

رهیافتی نو برای حل معادلات انتگرالی فردهولم و ولترا

غلامرضا محمددادی^{۱*}

چکیده

در سالهای اخیر، معادلات انتگرالی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. این معادلات، در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده می شوند. یک نوع خاص از معادلات انتگرالی، معادلات انتگرالی ولترا است که در جمعیت شناسی به عنوان معادله انتگرال لوتکا، مطالعه مواد ویسکوالاستیک، در علم اکچوئری از طریق معادله تجدید و در مکانیک سیالات برای توصیف رفتار جریان در نزدیکی مرزهای با اندازه محدود کاربرد پیدا می کنند. در این مقاله رویکردی نو برای حل عددی معادلات انتگرالی ولترا ارائه شده است. در این روش، ابتدا معادلات انتگرالی ولترا به یک مسئله گشتاور با بعد نامتناهی تبدیل می شوند. سپس، با یک روش تقریبی، مسئله گشتاور با بعد نامتناهی به مسئله گشتاور با بعد محدود تبدیل می شود به گونه ای که خطای محاسبات قابل چشم پوشی است. در ادامه، مسئله گشتاور با بعد محدود به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل می شود. پاسخ مسئله برنامه ریزی خطی را به سادگی می توان با استفاده از نرم افزارهای مختلفی از جمله متلب بدست آورد که با حل آن، پاسخ معادلات انتگرالی ولترا بدست می آید. با استفاده از دومتال، عملکرد الگوریتم پیشنهادی بررسی شده است. شبیه سازیها نشان می دهد که روش پیشنهادی عملکرد قابل قبولی دارد.

دریافت مقاله: ۱۱/۰۹/۱۴۰۳

پذیرش مقاله: ۰۳/۰۶/۱۴۰۴

کلمات کلیدی: سربهای فوریه، برنامه ریز خطی، مسئله گشتاور با بعد نامتناهی، معادله انتگرالی ولترا و فردهولم

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)y(t)dt \quad (2)$$

در این معادلات، $f(x), k(x, t) \in L_2[a, b]$ توابعی معلوم در نظر گرفته می شوند که دارای سری فوریه هستند. a و λ مقادیری معلوم و y یک تابع مجهول فرض شده است. برای بدست آوردن پاسخ این معادلات، روشی بر پایه سری فوریه پیشنهاد می گردد. تا کنون، روش تبدیل فوریه تنها در حل معادلات انتگرالی ساده از نوع کانولوشن استفاده می شود که در صفحه ۷۳ فصل ۲ مرجع [۶] آورده شده است. روش بیان شده در این مقاله، روش جامعی است که معادلات

۱-مقدمه

معادلات انتگرالی آن دسته از معادلات هستند که در آن‌ها تابع مجهول زیر نماد انتگرال قرار دارد. ارتباط نزدیکی بین معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا معادلات دیفرانسیل معمولی و انتگرال وجود دارد و می توان برخی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا معادلات دیفرانسیل معمولی را به صورت معادلات انتگرالی فرمول بندی کرد [۱-۴]. یکی از رایج ترین انواع معادلات انتگرالی، معادله انتگرالی ولترا است [۵]. معادله انتگرال ولترا به دو دسته معادلات انتگرال ولترا نوع اول و دوم تقسیم می شود که در ادامه این معادلات آورده شده است.

$$f(x) = \int_a^x k(x, t)y(t)dt \quad (1)$$

* پست الکترونیک نویسنده مسئول: rmohammaddadi@yahoo.com

۱. دانشکده مهندسی برق، دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد، خراسان رضوی، ایران

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \cos(k\pi x) \quad (12)$$

C_k مقادیری مجهول هستند. با جایگزینی (۸)، (۹) و (۱۲) در معادله انتگرالی (۷)، نتیجه می شود که:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k \cos(k\pi x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 b_k(t) y(t) dt \right) \cos(k\pi x) \quad (13)$$

معادله (۱۳) برای تمام مقادیر x صادق است اگر:

$$C_k = a_k + \lambda \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad (14)$$

معادلات (۱۱) و (۱۴) مسائل گشتاور با ابعاد نامتناهی هستند. مسائل گشتاور با ابعاد نامتناهی، مسائل گشتاوری هستند که در محیط های با ابعاد نامتناهی مطرح می شوند. مسائل گشتاور با ابعاد نامتناهی به طور طبیعی در حوزه های کاربردی متنوعی که با تجزیه و تحلیل سیستم های پیچیده، یعنی سیستم های چندجسمی مانند مایع متشکل از مولکول ها، مولکولی متشکل از اتم ها، کهکشانی متشکل از ستاره ها، سروکار دارند، مطرح می شوند. از آنجایی که چنین سیستمی از تعداد زیادی اجزای یکسان تشکیل شده است، تحلیل آنها کار دشواری می باشد [۸]. برای یافتن پاسخ معادلات (۱۱) و (۱۴) باید این معادلات به مسائل گشتاور با بعد محدود تبدیل شوند.

