حل عددی معادلات انتگرالی غیر خطی ولترا به روش تکرار پارامتری اصلاح شده

محمدرضا تمامگر [1]

چکیده

هدف اصلی این کار ارائه یک رویکرد عددی جدید برای حل معادلات انتگرال غیرخطی ولترا با اصلاح روش تکرار پارامتریک است. فرآیند حل با چند مثال نشان داده شده است. مقایسه بین این روش و روش تکرار پارامتریک و جواب دقیق انجام شده است. نتایج نشان دهنده سادگی و کارایی روش تکرا پارامتری اصلاح شده است. همچنین، همگرایی این روش در این مطالعه بررسی شده است.

کلمات کلیدی: روش تکرار پارامتری ، معادلات انتگرالی ، حل عددی

دریافت مقاله:

پذیرش مقاله:

۱. مقدمه

بسیاری از مسائل فیزیکی و یا مهندسی به صورت غیر خطی و پیچیده ظاهر می شوند و یا بسیاری از مدل های آنها غیر خطی هستند که در اغلب موارد جواب واقعی آنها قابل تعیین نیست، پس لازم است که برای تعیین جواب تقریبی آنها از روش های عددی استفاده کنیم. توسعه علم منجر به شکل گیری بسیاری از قوانین فیزیکی شده است که وقتی به شکل ریاضی بیان می شوند اغلب به صورت معادلات دیفرانسیل ظاهر می شوند. مسائل مهندسی را می توان به شکل معادلات دیفرانسیل توصیف کرد. این معادلات دیفرانسیل را می توان به معادلات انتگرال ولترا تبدیل کرد. معادلات انتگرال ولترا در مسائلی مانند، نظریه سیستم ها، رسانش، گرما و انتشار به وجود می آیند. فنون محاسبات عددی به گونه ای طراحی می شوند که در حد امکان جواب ها را به صورت ساده، سریع و با دقت بالا به دست آورند و بتوان آنها را به صورت الگوریتمی در یک دستگاه محاسباتی به کار گرفت تاکنون روش‌های عددی مختلف برای حل معادلات انتگرال ولترا استفاده شده است، که از میان آنها می توان به روش تکرار پیکارد[۱]، روش آنالیز هموتوپی[۲]، روش تکرار تغییراتی[۳و۴] اشاره کرد. عموماً لازم به ذکر است که این روشها محدودیت های خاص خود را دارند و معمولاً هدف ما از طراحی این روش ها رفع این محدودیت ها است. یکی از معمول ترین و پر کاربردترین روش های عددی، روش های تکراری هستند، که روش تکرار پارامتری در واقع تعمیم روشهای فوق است. در ابتدا این روش را به طور خلاصه معرفی می کنیم.

۲. روش تکرار پارامتری

برای معرفی روش تکرار پارامتری ابتدا یک معادله انتگرالی را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$L(u)+N(u)=0 \tag{۱}$$

که در آن L با خاصیت $L(f)\equiv 0$ وقتی $f=0$ ، یک عملگر خطی کمکی نسبت به u و N یک عملگر غیر خطی نسبت به u و g یک تابع تحلیلی است. حال یک خانواده از فرآیندهای تکراری به صورت می سازیم:

$$L[u_{k+1}(t)-u_k(t)]=hH(t)A[u_k(t)] \tag{۲}$$

که در آن $h\neq 0$ یک پارامتر کمکی ، $H(t)$ یک تابع کمکی است و $A[u_k(t)]$ عبارتست از:

$$L[u_k(t)]+N[u_k(t)]-g(t)=0 \tag{۳}$$

که در آن $u_0(t)$ یک تقریب اولیه است و می تواند به صورت آزادانه انتخاب شود. شکل کلی تر خانواده تکراری (۲-۱) به صورت زیر است:

$$L[u_{k+1}(t)-u_k(t)]=h\lambda(t)H(t)A[u_k(t)],\quad k=0,1,\ldots \tag{۴}$$

که در آن $\lambda(t)$ نشان دهنده یک ضربگر (معمولا ضربگر لاگرانژ) می باشد که در [۵] به نحوه تعیین آن اشاره شده است. عوامل معرفی شده در این فرمول تکراری به طور موثر و به روش هایی ساده قابل تعیین هستند که این خود از مزایای روش تکرار پارامتری است. پس می توانیم این عوامل را طوری انتخاب کنیم که (۲-۱) و (۱-۴) جواب داشته باشند. اگر $u_0(t)$ یک تقریب اولیه مناسب باشد، آنگاه جواب واقعی معادله عبارتست از:

$$u(x)=\lim_{k\to\infty}u_k(x)$$

مرجع [۶] از روش تکرار پارامتری در حل معادلات انتگرالی غیر خطی ولترا استفاده کرده است.

