

## آنالیز تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - المان طبیعی

سیدعبدالصمد جوانمرد<sup>\*</sup>، محمدمحسن مشکسار<sup>۲</sup> و فرهنگ دانشمند<sup>۳</sup>

### چکیده

گالرکین بدون المان (EFG) و المان طبیعی (NEM) از روش‌های شناخته شده در زمینه‌ی مکانیک محاسباتی و جزو روش‌های بدون المان می‌باشند. در این پژوهش، از روش ترکیبی گالرکین بدون المان - المان طبیعی به منظور شبیه‌سازی تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ ایجاد شده در آزمون کشش و فرآیند اکستروژن مستقیم استفاده شده است. در روش ترکیبی گالرکین بدون المان - المان طبیعی، توابع شکل به دست آمده از روش المان طبیعی به عنوان توابع وزن در روش گالرکین بدون المان مورد استفاده قرار می‌گیرند که سبب ایجاد ویژگی دلتای کرانیکر در توابع شکل می‌گردد. روش گالرکین بدون المان در حالت معمولی دارای ویژگی دلتای کرانیکر در توابع شکل نمی‌باشد و به منظور اعمال شرایط مرزی اساسی نیاز به استفاده از روش‌های ویژه می‌باشد. موارد بررسی شده شامل شبیه‌سازی آزمون کشش در حالت تقارن محوری و فرآیند اکستروژن مستقیم مقاطع دایره‌ای با استفاده از شمش اولیه با سطح مقطع گرد می‌باشد. در فرآیند اکستروژن مستقیم، اندازه‌ی فروری پنج به مقادیر کوچک‌تر تقسیم شده و در پایان هر مرحله، مجموعه‌ای از گره‌ها فعال می‌گردد. به منظور بیان رفتار ماده پس از تسلیم، از رابطه‌ی هولمن - لودویک استفاده شده است. توانایی روش ارائه شده به وسیله‌ی مقایسه‌ی هندسی ماده‌ی تغییر شکل یافته و کانتور کرنش معادل با نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی براساس روش المان محدود، مورد بررسی قرار گرفت. بررسی نتایج، بیان‌کننده‌ی هم‌خوانی خوبی بین نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - المان طبیعی و نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی به روش المان محدود می‌باشد که نشان می‌دهد روش بالا توانایی شبیه‌سازی تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ را دارا است.

**واژه‌های کلیدی:** روش‌های بدون المان، روش ترکیبی گالرکین بدون المان - المان طبیعی، تغییر شکل پلاستیک بزرگ، آزمون کشش، اکستروژن مستقیم.

۱- استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، گروه مهندسی مکانیک، مرودشت، ایران.

۲- استاد دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، گروه مهندسی مکانیک، مرودشت، ایران.

۳- دانشیار دانشگاه شیراز، دانشکده مهندسی مکانیک، شیراز، ایران.

\*- نویسنده‌ی مسئول مقاله: jsamad2000@yahoo.com

## پیشگفتار

در بین روش‌های عددی که به منظور شبیه‌سازی فرآیندهای شکل‌دادن فلزات مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش المان محدود دارای کاربرد فراوانی می‌باشد [۱-۲]. هرچند روش المان محدود دارای توانایی بالایی در شبیه‌سازی فرآیندهای شکل‌دادن می‌باشد، ولی به دلیل ایجاد تغییر شکل‌های شدید در زمان شبیه‌سازی فرآیند شکل‌دهی، نیازمند ایجاد شبکه‌ی جدید و نگاشت متغیرهای حالت از شبکه‌ی پیشین به شبکه‌ی جدید می‌باشد که این نگاشت سبب افزایش خطا در فرآیند شبیه‌سازی می‌گردد. همچنین، تولید شبکه، به‌ویژه به‌منظور مسایل سه بعدی بسیار زمان‌بر می‌باشد. این مشکل به‌ویژه در مسایلی که با هندسه‌های پیچیده همراه باشند و یا هدف، آنالیز تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد اهمیت بیشتری پیدا خواهد کرد.

