک تر است. ابوالی، خلیلی عراقی و همکاران (۱۴۰۰)، در مقاله ای با عنوان قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک روش نیکی وورو- اوواروف با بکارگیری روش جدید حل معادله دیفرانسیل نیکی وورو- اوواروف جهت ارائه مدل جدید قیمت گذاری اختیار معامله صورت پذیرفته است و نتایج نشان می دهد که این روش حل معادله در ۹۵٪ بین قیمت گذاری روش جدید و مدل بلک - شولز در اختیار معامله تفاوت معنی دار وجود ندارد. نصیری (۱۴۰۱)، در پژوهشی با عنوان تحلیل مقایسه ای کارایی مدل قیمت گذاری بلک شولز و درخت دوجمله ای در معاملات اختیار خرید بورس اوراق بهادار تهران بر مبنای مدل های رگرسیونی پرداختند و نتایج نشان می دهد تفاوت عملکرد مدل بلک شولز با درخت دوجمله ای اختلاف معنی دار ندارد. بهرام مهر، طهماسبی (۱۴۰۱)، در تحقیقی تحت عنوان قیمت گذاری قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران پرداختند و در این پژوهش از دو رویکرد مدل بلک شولز کلاسیک و معادله برابری خرید و فروش بعنوان روش های قیمت گذاری قراردادهای اختیار معامله استفاده شده است. نتایج از هر دو روش بلک شولز و برابری خرید و فروش نشان می دهد که فرصت های مناسب سرمایه گذاری را به خرید اختیار خرید توصیه می کند. نصیری، عسکرزاده (۱۴۰۲)، در مقاله ای تحت عنوان بررسی تجربی مدل قیمت گذاری بلک شولز در معاملات اختیار خرید بورس اوراق بهادار تهران پرداختند و مشخص شد که انحراف معنی داری بین قیمت بازار و قیمت گذاری مدل بلک شولز وجود دارد. پیمانی، امیری (۱۴۰۲)، در مقاله ای تحت عنوان ارزش گذاری اوراق بهادار اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته و نتایج پژوهش نشان می دهد که در ارزش گذاری اختیار معامله های کوتاه مدت، تفاوت چندانی میان مدل های ارزش گذاری اختیار معامله تحت نرخ سود تصادفی و مدل بلک، شولز و مرتون وجود ندارد. در حالیکه ارزش گذاری اختیار معامله های بلندمدت با استفاده از مدل های ارزش گذاری اختیار معامله تحت سود تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل بلک، شولز و مرتون داشته اند.

مطالعات خارجی

ماسیمیلیانو فرزا^{۱۴} (۲۰۰۹)، به بررسی مدل حرکت براونی و حرکت براونی کسری و مدل گارچ پرداخته شده است. در این تحقیق با تجزیه و تحلیل عملکرد ۶ شاخص بازار بین المللی نشان داده شد که روش حرکت براونی کسری بخصوص در بازارهای با نوسان زیاد موثرتر است. تاکایوکی موریموتو^{۱۵} (۲۰۱۵) با پژوهشی با عنوان انتخاب روش قیمت گذاری اروپایی با استفاده از حرکت براونی کسری و با نوسان واقعی توانست خصوصیات وابستگی مرتبه بالایی را در سری زمانی نشان دهد که بطور تجربی به این نتیجه رسید که معادله تفاضلی بلک شولز دارایی اصلی پیرو حرکت براونی با هرست $H \neq \frac{1}{2}$ به خوبی تعریف نمی شود به این علت که حرکت براونی کسری یک نیمه مارتینگال نیست. آرونا، راوی^{۱۶} (۲۰۱۶)، در مقاله ای با عنوان حل معادله قیمت گذاری کسری بلک شولز در بازار مالی پرداخته و در این تحقیق روش تبدیل دیفرانسیل کسری و روش تبدیل دیفرانسیل کسری اصلاح شده را برای حل معادله قیمت گذاری اختیار معامله اروپایی کسری زمان ارائه می کند. فال و نورو^{۱۷} (۲۰۱۹)، در تحقیقی تحت عنوان توصیف معادلات قیمت گذاری اختیار معامله بلک-شولز توسط مشتق کسری caputo تعمیم یافته پرداختند و در این پژوهش از راه حل های تحلیلی معادلات کسری بلک شولز از مشتق کسری caputo تعمیم یافته استفاده شده است. آراند^{۱۸} (۲۰۲۳)، در مقاله ای تحت عنوان مدل سازی قیمت تحت حرکت براونی کسری تعمیم یافته از این حرکت بعنوان فرآیند هدایت شده در مدل سازی نوسانات قیمت استفاده کرده است و با استفاده از معادله فوکر پلانک، ارزش تحلیلی را برای معیارهای ریسک و همچنین فرمول های قیمت گذاری قیمت اختیار خرید اروپایی برای مدل بلک شولز ارائه شده است. تامیرات دیوفرا^{۱۹} (۲۰۲۴)، در مقاله ای با عنوان قیمت گذاری اختیار معامله تحت حرکت براونی کسری و پوشش دلتای پویا، تاثیر حرکت براونی کسری را بر قیمت گذاری اختیار معامله و پوشش دهی پویا بررسی می کند. با تخمین قیمت اختیار با استفاده از حرکت براونی کسری، دقت پیش بینی قیمت ارزیابی شده و مزایای حرکت براونی کسری را در مدل های قیمت گذاری اختیار معامله بررسی می شود.