۳- تبدیل مسئله گشتاور با بعد بی نهایت به مسئله گشتاور با بعد محدود

فرض کنید $\dot{f}(x)$ و $\ddot{f}(x)$ توابع پیوسته مرزدار هستند و برای یک L ثابت:

$$|\dot{f}(x)| \leq L \quad (15)$$

ضرایب سری فوریه کسینوسی نیم دامنه $f(x)$ را در نظر بگیرید:

$$a_k = \int_0^1 f(x) \cos(k\pi x) dx \quad (16)$$

با انجام چندین عمل جبری می توان نشان داد که

$$a_k = -\frac{1}{k^2 \pi^2} \int_0^1 \ddot{f}(x) \cos(k\pi x) dx \quad (17)$$

از رابطه فوق نتیجه می شود که:

$$|a_k| = \frac{1}{k^2 \pi^2} \left| \int_0^1 \ddot{f}(x) \cos(k\pi x) dx \right| \leq \frac{L}{k^2 \pi^2} \quad (18)$$

بنابراین

انتگرالی از نوع کانولوشن را نیز پوشش می دهد.

فرض کنید $\hat{k}(x, t)$ به صورت زیر تعریف شوند [۷]:

$$\hat{k}(x, t) = \begin{cases} k(x, t) & a \leq t \leq x \\ 0 & x \leq t \leq b \end{cases} \quad (3)$$

بر این اساس، معادلات انتگرال (۱) و (۲) به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$f(x) = \int_a^b \hat{k}(x, t) y(t) dt \quad (4)$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \hat{k}(x, t) y(t) dt \quad (5)$$

این معادلات، معادلات انتگرالی فردهولم نوع اول و دوم نامیده می شوند. در این مقاله بدون از دست دادن کلیت مسئله، $a = 1$ و $0 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شده اند. بنابراین حل معادلات انتگرالی (۶) و (۷) معادل با حل معادلات انتگرالی (۱) و (۲) است.

$$f(x) = \int_0^1 k(x, t) y(t) dt \quad (6)$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 k(x, t) y(t) dt \quad (7)$$

۲- استفاده از سری فوریه برای حل معادلات انتگرالی ولترا

معادله انتگرالی (۶) را در نظر بگیرید. سری کسینوسی فوریه نیم دامنه توابع $f(x)$ و $k(x, t)$ به شرح زیر است:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) \quad x \in [-1, 1] \quad (8)$$

$$k(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(t) \cos(k\pi x) \quad x \in [-1, 1], t \in [0, 1] \quad (9)$$

با جایگزینی (۸) و (۹) در معادله انتگرالی (۶) نتیجه می شود:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 b_k(t) y(t) dt \right) \cos(k\pi x) \quad (10)$$

a_k و $b_k(t)$ مقادیری معلوم هستند و معادله (۱۰) برای همه توابع مجهول y برقرار است، اگر:

$$a_k = \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

هم اکنون پیشنهاد می شود:

$$\begin{aligned} x &= A - B \\ |x| &= A + B \end{aligned} \quad (29)$$

با استفاده از (۲۸) و (۲۹) و با در نظر گرفتن $y\left(\frac{i}{n}\right) = y_i$ و رابطه (۲۷) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} J &= \min \sum_{k=0}^M (A_k + B_k) \\ a_k - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ki} y_i &= A_k - B_k \\ A_k, B_k &\geq 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (30)$$

با حل مسئله برنامه ریزی خطی (۳۰)، $y(x)$ به دست می آید. به روشی مشابه، حل معادله انتگرال (۷) را می توان به مسئله بهینه سازی زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} J &= \min \sum_{k=0}^M (A_k + B_k) \\ C_k - a_k - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ki} y_i &= A_k - B_k \\ y_i &= \sum_{k=0}^M C_k \cos\left(\frac{k\pi i}{n}\right) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ A_k, B_k &\geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