در شکل ۱، روند کلی حل در روش‌های بدون شبکه با روش المان محدود مقایسه شده است. در روش‌های بدون المان، تابع تقریب فقط براساس مجموعه‌ای از گره‌ها تشکیل می‌شود و برای تشکیل تابع تقریب نیازی به المان نیست، برخلاف روش اجزاء محدود که برای تشکیل درون‌یاب‌ها نیازمند ساختار المانی می‌باشد.

از شناخته شده‌ترین روش‌های بدون المان، روش گالرکین بدون المان<sup>۱</sup> می‌باشد [۳] که از روش حداقل مجموع مربعات متحرک، به‌منظور بیان تابع تقریب کمک می‌گیرد. تقریب کمترین مربعات متحرک، روشی برای به‌دست آوردن تقریبی از یک تابع مجهول با داشتن مقدار آن در تعدادی نقاط جدا از هم می‌باشد. روش گالرکین بدون المان در حالت معمولی دارای ویژگی دلتای کرانیکر در توابع شکل نمی‌باشد و به‌منظور اعمال شرایط مرزی اساسی، نیاز به استفاده از روش‌های ویژه است. در روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی، توابع شکل به‌دست آمده از روش المان طبیعی<sup>۲</sup> به‌عنوان توابع وزن در روش گالرکین بدون المان مورد استفاده قرار می‌گیرند که سبب ایجاد ویژگی دلتای کرانیکر در توابع شکل می‌گردد [۴]. درون‌یاب مورد استفاده در روش المان

طبیعی، درون‌یاب همسایه‌ی طبیعی نامیده می‌شود. این درون‌یاب در نخست در سال ۱۹۸۰ توسط سیسون معرفی شد. در سال ۱۹۹۸ سوکومار و همکاران حل مسایل الاستیسیته را با استفاده از روش المان طبیعی مورد بررسی قرار دادند [۵ و ۶]. در سال ۲۰۱۰، دانشمند و همکاران از این روش به‌منظور بررسی مسایل سطح آزاد جریان زیر دریچه‌ی تخت استفاده کردند [۷].

مسایل تغییر شکل فلزات بیشتر دارای تغییر شکل‌های شدید در المان‌ها به‌همراه تغییر شکل‌های بزرگ، مرزهای متحرک، رفتار غیرخطی و وابسته به مسیر مواد و تغییر پیوسته در شرایط مرزی می‌باشند. این پژوهش به‌دنبال استفاده از روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی به‌منظور حل مسایل دارای تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ می‌باشد. نخست آزمون کشش شبیه‌سازی می‌گردد و فرآیند شکل‌دهی انتخاب شده، اکستروژن مستقیم در حالت تقارن محوری می‌باشد که در آن میزان حرکت پانچ به چندمرحله تقسیم می‌گردد. در فضای حل مسئله، گره در نظر گرفته شده و در پایان هر مرحله، گره‌های فعال برای مرحله‌ی بعد انتخاب می‌شوند. رابطه‌ی هوک و هولمن - لودویک به‌ترتیب به‌منظور بیان رفتار الاستیک و رفتار غیرخطی ماده انتخاب شده‌اند. به‌منظور شبیه‌سازی موارد بالا براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی، کدنویسی با استفاده از نرم‌افزار Matlab انجام شده است.

دقت روش بالا به کمک مقایسه‌ی نتایج، شامل هندسه‌ی ماده‌ی تغییر شکل یافته و کانتور کرنش معادل با نتایج به‌دست آمده از شبیه‌سازی به‌وسیله‌ی نرم افزار ANSYS مقایسه شده است.