۲. روش تکرار پارامتری اصلاح شده

گاهی اوقات استفاده از روش تکراری پارامتری برای حل معادلات انتگرال بخصوص نوع غیر خطی آن به آسانی امکان پذیر نیست و به دلیل افزایش حجم محاسبات حتی استفاده از نرم افزارهای قوی کار ساز نیست. برای رفع این مشکل سعی می کنیم روش را طوری اصلاح کنیم که حتی الامکان از محاسبه جملات غیر ضروری پرهیز کنیم. یک معادله انتگرالی ولترای غیر خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$u(x)=g(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)F(u(t))dt \tag{۵}$$

که طرح تکرار پارامتری برای آن به صورت زیر است:

$$u_{k+1}(x)=(1+h)u_k(x)-h\left(g(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)F(u_k(t))dt\right),\quad k=0,1.\ldots \tag{۶}$$

فرض می کنیم تابع زیر علامت انتگرال حول $x=0$ و $t=0$ دارای بسط تیلور باشد، یعنی:

$$k(x,t)F(u(t))=F_N(x,t)+o(t^{N+1})+o(x^{N+1})$$

پس طرح تکرار (۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$u_{k+1} \approx (1+h)u_k - hg(x) - h\int_0^x F_N^k(x,t)dt, \quad k = 0,1\ldots \qquad (۷)$$

که در آن $N = 2k+1$ و آنرا روش تکرار پارامتری اصلاح شده می نامیم.

۳. همگرایی روش تکرار پارامتری اصلاح شده:

به منظور اثبات همگرایی دنباله $\{u_k(x)\}$ تولید شده توسط روش تکرار پارامتری اصلاح شده.یک سری به صورت زیر می سازیم:

$$u_0(x) + [u_1(x) - u_0(x)] + \ldots + [u_k(x) - u_{k-1}(x)] + \ldots \qquad (۸)$$

توجه داریم که

$$s_{k+1} = u_0(x) + [u_1(x) - u_0(x)] + \ldots + [u_k(x) - u_{k-1}(x)] = u_k(x) \qquad (۹)$$

پس دنباله $\{u_k(x)\}$ همگراست اگر سری فوق همگرا باشد.

قضیه: : فرض کنیم $F(u(t))$ در بازه $[a,b]$ پیوسته لیپشیتس باشد و $g(x) \in C[a,b]$ و $|\lambda| \le \frac{1}{MN}$ که در آن M,N اعداد حقیقی مثبتی هستند و در آن N ثابت لیپشیتس است آنگاه سری (۸) همگراست.

اثبات: از طرح تکرای (۶) داریم:

$$|u_1(x) - u_0(x)| = \left|h\left[u_0(x) - g(x) - \lambda\int_0^x k(x,t)F(u_0(t))dt\right]\right| \le |h|\left[q + \frac{2L}{N}(b)\right] \le |h|r \qquad (۱۰)$$

بطوریکه

$$, M = \max_{a\le t\le x\le b}|k(x,t)|, L = \max_{a\le t\le x\le b}|F(u_0(t)| \ , \ q = \max_{a\le t\le x\le b}|u_0(x) - g(x)| \qquad r := q + \frac{L}{N}(b)$$

که در آن $N > 0$ ثابت لیپشیتس است به عبارت دیگر

$$\left|F(u_{k+1})-F(u_k)\right| \le N\left|u_{k+1}-u_k\right|$$

از (۶)و (۱۰) نتیجه می گیریم:

$$\begin{aligned}|u_2-u_1| &= \left|(1+h)(u_1-u_0)-h\left[\lambda\int_0^x k(x,t)\big(F(u_1)-F(u_0)\big)\right]\right| \\ &\le \big(|h|r\big)\big(|1+h|+b|h|\big)\end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}|u_3-u_2| &= \left|(1+h)(u_2-u_1)-h\left[\lambda\int_{-1}^1 k(x,t)\big(F(u_2)-F(u_1)\big)\right]\right| \\ &\le \big(|h|r\big)\big(|1+h|^2+b|1+h||h|(b)+|h|^2(b)^2\big)=\big(|h|r\big)\sum_{n=0}^{2}\binom{2}{n}|1+h|^{2-n}|h|^n(b)^n\end{aligned} \quad (۱۲)$$

$$\vdots$$

$$|u_{k+1}-u_k| \le \big(|h|r\big)\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}|1+h|^{k-n}|bh|^n \quad (۱۳)$$