روش پژوهش

در این پژوهش، ما به ارائه مدلی جدید برای ارزش گذاری اختیار معامله هستیم. از منظر اجرا، این پژوهش ماهیتی بنیادی و کاربردی دارد. در بخش بنیادی، ارائه مدل متفاوت معادله بلک-شولز بررسی شده و در بخش کاربردی، بهره گیری از این مدل و مقایسه آن با مدل بلک-شولز و قیمت های واقعی اختیار معامله در بازار اختیار معامله سکه طلا ایران بررسی می گردد. جهت ارائه مدل کاراتر، ضمن بهره گیری از لم ایتو و معادله فوکر پلانک، مدل بلک شولز کلاسیک را با فرض اینکه تغییرات قیمت دارایی پایه از حرکت براونی کسری (یا توان هرست) تبعیت نمایند را حل و امکان استفاده از این روش جدید را فراهم می نمایم.

داده های پژوهش

جامعه آماری جهت اجرای مدل مطرح شده، از ۱۱ قرارداد اختیار خرید اروپایی سکه طلا در بورس کالای ایران برای دوره ۱۴۰۱/۱/۵ تا ۱۴۰۲/۱۲/۲۸ بصورت روزانه بر اساس فعال بودن قراردادهای اختیار معامله و تعداد روزهای معاملاتی بالاتر (حداقل ۳۰ روز معاملاتی) در نظر گرفته شده است. در این پژوهش داده های مربوط به قیمت روزانه سکه بهار آزادی (طرح قدیم) از شبکه اطلاع رسانی اتحادیه طلا، جواهر و سکه تهران و قیمت پایانی اختیار خرید سکه طلا و قیمت اعمال از سایت اطلاع رسانی بورس کالای ایران گردآوری شده است. همچنین برای محاسبه نوسان پذیری قیمت سکه طلا از نرم افزار Eviews10 و جهت محاسبه توان هرست و قیمت گذاری اختیار معامله سکه طلا به روش بلک شولز و مدل پیشنهادی از کد نویسی در نرم افزار متلب ۲۰۱۶ و انجام آزمون های آماری از نرم افزار spss استفاده شده است. جدول ۱ مشخصات نماد قراردادهای اختیار معامله سکه طلا ایران و در جدول ۲ قراردادهای اختیار خرید سکه طلا انتخاب شده در دوره مورد بررسی بیان شده است.

جدول ۱: مشخصات نماد قرارداد اختیار معامله سکه طلا

۱	دارایی پایه	سکه طلای تمام بهار آزادی (طرح امامی)
۲	نماد کالا	GCMYYCKGC نشان دهنده اختیار قرارداد خرید طلا، K نشان دهنده قیمت اعمال، MM علامت اختصاری ماه قرارداد، YY سال می باشد
۳	اندازه قرارداد	یک سکه
۴	واحد پولی قیمت	ریال
۵	نوع قرارداد	اروپایی

منبع: یافته های پژوهشگر

جدول ۲: قراردادهای اختیار معامله خرید سکه طلا

ردیف	قرارداد	قیمت اعمال	تاریخ سررسید	ردیف	قرارداد	قیمت اعمال	تاریخ سررسید
۱	GCOR02C30000	۳۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۲/۲/۱۷	۷	GCOR01C11000	۱۱۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۱/۰۲/۲۷
۲	GCOR02C32000	۳۲۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۲/۲/۱۷	۸	GCOR01C13000	۱۳۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۱/۰۲/۲۷
۳	GCAB02C28000	۲۸۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۲/۸/۲۱	۹	GCSH01C14000	۱۴۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۱/۰۶/۲۷
۴	GCAB02C29000	۲۹۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۲/۸/۲۱	۱۰	GCES01C19000	۱۹۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۱/۱۲/۱۳
۵	GCDY02C25000	۲۵۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۲/۱۰/۲۴	۱۱	GCES01C20000	۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۱/۱۲/۱۳
۶	GCDY02C23000	۲۳۰,۰۰۰,۰۰۰	۱۴۰۲/۱۰/۲۴				

منبع: یافته های پژوهشگر

و با توجه به مدل بلک شولز و مدل پیشنهادی، متغیرها و پارامترهای دو مدل بصورت زیر محاسبه و مدنظر می باشد:

نرخ بهره بدون ریسک (r): بازدهی مربوط به اوراق بهادار بدون ریسک را نرخ بهره بدون ریسک می نامند. در این پژوهش نرخ بهره متعلقه به حساب های سپرده ای بلند مدت در بانک های ایران طی دوره موردبررسی و معادل ۲۰٪ در نظر گرفته شده است.

قیمت اعمال (E): قیمتی است که در آینده، خرید و فروش کالای مورد نظر بر مبنای آن انجام می گیرد. این مبالغ در سر رسید و هنگام اعمال اختیار خرید یا فروش باید پرداخت شود. در این پژوهش مطابق جدول ۲ قیمت اعمال برای هر قرارداد اختیار خرید سکه طلا به تفکیک، ذکر شده است.