۵- مثالها

مثال ۱: در معادله انتگرالی (۶)، فرض کنید:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ k(x, t) &= t \sin(xt) \end{aligned} \quad (32)$$

که در آن $0 \leq x \leq 1$ فرض کنید $n = 300$ و $\varepsilon = 0.001$ در این صورت، با استفاده از معادله (۲۴)، $M = 30$ می شود. برای بررسی عملکرد الگوریتم، خطای $Error = f(x) -$ به صورت $\int_0^1 k(x, t) y(t) dt$ تعریف می شود که با حل مسئله برنامه ریزی خطی (۳۰) میزان این خطا بدست می آید. تغییرات این خطا بر حسب x در شکل (۱-۱) نشان داده شده است که از مرتبه 10^{-9} است. پاسخ $y(x)$ در شکل (۱-۲) آورده شده است. با مقایسه محدوده تغییرات این پاسخ و خطای $Error$ به طور وضوح می توان دریافت که خطای این الگوریتم، مقدار ناچیزی است.

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\pi x) \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{L}{k^2 \pi^2} = \\ \frac{L}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{L}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{L}{6} < \infty \end{aligned} \quad (19)$$

در نتیجه، سری (۸) به طور یکنواخت در بازه $[0, 1]$ همگرا می شود. فرض کنید ε یک عدد مثبت اختیاری است. از معادله پارسوال نتیجه می شود که:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 = \int_0^1 f^2(x) dx < \infty \quad (20)$$

یک $M = M(\varepsilon)$ وجود دارد به طوری که

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \quad (21)$$

تقریبی از $f(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_M(x) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(k\pi x) \quad (22)$$

با توجه به معادله پارسوال نتیجه می شود که:

$$|f(x) - f_M(x)|^2 = \sum_{k=M+1}^{+\infty} a_k^2 \quad (23)$$

M به گونه ای انتخاب می شود که:

$$\sum_{k=M+1}^{+\infty} a_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \quad (24)$$

بر این اساس، مسائل گشتاور با بعدی نامتناهی (۱۱) و (۱۴) به مسائل گشتاور با بعدی متناهی زیر تبدیل می شوند:

$$a_k = \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \quad (25)$$

$$\begin{aligned} C_k &= a_k + \lambda \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \\ f_M(x) &= \sum_{k=0}^M a_k \cos(k\pi x) \end{aligned} \quad (26)$$

۴- تعیین تابع مجهول $y(x)$

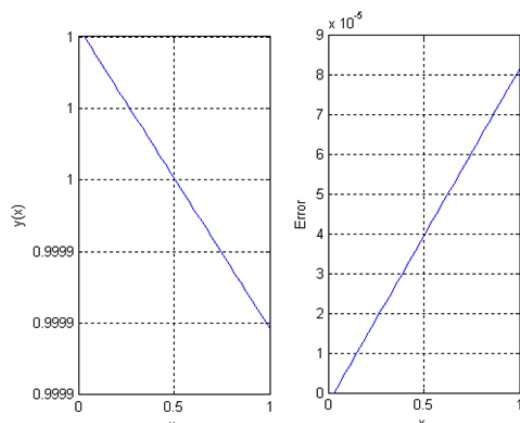
برای یافتن $y(x)$ در معادله انتگرالی (۶)، مسئله گشتاور با بعد متناهی (۲۵) به مسئله بهینه سازی زیر تبدیل می شود:

$$J = \sum_{k=0}^M \left| a_k - \int_0^1 b_k(t) y(t) dt \right| \quad (27)$$

در (۲۷)، انتگرال را به صورت زیر می توان تقریب زد:

$$\int_0^1 b_k(t) y(t) dt \cong \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_k\left(\frac{i}{n}\right) y\left(\frac{i}{n}\right) \quad (28)$$

n یک عدد صحیح مثبت است. اگر x یک عدد آزاد (مثبت، منفی یا صفر) باشد، اعدادی مانند $A \geq 0$ و $B \geq 0$ وجود دارند به گونه ای که:



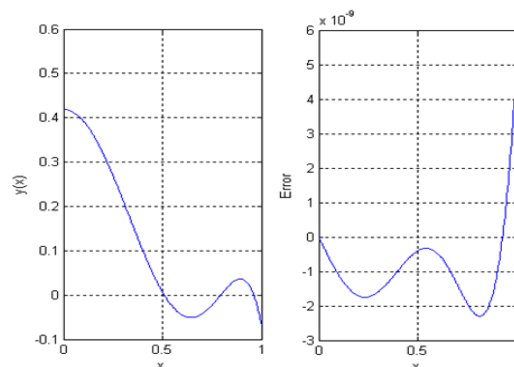
شکل ۲-۱ خطای روش

از مسئله برنامه ریزی خطی

پیشنهادی

۶- نتایج

در این مقاله روش جدیدی برای حل معادلات انتگرال ولترا ارائه گردید. در روش پیشنهادی، با دانستن ضرایب سری فوریه توابع معلوم $f(x)$ و $k(x, t)$ ، تابع مجهول $y(x)$ به راحتی بدست می آید. معادله انتگرالی به یک مسئله برنامه ریزی خطی تبدیل و سپس، با حل مسئله برنامه ریزی خطی، پاسخ $y(x)$ تعیین می گردد که این پاسخ، به اندازه کافی دقیق می باشد.



شکل ۲-۲ بدست آمده

از مسئله برنامه ریزی خطی

پیشنهادی

مثال ۲: در معادله انتگرالی (۷)، فرض کنید:

$$f(x) = e^x$$

$$k(x, t) = e^{x-t}$$

$$\lambda = -1$$

(۳۳)

که در آن $0 \leq x \leq 1$. فرض کنید $n = 300$ و $\varepsilon = 0.001$ در این صورت، با استفاده از معادله (۲۴)، $M = 40$ می شود. برای این حالت، خطای الگوریتم به صورت

$$Error = y(x) - f(x) - \lambda \int_0^1 k(x, t)y(t)dt$$

تعریف شده است. اگر مسئله برنامه ریزی خطی (۳۱) حل شود، در این صورت خطای $Error$ و پاسخ $y(x)$ بدست می آید که تغییرات آنها بر حسب x به ترتیب در شکل های شکل (۲-۱) و (۲-۲) نشان داده شده است. با توجه با این نمودارها، تغییرات خطا از مرتبه 10^{-5} است که در مقایسه با تغییرات $y(x)$ مقدار ناچیزی می باشد.

۷- مراجع

- [1] Michael A. Golberg, " Numerical solution of integral equations ", Springer, 1990.
- [2] M.A.Berger and V. J. Mizel, " Volterra equations with Ito integrals ", Integral Equations, 1980.
- [3] W. Hackbusch, " Integral Equations Theory and Numerical Treatment ", Birkhauser Verlag, Switzerland, 1995.
- [4] Annamaria Palamara Orsi, " Product integration for Volterra Integral Equations for the second kind with weakly singular kernels", Mathematics of Computation, 1996.
- [5] J. A. D. Appleby, " Almost sure asymptotic stability of linear Ito-Volterra equations with damped stochastic perturbations ", Electronic Communications in Probability, 2008.
- [6] L. Debnath and D. Bhatta, " Integral equations and their applications ", CRC Press Taylor & Francis Group, 2015.
- [7] Ji-Huan He, " A simple approach to Volterra-Fredholm integral equations ", Journal of applied and computational mechanics, 2020.
- [8] M. Infusino, S. Kuhlmann, T. Kuna and P. Michalski, " Projective limit techniques for the infinite dimensional moment problem ", Integral equations and operator theory, 2022.

A new approach to solve Fredholm and Volterra integral equations

Gholamreza Mohammaddadi

Department of Electrical Engineering, Islamic Azad University, Gonabad, Iran

Corresponding Author:rmohammaddadi@yahoo.com

Abstract

In recent years, integral equations have attracted the attention of many researchers. These equations are used to solve ordinary and partial differential equations. A special type of integral equations are Volterra integral equations. Volterra integral equations are used in demography as Lotka's integral equation, the study of viscoelastic materials, in actuarial science through the renewal equation, and in fluid mechanics to describe the flow behavior near finite-sized boundaries. In this paper, a new approach to numerical solution of Volterra integral equations is presented. In this method, The Volterra integral equations are first converted to an infinite dimension moment problem. Then, the infinite dimension moment problem is converted to a finite dimension moment problem in an approximate way, so that the resulting error can be ignored. The finite dimensional moment problem is transformed to an optimization problem, and finally, by solving the optimization problem, the solution of the integral equations is obtained. With two examples, the performance of the proposed algorithm is confirmed.

Keywords: Fourier series, Linear programming, Infinite dimensional moment problem, Fredholm and Volterra integral equations