بنابراین اگر $|1+h|<1$ سری (۸) و بنابراین دنباله $\{u_k(x)\}$ به جواب معادله برای $x\in[a,b]$ همگرا خواهد بود.توجه داریم طرحهای تکرار (۶) و (۷) تقریبا یکسان هستند.

۴. حل عددی معادله غیر خطی ولترا با روش تکرار پارامتری اصلاح شده:

در این قسمت با ارائه مثال نحوه عملکرد روش اصلاح شده را نشان می دهیم.

مثال ۱: معادله انتگرالی ولترای غیر خطی نوع دوم زیر را در نظر می گیریم

$$u(x)=3x+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{18}\int_0^x (x-t)u^2(t)dt, \qquad 0\le x\le 1 \quad (۱۴)$$

که جواب واقعی آن تابع $u(x)=3x$ است. با در نظر گرفتن $u(x)=\alpha_0+\alpha_1(x)$ و استفاده از اینکه

$L(u)=g(x)$

نتیجه می شود $u_0(x)=3x$. حال طبق فرآیند روش پارامتری و با فرض $L(u)=u(x)$ طرح تکراری حل این مساله به صورت زیر است:

$$u_{k+1} = (1+h)u_k - h\left(3x + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{18}\int_0^x (x-t)u_k{}^2(t)dt\right), \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (۱۵)$$

حال با توجه به رابطه(۷)، فرمول (۱۵) به شکل زیر اصلاح می شود:

$$u_{k+1} \approx (1+h)u_k - h\left(3x + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{18}\int_0^x F_N^k(x,t)dt\right), \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (۱۶)$$

که در آن

$$(x-t)u_k^2(t) = F_N(x,t) + o(t^{N+1}) + o(x^{N+1}) \qquad (۱۷)$$

به طوری که $N = 2k+1, \quad k = 0,1,\dots$.

با شروع از $k = 0$ داریم:

$$u_1 = (1+h)u_0 - h\left(3x + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{18}\int_0^x F_1^0(x,t)dt\right), \qquad 0 \le x \le 1$$

که

$$F_1(x,t) = 0$$

بنابراین برای $h = -1$ داریم:

$$u_1 = 3x + \frac{1}{24}x^2$$

و برای $k = 1$:

$$u_2 = (1+h)u_2 - h\left(3x + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{18}\int_0^x F_3^1(x,t)dt\right), \qquad 0 \le x \le 1$$

به طوری که

$$F_3(x,t) = -9t^3 + 9xt^2$$

بنابراین برای $h = -1$ نتیجه می شود:

$u_2 = 3x$

با ادامه این روند در سایر تکرارها نیز تابع $u_k(x) = 3x$ بدست می آید، یعنی جواب واقعی معادله حاصل می شود. بنابراین می توان با استفاده از روش تکرار پارامتری اصلاح شده باعث کاهش حجم محاسبات و افزایش دقت گردید.. این مساله با روش تکرار پارامتری در مرجع[۶] حل شده که نتایج حاصل در تکرار هشتم و در مقایسه با جواب دقیق به صورت جدول زیر است.

x_i	$u_8(x)$	$u_{exact}(x)$
0	0	0
0.125	0.374999	0.375
0.25	0.749999	0.75
0.375	1.124999	1.125
0.5	1.499997	1.5
0.625	1.874987	1.875
0.75	2.249955	2.25
0.875	2.624869	2.625
1	2.999668	3

مثال ۲: معادله انتگرالی ولترای غیر خطی نوع دوم زیر را در نظر می گیریم

$$u(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - x^4 - \frac{2}{5}x^5 + \int_0^x (x-t)u^3(t)dt, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{۱۸}$$

که جواب واقعی آن تابع $u(x) = 1 + 2x$ است. با در نظر گرفتن $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x)$ و استفاده از اینکه