نوسان پذیری (σ): نوسان پذیری یک دارایی، معیاری برای اندازه گیری عدم اطمینان (ریسک) در مورد بازده های آن دارایی می باشد. به منظور بررسی نوسان قیمت سکه در بورس کالا از روش گارچ (واریانس ناهمسانی شرطی خود توضیحی تعمیم یافته)^{۲۰} استفاده و به عنوان یک متغیر در مدل بلک شولز و مدل پیشنهادی لحاظ می گردد. مدل $GARCH(p, q)$ که در آن p مرتبه σ^2 (واریانس) و q مرتبه ε^2 (خطا) را در این مدل نشان می دهد، بصورت زیر رابطه زیر می باشد:

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + \dots + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \quad \text{رابطه ۴}$$

که معمولاً $GARCH(1,1)$ کفایت می‌کند (سوری، ۱۴۰۰، ص. ۸۰۶). که عبارت است از :

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{رابطه ۵}$$

جهت انجام این روش، می‌بایست شرط مانایی و اثر آرچ در سری زمانی قیمت سکه طلا وجود داشته باشد. جهت بررسی مانایی سری زمانی قیمت سکه طلا از آزمون دیکی – فوکر استفاده شده است که به شرح جدول ۳ می‌باشد. مطابق با نتایج حاصله قیمت سکه طلا در سطح پایا نمی‌باشند و قدرمطلق آماره دیکی – فولر از قدرمطلق مقادیر بحرانی این آماره در سطح احتمال ۱٪، ۵٪ و حتی ۱۰٪ کوچکتر است. اما پس از یکبار تفاضل گیری این متغیر بصورت پایا درآمده است:

جدول ۳: نتایج مربوط به آزمون مانایی قیمت سکه طلا

سال	سطح صفر		یکبار تفاضل گیری		درجه انباشتگی
	Prob.	t-statistic	Prob.	t-Statistic	
۱۴۰۱	۰/۴۴۳۷	۰/۹۸۴۵	۸/۳۹۵۳	۰/۰۰۰	I(1)
۱۴۰۲	۰/۶۴۴۱	۰/۸۵۷۲	۱۸/۰۶۳	۰/۰۰۰	I(1)

با توجه به مقادیر prob، سری زمانی قیمت سکه طلا در سال های مورد بررسی در سطح یک مانا بوده و $I(1)$ است. در جدول ۴ با توجه به مقدار ($\text{prob} = ۰/۰۰۴۹ < ۰/۰۵$ و $\text{prob} = ۰/۰۰۱۱ < ۰/۰۵$) فرض صفر آماره F رد می‌شود و اثر آرچ در سری زمانی قیمت سکه طلا در سال های مورد بررسی وجود دارد.

جدول ۴: آزمون اثر آرچ در قیمت سکه طلا

سال ۱۴۰۱			
F-statistic	۸/۰۳۰۶۹	Prob. F(1,327)	۰/۰۰۴۹
Obs*R-squared	۷/۸۸۶۱۳۴	Prob. Chi-Square(1)	۰/۰۰۵
سال ۱۴۰۲			
F-statistic	۱۰/۹۰۶۶۸	Prob. F(1,300)	۰/۰۰۱۱
Obs*R-squared	۱۰/۵۹۴۲۳	Prob. Chi-Square(1)	۰/۰۰۱۱

نتایج تخمین مدل گارچ برای قیمت سکه طلا در بازار نقدی ایران در دوره مورد بررسی، در پیوست شماره ۱ ارائه شده است. لذا مدل گارچ برای قیمت سکه طلا برای سال های ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲، به شرح روابط زیر می باشد:

$$\sigma^2 = 2.62E + 12 + 0.428\varepsilon_{t-1}^2 + 0.7066\sigma_{t-1}^2 \quad \text{رابطه ۶}$$

$$\sigma^2 = 2.59E + 12 + 0.3900\varepsilon_{t-1}^2 + 0.5881\sigma_{t-1}^2 \quad \text{رابطه ۷}$$

زمان باقی مانده تا سررسید (t): قیمت گذاری اختیار معامله سکه طلا، روزانه می باشد و تعداد روزهای کاری متناسب با روزهای معاملاتی در طول یک سال در نظر گرفته شده و زمان تا سررسید (t) برابر با روزهای باقی مانده تا سررسید تقسیم بر تعداد روزهای معاملاتی است (بهرادمهر و همکاران ۱۴۰۱، درخشان، ۱۳۹۰، ص. ۴۷۲).

توان هرست (H): توان هرست یا شاخص خود تشابهی که به عنوان شاخص حافظه بلند مدت در روند قیمت دارایی های مالی مورد استفاده قرار می گیرد. در این پژوهش محاسبه توان هرست از روش تحلیل نوسانات روندزایی شده (DFA) استفاده شده است. پنگ و دیگران (۱۹۹۵)^{۲۱} روش DFA را طرح کرده و مزیت آن نسبت به روش های دیگر در این است که به کمک آن می توان همبستگی های بلند مدت را حتی در سری های که به ظاهر غیر پایا هستند، نیز جستجو کرد. (تائنگ، ۲۰۰۶)^{۲۲}. در این پژوهش توان هرست سری زمانی قیمت سکه طلا ۰/۸۷۲۲ برآورد شده است. (محاسبه مراحل اجرای DFA در پیوست ۲ ارائه شده است).