## مواد و روش پژوهش

### روش ترکیبی گالرکین بدون المان (EFG) و المان طبیعی (NEM)

روش گالرکین بدون المان از جمله روش‌های مشهور بدون المان است. در این روش، توابع تقریب با استفاده از روش کمترین مربعات متحرک ساخته می‌شوند. تقریب کمترین مربعات متحرک روشی برای به‌دست آوردن تقریب از یک تابع مجهول با داشتن مقدار آن در تعدادی

1- Element Free Galerkin (EFG)

2- Natural Element Method (NEM)

تابعی از  $X$  می‌باشند. برای محاسبه‌ی مشتق مرتبه‌ی نخست و دوم بر اساس روابط (۲) و (۷) خواهیم داشت:

$$u(x) = p^T(x)A^{-1}(x)B(x)\bar{u} \quad (10)$$

در این صورت لازم است مشتق به گونه‌ی زنجیره‌ای از  $p$ ،  $A$  و  $B$  نسبت به  $X$  گرفته شود:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = p_{,x}(x), \quad \frac{\partial A(x)}{\partial x} = A_{,x}(x), \quad (11)$$

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} = B_{,x}(x), \quad \frac{\partial A^{-1}(x)}{\partial x} = -A^{-1}(x)A_{,x}(x)A^{-1}(x)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۰)، مشتق مرتبه‌ی نخست به گونه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$(12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = p_{,x}^T A^{-1} B \bar{u} - p^T A^{-1} A_{,x} A^{-1} B \bar{u} + p^T A^{-1} B_{,x} \bar{u}$$

### توابع وزن مورد استفاده در روش گالرکین بدون المان

تابع وزن برای تمامی گره‌ها و روی تمامی دامنه‌ی مسئله تعریف می‌گردد به گونه‌ای که تابع وزن روی تمامی نقاط دامنه مثبت یا صفر است و مقدار آن در  $X_j$  بیشینه بوده و با دور شدن از نقطه‌ی  $X_j$  از مقدار آن کاسته می‌شود و در فاصله‌ای از گره‌ی مورد نظر که آن را شعاع اثر تابع وزن می‌نامند، مقدار آن برابر صفر می‌گردد. از سوی دیگر، شعاع اثر تابع وزن، بیان‌کننده‌ی ناحیه‌ای است که آن گره ویژه می‌تواند روی جواب تاثیر بگذارد. برای تابع وزن می‌توان به معروف‌ترین آنها  $\text{cubic spline}$  و  $\text{Gaussian}$  اشاره نمود [۴].

### درون‌یاب المان طبیعی بمنظور دستیابی به توابع وزن

دیاگرام ورونی و شبکه‌بندی دلانی یکی از اساسی‌ترین و مفیدترین ابزارهایی هستند که یک مجموعه‌ی نامنظم نقاط (گره‌ها) را تعریف می‌کنند. مجموعه‌ای از گره‌های جدا از هم به گونه‌ی  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$  را در فضای  $R^2$  در نظر بگیرید. دیاگرام ورونی مرتبه‌ی نخست برای مجموعه  $N$ ، تقسیمی از صفحه به نواحی  $TI$  است که هر ناحیه‌ی  $TI$  به گره  $n_I$  نسبت داده می‌شود، به گونه‌ای که هر نقطه در این ناحیه به گره  $n_I$  نزدیک‌تر از هر گره دیگر است. به این نواحی  $TI$  سلول‌های ورونی مرتبه‌ی نخست

نقاط جدا از هم می‌باشد. اگر  $X$  نقطه‌ای درون ناحیه‌ی مسئله باشد، تقریب کمترین مربعات متحرک در آن نقطه به گونه‌ی زیر خواهد بود [۴]:

$$u(x) = \hat{u}(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)\alpha_i \quad (1)$$

که  $p_i(x)$  به عنوان بردار توابع پایه و  $\alpha_i$  به عنوان بردار ضرایب شناخته می‌شود. به طور معمول، تعداد نقاط  $n$  باید از تعداد توابع پایه  $m$  بیشتر باشد. رابطه‌ی (۱) را می‌توان به گونه‌ی زیر نیز بیان نمود:

$$u(x) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \dots] [\alpha_1 \ \dots \ \alpha_m]^T = p^T(x)\alpha \quad (2)$$