$L(u) = g(x)$

نتیجه می شود $u_0(x)=1+2x$. حال طبق فرآیند روش پارامتری و با فرض $L(u)=u(x)$ طرح تکراری حل این مساله به صورت زیر است:

$$u_{k+1}=(1+h)u_k-h\left(1+2x-\frac{1}{2}x^2-x^3-x^4-\frac{2}{5}x^5+\int_0^x(x-t)u_k{}^3(t)dt\right),\quad 0\le x\le 1 \qquad (۱۹)$$

حال با توجه به رابطه(۷)، فرمول (۱۹) به شکل زیر اصلاح می شود:

$$u_{k+1}=(1+h)u_k-h\left(1+2x-\frac{1}{2}x^2-x^3-x^4-\frac{2}{5}x^5+\int_0^x F_N^k(x,t)dt\right),\quad 0\le x\le 1 \qquad (۲۰)$$

که در آن

$$(x-t)u_k^2(t)=F_N(x,t)+o(t^{N+1})+o(x^{N+1}) \qquad (۲۱)$$

به طوری که $N=2k+1,\quad k=0,1,\dots$.

با شروع از $k=0$ داریم:

$$u_1=(1+h)u_0-h\left(1+2x-\frac{1}{2}x^2-x^3-x^4-\frac{2}{5}x^5+\int_0^x F_1^0(x,t)dt\right),\quad 0\le x\le 1$$

که

$$F_1(x,t)=x-t$$

بنابراین برای $h=-1$ داریم:

$$u_1=1+2x-x^3-x^4-\frac{2}{5}x^5$$

و برای $k=1$:

$$u_2=(1+h)u_1-h\left(1+2x-\frac{1}{2}x^2-x^3-x^4-\frac{2}{5}x^5+\int_0^x F_3^1(x,t)dt\right),\quad 0\le x\le 1$$

به طوری که

$$F_3(x,t) = -12t^3 + 12xt^2 - 6t^2 + 6xt - t + x$$

بنابراین برای $h = -1$ نتیجه می شود:

$$u_2 = 1 + 2x - \frac{2}{5}x^5$$

و برای $k = 2$:

$$u_3 = (1+h)u_2 - h\left(1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - x^4 - \frac{2}{5}x^5 + \int_0^x F_5^2(x,t)dt\right), \quad 0 \le x \le 1$$

به طوری که

$$F_5(x,t) = -8t^4 + 8xt^3 - 12t^3 + 12xt^2 - 6t^2 + 6xt - t + x$$

بنابراین برای $h = -1$ نتیجه می شود:

$$u_3 = 1 + 2x$$

با ادامه این روند در سایر تکرارها نیز تابع $u_k(x) = 1 + 2x$ بدست می آید، یعنی جواب واقعی معادله حاصل می شود.

نتیجه گیری:

در این مقاله، ما از روش تکرار پارامتری اصلاح شده برای حل معادلات انتگرال غیرخطی ولترا استفاده کردیم. برای نشان دادن کارایی روش، دو مثال حل کردیم. نتایج حاصل از روش در مقایسه با جواب دقیق نشان می دهد که سرعت و دقت این روش نسبت به روش تکرار پارامتری و سایر روشهای مشابه بیشتراست و استفاده از آن منجر به کاهش چشمگیر حجم محاسبات می شود. همچنین نشان دادیم دنباله حاصل از این روش به جواب واقعی همگراست.

مراجع

[۱] E. Coddington, N.Levinson . و Theory of Ordinary Differential Equations, New York: McGraw-Hill, (1955) .

[۲] Sh.J. Liao, Beyond perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC Press (2003).

[۳] J.H. He, Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: Some examples, International Journal of Nonlinear Mechanics 34 (4) (1999)699–708.

[٤] J. Saberi-Nadjafi, M.Tamamgar The Variational iteration method: A highly promising method for solving the system of integro-differential equations, Computer & Mathematics with Application .56 (2008) 346-351.

[۵]A.M. Wazwaz,The variational iteration method (VIM) for solving linear and nonlinear Volterra integral and integro-differential equations, International Journal of Computer Mathematics, 87(5) (2010) 1131-1141.

[۶] M.Tamamgar , An Approximate Method with High Accuracy for Solving the Nonlinear Volterra Integral Equations,M.Tamamgar, Pacific Journal of Applied Mathematics, Volume 8 Issue 3(2017)