فرضیه پژوهش

فرضیه های اصلی پژوهش در قالب سوال مطرح می شود: "آیا مدل قیمت گذاری بلک شولز تحت حرکت براونی کسری با روش حل معادله فوکر پلانک و لم ایتو دارای فرم بسته و صریح است یا خیر؟" و سوال دوم: "آیا از منظر آماری تفاوت میان کارایی و عملکرد مدل بلک شولز اصلی و مدل جدید معنی دار هست یا خیر؟"

تجزیه و تحلیل داده ها و نتایج

آمار توصیفی

در جدول ۵ و ۶ به آمار توصیفی قیمت سکه طلا و ارزش اختیار خرید آن شامل میانگین، میانه، انحراف معیار، چولگی و کشیدگی در بازه زمانی مورد بررسی می پردازیم:

جدول ۶: آمار توصیفی ارزش اختیار خرید سکه طلا

قیمت اختیار معاملات سکه طلا	
میانگین	۲۶,۷۹۱,۸۶۷ ریال
میانه	۲۰,۳۵۴,۶۰۸ ریال
بیشینه	۱۰۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال
کمینه	۲,۰۱۰,۲۰۰ ریال
انحراف معیار	۱۸,۶۸۶,۴۸۰ ریال
چولگی	۱/۲۴۸۳۴
کشیدگی	۴/۴۳۰۴۰
تعداد مشاهدات	۲۴۵

جدول ۵: آمار توصیفی قیمت سکه طلا

قیمت سکه طلا	
میانگین	۲۳۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال
میانه	۲۷۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال
بیشینه	۳۳۸,۰۰۰,۰۰۰ ریال
کمینه	۱۲۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال
انحراف معیار	۷۴,۶۹۴,۴۶۶
چولگی	-۰/۰۹۸
کشیدگی	۱/۴۱
تعداد مشاهدات	۶۰۳

منبع: یافته های پژوهشگر

با توجه به جدول ۵ و ۶ میانگین قیمت سکه طلا در دوره مورد بررسی، ۲۳۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال و بالاترین قیمت ثبت شده در این دوره ۳۳۸,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. چولگی منفی در سری زمانی سکه طلا در این دوره، نشان دهنده این است که تعداد زیادی از داده ها کمتر از میانگین هستند و این داده ها به سمت مقادیر پایین تر کشیده می شوند. میانگین قیمت اختیار معامله سکه طلا که در بازار معامله شده است ۲۶,۷۹۱,۸۶۷ ریال بوده است و بالاترین قیمت اختیار معامله ۱۰۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال ثبت شده است. مقدار کشیدگی قیمت اختیار معاملات سکه در این دوره ۴/۴۳۰ بوده است و به این معنی است که توزیع داده ها دارای کشیدگی بلند^{۲۳} است و داده های زیادی در نزدیکی میانگین قرار دارند. در واقع کشیدگی بالا نشان دهنده وجود نوسانات شدیدتر است. (کشیدگی بیشتر از ۳ نشان دهنده ریسک بالاتر در داده های سری زمانی است).

سیر ارائه مطالب در این قسمت، شامل چگونگی اثبات و ارائه مدل جدید بلک شولز و فرم صریح و جدید از مدل قیمت گذاری اختیار معامله خواهد بود. در این پژوهش بر اساس مطالعات و پژوهش مدل پیشنهادی آرندا (۲۰۲۱)، مدل کلاسیک بلک شولز تحت حرکت براونی کسری مورد بررسی قرار گرفته است. در مدل بلک شولز کلاسیک فرض بر آن است که تغییرات قیمت دارایی پایه از یک حرکت براونی

هندسی پیروی می کند که در این پژوهش با نقض این فرض، دینامیک و تغییرات قیمت دارایی پایه از یک حرکت براونی کسری پیروی می کند.

فرض کنید $(a, b) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ و $H \in (0, 1)$ باشد و همچنین B_t^H یک حرکت براونی کسری (fBm) و $\forall t \in \mathbb{R}_+$ باشد. فرآیند گوسی $Z_t^{H,a,b}$ یک حرکت براونی کسری تعمیم یافته $(gfBm)$ و بصورت زیر تعریف می شود:

$$Z_t^{H,a,b} = aB_t^H + bB_{-t}^H \quad \text{رابطه ۸}$$

اگر S_t قیمت دارایی پایه تحت مدل بلک شولز که از یک حرکت $(gfBm)$ پیروی کند آنگاه معادله دیفرانسیل آن به شکل زیر می باشد:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t Z_t^{H,a,b} \quad \text{رابطه ۹}$$

با تعریف متغیر $x = \ln S - rt$ و با استفاده از لم ایتو، فرآیند جدید x از یک SDE (معادله تفاضلی تصادفی) زیر پیروی می کند:

$$dx = -\sigma^2 H[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H-1}dt + \sigma dZ_t^{H,a,b} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

تابع چگالی احتمال انتشار مرتبط با فرآیند رابطه ۱۰ خواهیم داشت:

$$P\left(x, \frac{t}{x_0}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H}}} * \exp\left[-\frac{(x - x_0 + \frac{1}{2}\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H})^2}{2\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]t^{2H}}\right] \quad \text{رابطه ۱۱}$$

اثبات: با در نظر گرفتن لم ایتو تابع چگالی انتشار از یک فرآیند PDE (معادله تفاضلی جزئی) پیروی می کند:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sigma^2 H t^{2H-1} [(a+b)^2 - 2^{2H}ab] \left(\frac{\sigma^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad \text{رابطه ۱۲}$$

با شرط اولیه $P(x, 0) = \delta(x - x_0)$ و x_0 (ارزش x در زمان شروع) و با جایگزینی زمان خواهیم داشت:

$$\tau = \sigma^2 [(a+b)^2 - 2^{2H}ab] t^{2H} \quad \text{رابطه ۱۳}$$

رابطه ۱۲ به معادله انتشار زمان همگن تبدیل می گردد.