خطای ناشی از تقریب را به گونه‌ی زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$J = \sum_{j=1}^n w_j(x) [\bar{u}_j - \hat{u}_j]^2 = \sum_{j=1}^n w_j(x) [\bar{u}_j - p^T(x_j)\alpha(x)]^2 \quad (3)$$

که  $w_j(x)$  تابع وزن متناسب با گره  $j$ ام می‌باشد که در نقطه‌ی  $X$  محاسبه شده است. اکنون با حداقل کردن مقدار خطا می‌توان ضرایب مجهول (بردار  $\alpha$ ) را محاسبه کرد. به منظور مینیمم کردن خطا لازم است که:

$$\partial J / \partial \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

این رابطه سبب فرمولاسیون زیر خواهد شد:

$$A(x)\alpha(x) = B(x)\bar{u} \quad (5)$$

که:

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i),$$

$$\bar{u} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n]^T \quad (6)$$

$$B(x) = [w_1(x)p(x_1), \dots, w_n(x)p(x_n)]$$

اگر طرفین رابطه‌ی (۵) در معکوس ماتریس  $A$  ضرب شود، بردار ضرایب به گونه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\alpha(x) = A^{-1}(x)B(x)\bar{u} \quad (7)$$

چنانچه رابطه‌ی (۷) در رابطه‌ی (۱) جای گذاری شود، می‌توان توابع شکل را به گونه‌ی زیر معرفی نمود:

$$u(x) = \hat{u}(x) = \phi^T(x)\bar{u} = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)\bar{u}_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

$$\phi_j(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) [A^{-1}(x)B(x)] \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\phi(x) = p^T(x)A^{-1}(x)B(x) \quad (9)$$

$\phi_j(x)$  را تابع شکل مربوط به گره  $j$ ام در نقطه‌ی  $X$  می‌نامیم. در این جا  $\alpha$  و ماتریس‌های  $A$  و  $B$  ثابت نبوده و

برای گره  $X$  و نقاط اطراف، همسایه‌های طبیعی گره  $X$  مشخص می‌گردد (شکل الف-۳) به گونه‌ای که برای نقطه‌ی  $x$ ، ۵ همسایه‌ی طبیعی وجود دارد. با توجه به رابطه‌ی (۱۵) و شکل‌های (الف-۳ و ب-۳)، توابع شکل برای گره  $X$  بر اساس روش المان طبیعی و المان محدود در جدول ۱ مشخص شده است.

### مدل‌سازی رفتار الاستو-پلاستیک با استفاده از روش المان محدود و بدون المان

در این بخش، آنالیز تنش در حالت الاستو-پلاستیک برای حالت تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و شرایط تقارن محوری مورد بررسی قرار گرفته است. نخست معادلات تشکیل یافته به‌منظور بیان رفتار الاستو-پلاستیک مواد در حالت ۲ بعدی ارائه می‌گردد و سپس فرمول‌بندی المان محدود و گالرکین بدون المان به‌منظور حل مسایل عنوان می‌گردد. معیار تسلیم مورد توجه در اینجا، معیار تسلیم وان-مایسز می‌باشد. رفتار پلاستیک ماده شامل رفتاری نابرگشت‌پذیر در کرنش و ناوابسته به زمان است. فرمول‌بندی تئوری پلاستیسیته شامل مراحل زیر می‌باشد [۸، ۹]:

- ۱- وجود رابطه بین تنش و کرنش در ناحیه‌ی الاستیک.
- ۲- در نظر گرفتن معیار تسلیم به‌منظور مشخص شدن زمان ورود به ناحیه‌ی پلاستیک.
- ۳- توسعه‌ی روابط تنش و کرنش به‌منظور ناحیه‌ی پلاستیک.