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$$

با فرض $w = x + \frac{\tau}{2}$ ما بدست می آوریم

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial w^2} \quad \text{رابطه ۱۴}$$

رابطه ۱۴ با معادله انتشار استاندارد با ضرایب انتشار ثابت و راه حل بنیادی زیر مطابقت دارد :

$$P(w, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left[-\frac{(w-x_0)^2}{2\sigma^2\tau}\right] \quad \text{رابطه ۱۵}$$

بعد از جایگزینی w و τ بجای X و t ، ما در نهایت بیان مورد نظر را بدست می آوریم.

در نتیجه برای رابطه ۹ و زمان T ، معادله چگالی احتمال انتشار بصورت زیر حاصل می گردد:

$$P(S_T, T|S_0, 0) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}} \times \exp\left[-\frac{(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H})^2}{2\sigma^2[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}\right] \quad \text{رابطه ۱۶}$$

تحت مدل بلک - شولز کسری تعمیم یافته، ارزش خرید اختیار معامله اروپایی، با قیمت اعمال ثابت E و زمان تا رسید T ، خواهیم داشت :

$$C_{a,b,H}^{BS} = S_0 N(d_1^{a,b,H}) - E e^{-rT} N(d_2^{a,b,H}) \quad \text{رابطه ۱۷}$$

و $N(0)$ تابع تجمعی نرمال استاندارد و

$$d_1^{a,b,H} = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{E}\right) + rT + \frac{1}{2}[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]\sigma^2 T^{2H}}{\sigma \sqrt{[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}} \quad \text{رابطه ۱۸}$$

$$d_2^{a,b,H} = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{E}\right) + rT - \frac{1}{2}[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]\sigma^2 T^{2H}}{\sigma \sqrt{[(a+b)^2 - 2^{2H}ab]T^{2H}}} \quad \text{رابطه ۱۹}$$

که برای $(a, b) = (1, 0)$ ما به فرمول بلک شولز کسری می‌رسیم :

اثبات: مستقیماً از روابط ۱۸ و ۱۹ دریافت می‌کنیم:

$$d_1^{1,0,H} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}}{\sigma\sqrt{T^{2H}}} = d_1^H \quad \text{رابطه ۲۰}$$

$$d_2^{1,0,H} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{E}\right) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H}}{\sigma\sqrt{T^{2H}}} = d_2^H \quad \text{رابطه ۲۱}$$

در نتیجه، ما داریم:

$$C_{1,0,H}^{BS} = S_0 N(d_1^H) - E e^{-rT} N(d_2^H) = C_H^{BS} \quad \text{رابطه ۲۲}$$

که با فرمول BS کسری ارائه شده توسط نیکولا مطابقت دارد. در نتیجه ما به فرمی صریح و جدید از مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله دست یافتیم و فرضیه اول این پژوهش مورد تایید قرار می‌گیرد و همچنین با فرض $H = \frac{1}{2}$ و قرار دادن در روابط ۲۰ تا ۲۲، مدل جدید همان مدل بلک شولز اصلی تبدیل می‌گردد و مدل بلک شولز اصلی حالت خاصی از مدل جدید می‌باشد.

برای بررسی فرضیه دوم این پژوهش، آیا از منظر آماری تفاوت معنی داری میان کارایی مدل بلک شولز و مدل پیشنهادی وجود دارد یا خیر؟ برای بررسی این فرضیه از قدر مطلق درصد انحرافات (APE) ۲۴ استفاده شده است که بصورت معادله زیر تعریف می‌شود (نصیری، عسکرزاده، ۱۴۰۲).

$$APE = \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad \text{رابطه ۲۳}$$

که در آن، n تعداد قیمت‌های بازار، $\hat{y}_i$ قیمت اختیار معامله برآوردی، y_i قیمت اختیار بازار می‌باشد. MAPE اغلب برای اندازه‌گیری صحت یک مدل پیش‌گو مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول ۷: آمار توصیفی قدرمطلق درصد انحرافات

متغیر	گروه	تعداد	میانگین	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی
APE	مدل بلک شولز	۱۵۸	۰/۳۷۷	۰/۸۲۱	۶/۱۵۲	۴۵/۰۵۷
	مدل پیشنهادی	۱۵۸	۰/۲۴۶	۰/۵۹۹	۷/۹۱۹	۶۵/۷۲۳

با توجه به جدول ۷، میانگین قدر مطلق درصد انحرافات و انحراف معیار آن در مدل جدید نسبت به مدل بلک شولز اصلی کمتر می باشد.

جهت بررسی فرضیه، ابتدا آزمون نرمال بودن (کولموگروف اسمیرنوف) متغیر را برای هر دو مدل انجام و به شرح جدول شماره ۸ ارائه می گردد.

جدول ۸: آزمون نرمال بودن

APE	Kolmogorov-Smirnov ^a			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
مدل بلک شولز	۰/۳۲۳	۱۵۸	۰/۰۰۰	۰/۳۹۶	۱۵۸	۰/۰۰۰
مدل پیشنهادی	۰/۳۴۲	۱۵۸	۰/۰۰۰	۰/۲۵۴	۱۵۸	۰/۰۰۰

a. Lilliefors Significance Correction

با توجه به مقدار ($\text{sig}=0/00<0/05$) نشان دهنده نرمال نبودن متغیر (APE) در هر دو مدل ارزش گذاری می باشد. با توجه به عدم پذیرش فرض نرمال بودن دو گروه مورد بررسی، آزمون ناپارامتریک من ویتنی جهت مقایسه میانگین دو گروه انتخاب گردید و قبل از انجام این آزمون می بایست آزمون برابری واریانس های دو گروه ارزیابی گردد. آزمون برابری واریانس دو گروه به شرح جدول ۹ ارائه شده است:

جدول ۹: آزمون برابری واریانس

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	۱/۳۶۲	۱	۱/۳۶۲	۲/۶۳۳	۰/۱۰۶
Within Groups	۱۶۲/۳۶۰	۳۱۴	۰/۵۱۷		
Total	۱۶۳/۷۲۲	۳۱۵			

با توجه به ($\text{sig}=0/106>0/05$) فرض برابری واریانس دو گروه در سطح ۰/۰۵ مورد پذیرش قرار می گیرد. بنابراین نتایج مقایسه میانگین دو گروه با آزمون من ویتنی به شرح جدول ۱۰ ارائه می گردد:

جدول ۱۰: آزمون مقایسه میانگین دو گروه مستقل

Independent-Samples Mann-Whitney U Test Summary	
Total N	۳۱۶
Mann-Whitney U	۱۲۳۶۶
Wilcoxon W	۲۴۹۲۷
Test Statistic	۱۲۳۶۶
Standard Error	۸۱۲/۰۷
Standardized Test Statistic	-۰/۱۴۳
Asymptotic Sig.(2-sided test)	۰/۸۸۶

با توجه به ($\text{sig} = ۰/۸۸۶ > ۰/۰۵$) در سطح اطمینان ۹۵٪ فرضیه پژوهش که مبتنی بر عدم وجود اختلاف معنادار کارایی مدل اصلی بلک شولز و مدل پیشنهادی و تعمیم یافته، **مورد تایید قرار می‌گیرد**. عدم معنادار بودن خروجی‌های حاصله به معنی تشابه دو مدل نیست. بلکه ما نشان دادیم که معادله‌ی جدید ضمن اثبات با روشی نوآورانه، تفاوت از لحاظ متغیرهای موثر بر آن و در نهایت شکل نهایی متفاوت با معادله بلک شولز، از لحاظ خروجی با معادله‌ی اصلی بلک شولز نزدیک است. ارائه معادله‌ای متفاوت با معادله بلک شولز و حصول نتایج (قیمت گذاری) نزدیک اما دقیق تر و با لحاظ محدودیت تعداد نمونه‌ی استفاده شده و در سطح اطمینان ۹۵٪، مزیت استفاده از روش جدید می باشد.

نتیجه گیری و پیشنهاد ها :

در سال‌های اخیر با افزایش حجم معاملات در حوزه مشتقات مالی بالاخص قرارداد های اختیار معامله، قیمت‌گذاری دقیق این اوراق از اهمیت بالایی نزد تحلیل گران و فعالان بازار سرمایه برخوردار شده است. مهمترین روش‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله عبارت است از: روش‌های تحلیلی (معادله دیفرانسیل جزئی بلک – شولز)، روش شبیه سازی مونت کارلو، روش های شبکه‌ای (مدل دو جمله ای) و روش تفاضلات منتهای می‌باشد. از دیگر سو طی مدت فعالیت بورس کالای ایران، علاوه بر دارایی های مالی، از آذرماه ۱۳۹۵ معامله روی قرارداد های اختیار معامله سکه طلا نیز اجرا شد. از آنجا که قرارداد اختیار معامله یکی از ابزارهای مدیریت ریسک می‌باشد، می‌تواند نقش بسزایی در پوشش ریسک ناشی از نوسانات قیمتی سکه طلا در بورس کالای ایران ایفا کند. هدف این پژوهش، ارائه مدل جدید برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است. نتیجه‌ی حاصله موید آن است که با حل معادله دیفرانسیل تصادفی تغییرات قیمت دارایی پایه در مدل بلک شولز تحت حرکت براونی کسری به روش فوکر پلانک

و لم ایتو تعمیم یافته، به فرمی صریح و جدید از معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار دست یافتیم که در واقع مدل اصلی بلک شولز یکی از حالت‌های خاص مدل بهبود یافته پیشنهادی می‌باشد. برتری استفاده از مدل پیشنهادی نسبت به مدل اصلی، تغییر رفتار قیمت‌دارایی پایه از حرکت براونی هندسی به حرکت براونی کسری (وجود توان هرست)، بهره‌گیری از روشی جدید و متفاوت برای اثبات معادله بلک شولز، دقت بیشتر در قیمت‌گذاری و اعمال محدودیت کمتر می‌باشد که با مطالعات آرندا (۲۰۲۳)، تامیرات دیوفرا (۲۰۲۴)، ابوالی، خلیلی (۱۴۰۰) و رحمانی، جعفریان (۱۳۹۶) مطابقت داشته است و همچنین کارایی و تفاوت مدل مشهور و پرکاربرد در بازارهای جهانی یعنی مدل بلک شولز و مدل جدید با داده‌های واقعی در بورس کالای ایران مورد بررسی قرار گرفت و بر اساس مشاهدات تفاوت معناداری بین دو مدل وجود نداشت که این با مطالعات ابوالی، خلیلی (۱۴۰۰) و نصیری، عسکرزاده (۱۴۰۱) مطابقت داشته است. بدیهی است مقایسه میزان کارایی و تفاوت این دو مدل لزوماً هیچ ارتباطی با توانایی کسب سود با استفاده از این مدل‌ها ندارد و صرفاً می‌تواند در تصمیم‌گیری‌ها و نوع ارزیابی توسط معامله‌گران این بازار اثر گذار باشد و دید شفاف‌تری نسبت به اتکا به این مدل‌ها مبنی بر رفع مفروضات مدل بلک شولز ارائه دهد.