رفتار مواد در ناحیه‌ی الاستیک به‌وسیله‌ی رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = D_e \varepsilon \quad (17)$$

در حالات گوناگون (کرنش صفحه‌ای، تنش صفحه‌ای و حالت تقارن محوری) ماتریس  $D_e$  به گونه‌ی زیر تعریف می‌شود:

برای حالت کرنش صفحه‌ای و تقارن محوری:

$$D_e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای:

گفته می‌شود که بیان ریاضی دیاگرام آن به گونه‌ی زیر است [۷]:

$$T_I = \left\{ x \in R^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J) \forall J \neq I \right\} \quad (13)$$

با توجه به این که فضای متریک در نظر گرفته شده فضای اقلیدسی است،  $d(x_I, x_J)$  فاصله‌ی بین  $x_I$  و  $x_J$  است. این مکان هندسی با رسم عمود منصف‌های بین هر دو گره به‌دست می‌آید. دیاگرام ورونی مرتبه‌ی دو این‌گونه تعریف می‌شود: مکان هندسی نقاطی از صفحه که  $\Pi_I$  نزدیک‌ترین همسایه و  $\Pi_J$  نزدیک‌ترین همسایه پس از آن می‌باشد. این ناحیه را می‌توان به بیان ریاضی به گونه‌ی زیر تعریف کرد:

$$T_{IJ} = \left\{ x \in R^2 : d(x, x_I) < d(x, x_J) < d(x, x_K), \forall K \neq I, J \right\} \quad (14)$$

که  $X(x, y)$  نقطه‌ای مربوط به فضای دوبعدی است.

سیبسون در سال ۱۹۸۰ درون‌یاب همسایه‌ی طبیعی را معرفی نمود. در این روش برای تعیین همسایه‌های طبیعی نقطه‌ای مانند  $X$  به مختصات  $(x_1, x_2)$ ، از دیاگرام ورونی مرتبه‌ی دوم استفاده می‌شود و بدین ترتیب همسایه‌ی طبیعی و مختصات همسایه‌ی طبیعی مشخص می‌شود. مختصات همسایه‌ی طبیعی (توابع شکل) به‌عنوان توابع درون‌یابی در درون‌یاب‌های همسایه‌ی طبیعی سیبسون و به‌عنوان توابع تست در اجرای روش گالرکین برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای استفاده می‌شود. تابع شکل همسایه‌ی طبیعی  $X$  نسبت به همسایه‌ی طبیعی  $I$  به‌عنوان نسبت مساحت سلول ورونی مرتبه‌ی دو ( $A_I$ ) به کل مساحت سلول ورونی مرتبه‌ی نخست ( $A$ ) تعریف می‌شود:

$$\varphi_I(x) = \frac{A_I(x)}{A(x)}, \quad A(x) = \sum_{j=1}^n A_j(x) \quad (15)$$

مشتق توابع شکل سیبسون از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\Phi_{I,j}(x) = \frac{A_{I,j}(x) - \Phi_I(x) A_{j,j}(x)}{A(x)}, \quad j = 1, 2 \quad (16)$$

شکل (الف-۲) بیان‌کننده‌ی تعدادی از نقاط در صفحه می‌باشد. می‌توان این نقاط را براساس روش دلانی مثلث‌بندی نمود. شبکه‌ی ورونی این نقاط به وسیله‌ی ترسیم عمود منصف‌های بین هر دو گره به‌دست می‌آید (شکل ب-۲). اگر نقطه‌ی  $x$ ، یک نقطه در فضای در بر گیرنده‌ی نقاط مسئله باشد، به‌منظور دست‌یابی به توابع شکل در گره  $X$ ، نخست به‌وسیله‌ی ترسیم شبکه‌ی ورونی

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = H'(\bar{\varepsilon}_p) \quad (25)$$