در زیر پیشنهاداتی برای پژوهشگران آینده در این زمینه ارائه شده است :

۱) در مدل‌های تحت حرکت براونی کسری یکی از مهمترین موضوعات تخمین پارامترهای مدل از جمله توان هرست و نوسان پذیری دارایی پایه می‌باشد که می‌توان پارامتر توان هرست را با استفاده شبکه‌های عصبی و روش‌های اقتصادی سنجی نیز پیاده‌سازی نمود. همچنین با استفاده از روش‌های رگرسیونی نیز می‌توان کارایی بین این مدل‌ها را آزمون و بررسی نمود..

۲) در این پژوهش، یکی از محدودیت‌های مدل بلک شولز، حرکت براونی هندسی، را نقص کردیم تا به مدلی انعطاف پذیر و نزدیک به قیمت‌های بازار برسیم. لذا در راستای کنترل ریسک، توسعه و بهبود ابزارهای نوین مالی، سازمان بورس اوراق بهادار تهران می‌تواند از مدل و روش‌های ارائه شده برای محاسبه دقیق تر ارزش‌گذاری قراردادهای اختیار معامله در بازارهای مالی ایران استفاده نماید.

منابع

- ۱) ابوالی مهدی، خلیلی عراقی، مریم و همکاران. (۱۴۰۰). قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک روش نیکی وورو- اوواروف، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۱۴.
- ۲) امیری، مهدیه. (۱۳۹۹). قیمت گذاری قراردادهای اختیار معامله با روش بلک شولز، بونس و دوجمله ای، فصلنامه بورس اوراق بهادار، شماره ۵۰.

- ۳) بهرام مهر، نفیسه؛ طهماسبی، نرگس. (۱۴۰۱). قیمت گذاری قرارداد اختیار معامله سکه طلا در بازار بورس کالای ایران، فصلنامه اقتصاد مالی، شماره ۳.
- ۴) بلفکه، علی؛ موسوی، سید نوراله. (۲۰۲۱). روش های عددی قیمت گذاری اختیار تحت مدل هستون، کنفرانس بین المللی مدیریت - حسابداری و توسعه اقتصادی.
- ۵) پیمانی، مسلم؛ امیری، میثم. (۱۴۰۲). ارزش گذاری اوراق بهادار اختیار معامله با نرخ سود تصادفی در بورس اوراق بهادار تهران، نشریه چشم انداز مدیریت مالی، شماره ۴۱.
- ۶) رحمانی، مرتضی؛ جعفریان، ناهید. (۱۳۹۶). بررسی مدل بلک شولز کسری با توان هرست روی اختیار معامله اروپایی با هزینه های معاملاتی، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۳۲.
- ۷) رضایی، مریم؛ یزدانیان، احمد رضا. (۱۳۹۸). جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی با پارامترهای وابسته به زمان تحت مدل CEV، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۳۹.
- ۸) سوری، علی. (۱۳۴۴). "اقتصاد سنجی"، ۱۴۰۰، تهران، نورعلم.
- ۹) لطفی، فروغ؛ نشتائی، رضا. (۱۴۰۱). مقایسه کالیبراسیون مدل های قیمت گذاری اوراق اختیار خرید مبتنی بر نوسانات تصادفی و تکنیک انتگرال تعمیم یافته، فصلنامه علمی مدل سازی اقتصادی، شماره ۵۹.
- ۱۰) نبوی، سید علی؛ بهرام زاده، راضیه. (۱۳۹۷). بررسی کارایی فرآیند لوی در قیمت گذاری اختیار معاملات، فصلنامه علمی پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار، شماره ۳۸.
- ۱۱) نصیری، کورش؛ عسکرزاده، غلامرضا. (۱۴۰۲). بررسی تجربی مدل قیمت گذاری بلک شولز در معاملات خرید بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه اقتصاد مالی، دوره ۱۷، شماره ۴.
- ۱۲) نصیری، کورش؛ عسکرزاده، غلامرضا. (۱۴۰۱). تحلیل مقایسه ای کارایی مدل بلک شولز و درخت دوجمله ای در معاملات اختیار خرید بورس اوراق بهادار تهران، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۵۴.
- ۱۳) نیسی، عبدالساده؛ سلمانی، کامران. (۱۳۴۷). "مهندسی مالی و مدل سازی بازارهای با رویکرد نرم افزار matlab"، ۱۳۹۶، تهران، دانشگاه علامه طباطبائی.
- ۱۴) هال، جان. (۱۹۴۶). "مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک"، سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران، انتشارات بورس، (۲۰۰۲).

15) A. HNzoken. (2023). Europea option princing under generalized tempered stable process: Empirical Anaysis. *arxiv12042*, 1, 110-127.

16) Axel A. Araned. (2021). Price modelling under generalized fractional Brownian motion, *arxiv12042*, 1, 220-227.

- 17)Aliou Niang Fall, Seydou Nourou Ndiaye , Ndolane Sene.(2019).Black–Scholes option pricing equations described by the Caputo generalized fractional derivative.*Chaos, Solitons and Fractals*,125,108-118.
- 18)C.Necula.(2002).Option pricing in a fractional Brownian motion environment, *Working paper,Bucharest*,24-34.
- 19)D.Ahmadian and L.V.Ballestra.(2020).Pricing geometric Asian rainbow options under the mixed fractional Brownian motion. *Physica A:Statistical Mechanics and its Applications*,555,120-135.
- 20)Marjan Uddin and Muhammad Taufiq.(2019).Approximation of time fractional Black - Scholes equation via radial kernels and transformation. *fractional differential calculus*,9(1),75-90.
- 21)M.Zili.(2017).Generalized fractional Brownian motion .*Modern Stochastics. Theory and Applications*,4(1),15-24.
- 22)S.m.nuugulu,f.gideon.(2021).A robust numerical solution to a time-fractional Black–Scholes partial differential equation describing stock exchange dynamics.*chaos,Soliton&Fractals*.145,50-70.
- 23)Sunil Kumar,Devendra Kumar,Jagdev Singh.(2014).Numerical computation of fractional Blacke Scholes equation arising in financial market.*Egyptian journal of basic and appliedsciences*,1(3-4),177-183.
- 24)Takayuki Morimoto.(2015).European Option Pricing under Fractional Brownian motion with an Application to Realized.Volatility.*FORMA*,31(2),29-40.
- 25)TangTa-lun.(2005).long memory in stock index futures markets:Avalue-at-risk approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 366, 437-488.
- 26)V.Giorno,A.G.Nobile.(2021).Time-Inhomogeneous Feller type diffusion process in population dynamics. *Mathematics* ,7(9).
- 27)zang,H, liu,F,Turner, I,Yang,Q.(2016). Namerical solution of the time fractional black- schools model governing European option.*computers & mathematics with application*,71(9),1772-1783.

یادداشت ها :

1.Futures Contract

2.Options Contract

۳- در این پژوهش منظور از فرصت آربیتراژی بهره گرفتن از تفاوت های ارزش قراردادهای اختیار معامله می باشد.

4.Fisher Black

5.Myron schools

6.Fractional Brownian Motion

7.Option Contract

8.Derivatives

9.Exercise Price(Strike price)

10.Arbitrageu

11.Hurst exponent

12.Autocorrelation

13.Generalized Fractional Brownian motion

14. Massimiliano Ferza

15.Takayuki Morimoto

16.Aruna,Ravi

17.Fall,Ndiaya

18.Axel A. Araneda

19.Tamirat Temesgen Dufera

20- Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity(GARCH)

21-Peng

22-Tang

23-Lepotokutic

24- Mean Absolute Percentage Error

Options Pricing Model With Fokker-Planck Equation and Ito's lemma (Case Study: Gold Coin Options Contracts on the Iranian Commodity Exchange)

Amir Farahani¹

Mahmood Rahmani²

Farhad Ghaffari³

Behzad Parvizi⁴

Abstract:

Options are one of the new financial instruments and a tool for risk management and profitability in the capital market, and pricing these instruments with the Black-Scholes pricing method is very common. One of the most important assumptions of the Black-Scholes model is that the price changes of the underlying asset follow geometric Brownian motion, which cannot express the statistical characteristics of the time series in all cases. The aim of this research is to present a new model for pricing gold coin options on the Iranian Commodity Exchange, and this model is based on the original Black-Scholes model and when the price changes of the underlying asset follow fractional Brownian motion. In this research, a new and different model has been presented for pricing options by using the Fokker-Planck and Lemma-Itou differential equation solution method. Greater pricing accuracy, generalization of the classic Black-Scholes model, and ultimately the application of fewer restrictions are among the advantages of the new model. To compare the efficiency of the new model with the pricing of call options under the original Black-Scholes model and actual market prices, data from eleven gold coin options contracts in the Iranian Commodity Exchange from Farvardin 1401 to Esfand 1402 were used daily and a non-parametric Mann-Whitney two-group comparative test was used. The results showed that it was possible to provide a new model for option pricing by using the Fokker-Planck and Lam-Ito equations, and at the 95% level based on the MAPE criterion (mean absolute percentage error), there was no significant difference between the average scores in the two models, and these two models had the same efficiency.

Keywords: European option, Hurst power, fractional Brownian motion, Fokker-Planck method, Black-Scholes fractional pricing equation.

1-PhD student, Department of Finance, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, sanandaj, Iran. farahani90@yahoo.com

2-Financial management group, Sanandaj branch, Islamic Azad University, Sanandaj, Iran (corresponding Author). mahmood80933@yahoo.com

3-Department of Economics, Science and Research Unit, Islamic Azad University, Tehran, Iran farhad.ghaffari@yahoo.com

4-Accounting department, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, Sanandaj, Iran. parvizibehzadaccounting@yahoo.com