و با توجه به تعریف اریه شده برای  $E_T$  خواهیم داشت:

$$E_T = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} \quad (26)$$

با توجه به رابطه‌ی (۲۰):

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon_e} = \frac{1}{d\varepsilon/d\sigma - d\varepsilon_e/d\sigma} = \frac{1}{1/E_T - 1/E} \rightarrow H' = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (27)$$

در فرمول بندی المان محدود یا المان طبیعی،  $H'$  مورد استفاده قرار خواهد گرفت. به طور کلی رابطه‌ی بین نمو تنش و نمو کرنش را می‌توان به گونه‌ی زیر نشان داد:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (28)$$

که در آن:

$$D_{ep} = D - \frac{dD}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\varepsilon_p}, \quad dD = Da, \quad (29)$$

$$a^T = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\tau_{xy}^2 + 0.5(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)}} \{\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad 2\tau_{xy} \quad \sigma'_z\}$$

### چگونگی حل مسایل با رفتار غیر خطی

روش‌های گوناگونی به منظور حل مسایل غیرخطی وجود دارد. در این روش‌ها اعمال نیرو یا تنش خارجی به گونه‌ی چندمرحله‌ای انجام می‌گیرد و در هر مرحله، جواب مسئله با تکرار به دست می‌آید؛ بدین ترتیب که با محاسبه‌ی نیروهای نامتوازن براساس تفاضل نیروهای ناشی از تنش داخلی و خارجی و به حداقل رساندن آنها با توجه به اصلاح تنش‌های داخلی، محاسبات انجام می‌شود. از جمله‌ی این روش‌ها، می‌توان به روش‌های تنش اولیه، نیوتن-رافسون، نیوتن-رافسون اصلاح شده و ... اشاره کرد. در تمامی روش‌ها، بارگذاری خارجی به نواحی تقسیم شده است و در هر نمو با انجام تکرار، نیروهای نامتوازن به حداقل رسانده می‌شوند. تفاوت روش‌ها در ماتریس سختی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در روش نیوتن-رافسون معمولی، در هر مرحله از تکرار، ماتریس سختی اصلاح می‌شود. حال آن‌که این روند برای روش نیوتن-رافسون اصلاح شده، محاسبه‌ی ماتریس سختی در آغاز هر نمو بارگذاری انجام می‌شود و در کل نمو بار(در تکرارها) ماتریس سختی تغییری نمی‌کند. در روش تنش اولیه، تمامی محاسبات براساس ماتریس سختی اولیه انجام می‌شود و نیازی به ایجاد ماتریس سختی جدید و واران کردن آن نمی‌باشد و با وجود افزایش تعداد تکرارها

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

براساس تئوری پلاستیک نموی، زمانی که یک ماده الاستو-پلاستیک شروع به تسلیم می‌کند، نمو کرنش را می‌توان به دو بخش الاستیک و پلاستیک تقسیم نمود. بنابراین می‌توان نوشت:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (20)$$

که در این رابطه،  $d\varepsilon$  نمو کرنش کل،  $d\varepsilon^e$  نمو کرنش الاستیک و  $d\varepsilon^p$  نمو کرنش پلاستیک می‌باشد. نمو کرنش الاستیک به گونه‌ی زیر به نمو تنش مربوط می‌شود:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (21)$$

که  $E$ ،  $\nu$  و  $\mu$  بیان کننده‌ی مدول الاستیک و نسبت پواسون ماده می‌باشند. نمو کرنش پلاستیک براساس معادله‌ی پرائنل-رس به گونه‌ی زیر با نمو تنش دارای رابطه می‌باشد:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma'_{ij} \quad (22)$$

با دقت در روابط یاد شده، رابطه‌ی کلی بین نمو کرنش و نمو تنش به گونه‌ی زیر خواهد بود:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \sigma'_{ij} \quad (23)$$

### آزمایش تسلیم تک محوری برای ماده‌ی دارای ویژگی

#### الاستو-پلاستیک

در شکل ۴، نمودار تنش-کرنش برای ماده‌ای با ویژگی الاستو-پلاستیک ترسیم شده است. ماده تا رسیدن به نقطه‌ی تسلیم ( $\sigma_y$ ) از خود رفتار الاستیک نشان می‌دهد که شیب منحنی در این ناحیه برابر با مدول الاستیک ماده ( $E$ ) می‌باشد. سپس ماده وارد ناحیه‌ی الاستو-پلاستیک می‌شود که شیب منحنی در هر نقطه به وسیله‌ی مدول مماسی الاستو-پلاستیک ( $E_T$ ) نام‌گذاری می‌گردد. قانون سخت‌شوندگی ماده در ناحیه‌ی پلاستیک را می‌توان به وسیله‌ی تابع  $H$  که ارتباط بین تنش موثر و کرنش موثر را بیان می‌کند، به گونه‌ی زیر در نظر گرفت [۸]:

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}_p) \quad (24)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه خواهیم داشت:

آزمون، نمونه تحت نیروی کششی افزایشده قرار می‌گیرد تا دچار گسیختگی شود. بارگذاری به‌گونه‌ی مکانیکی یا هیدرولیکی انجام می‌شود. این آزمون برای به‌دست آوردن ویژگی‌های مواد مانند مدول الاستیک، استحکام تسلیم، استحکام نهایی و استحکام شکست مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور معمول نتایج این آزمون به شکل نمودار تنش- کرنش مهندسی نمایش داده می‌شود. عبارات  $\ln l/l_0$ ,  $\Delta l/l_0$ ,  $p/A$ ,  $p/A_0$  به‌ترتیب بیان‌کننده‌ی تنش مهندسی، تنش حقیقی، کرنش مهندسی و کرنش حقیقی می‌باشند.

تنش حقیقی در محدوده‌ی تغییر شکل پلاستیک، تنش سیلان نامیده می‌شود. نموداری که تغییرات تنش سیلان بر اساس تغییرات کرنش حقیقی را نشان می‌دهد، نمودار تنش سیلان یا نمودار تنش-کرنش حقیقی خوانده می‌شود. منحنی سیلان فولادهای غیرآلیاژی و تعدادی از فلزات شکل‌پذیر مانند آلومینیوم در محدوده‌ی تغییر شکل پلاستیک و در دمای محیط با استفاده از رابطه‌ی ارایه شده توسط هلمن-لودویک<sup>۱</sup> توصیف می‌شود:

$$\sigma = K \varepsilon^n \quad (32)$$

در این رابطه  $K$  و  $n$  ضرایب ثابتی هستند که به ترکیب شیمیایی، ساختار بلورین، ریزساختار و ... وابسته می‌باشند.  $n$ : توان (نمای) کارسختی<sup>۲</sup> مربوط به منحنی تنش سیلان در محدوده‌ی تغییر شکل پلاستیک و  $K$ : ضریب استحکام<sup>۳</sup> نامیده می‌شود.

با استفاده از مفهوم تنش موثر و کرنش موثر می‌توان رابطه‌ی زیر را بر پایه‌ی تنش و کرنش موثر نوشت:

$$\bar{\sigma} = K \bar{\varepsilon}^n \quad (33)$$

تنش و کرنش موثر به‌گونه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)} \quad (34)$$

به‌منظور بررسی توانایی روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی در شبیه‌سازی تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ، نخست آزمون کشش انتخاب گردید. به‌منظور انجام آزمون کشش، آلومینیوم گروه ۱۱۰۰ با مدول الاستیک برابر با  $E=70GPa$  برای ناحیه‌ی

روند محاسبات با هزینه‌ی کمتری به پیش می‌رود. در این پژوهش، از روش تنش اولیه برای مسایل کنترل بار استفاده شده است.

در مجموع، روند کلی حل مسایل غیر خطی را می‌توان به‌گونه‌ی زیر خلاصه نمود:

(الف) تشکیل ماتریس سختی ارتجاعی.

(ب) تعیین نمو نیروهای داخلی.

(ج) تعیین جابجایی‌ها با استفاده از ماتریس سختی اولیه.

(د) تعیین تنش‌ها در نقاط تنش.

(ه) اصلاح تنش‌ها با توجه به رفتار الاستو-پلاستیک.

(و) تعیین نیروهای گره‌ای ناشی از تنش‌های داخلی به‌وسیله‌ی رابطه‌ی زیر:

$$(f^e)^T = \int_{\Omega} B^T \sigma^T d\Omega \quad (30)$$

که  $F_{ext}$  از برهم‌نهی نیروهای گره‌ای هر المان  $(f^e)^T$  به‌دست می‌آید.

(ز) محاسبه‌ی نیروهای گره‌ای نامتوازن براساس تفاضل نیروهای خارجی و داخلی.

(ح) تعیین میزان تیرانس براساس رابطه‌ی زیر:

$$Tol = \frac{\|F_{unb}\|}{\|F_{ext}\|} \quad (31)$$

که در این رابطه،  $\| \cdot \|$  معرف نرم اقلیدسی و  $F_{unb}$  نیروی گره‌ای نامتوازن و  $F_{ext}$  نیروی گره‌ای خارجی می‌باشد. شکل ۵، الگوریتم حل مسئله را بیان می‌نماید [۸ و ۹].

## نتایج و بحث

به‌منظور شبیه‌سازی تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی برنامه‌ای کامپیوتری با استفاده از نرم افزار Matlab تهیه شد و آزمون کشش در حالت تقارن محوری و فرآیند اکستروژن مستقیم جهت سطح مقطع دایره‌ای مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به‌دست آمده از شبیه‌سازی براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی با نتایج آماده شده از شبیه‌سازی به کمک نرم‌افزار ANSYS مقایسه گردید.

## آزمون کشش

آزمون کشش یکی از آزمون دست‌یابی به‌های مورد استفاده جهت ویژگی‌های مکانیکی جامدات است. در این

<sup>۱</sup> - Hollman & Ludwik

<sup>۲</sup> - Work Hardening Exponent

<sup>۳</sup> - Strength Coefficient

می‌شود. شکل ۸، فرآیند اکستروژن مستقیم و غیرمستقیم را نمایش می‌دهد. در فرآیند اکستروژن مستقیم، سیلان فلز با جهت اعمال فشار یکسان است، در حالی که در روش غیرمستقیم، سیلان فلز در خلاف جهت اعمال فشار صورت می‌گیرد. قطعات تولید شده از این دو روش می‌توانند یکسان باشند. در روش اکستروژن غیرمستقیم به جای اعمال نیرو و راندن قطعه کار به درون قالب، قالب را به سمت قطعه کار حرکت می‌دهند.

به منظور شبیه‌سازی فرآیند اکستروژن بر اساس روش بدون المان، تحلیل مجموعه معادلات  $\sigma_{zz} = 174 \varepsilon^{0.304}$  مسئله در نظر گرفته می‌شود. سپس با توجه به شکل اولیه قطعه کار، گره‌های فعال انتخاب می‌گردند. در ادامه، یک مرحله‌ی فرو روی پانچ انجام می‌شود و بر اساس رفتار الاستو-پلاستیک، تنش و کرنش در نقاط گوناگون محاسبه می‌شود. سپس با توجه به هندسه‌ی تغییر شکل یافته‌ی قطعه، گره‌های فعال انتخاب شده و نکاشت متغیرهای حالت به گره‌های فعال انجام می‌گردد (شکل ۹). در ادامه، مرحله‌ی بعدی فرو روی پانچ اعمال می‌گردد. الگوریتم حل در شکل ۱۰ مشخص می‌باشد. سپس، به منظور شبیه‌سازی فرآیند اکستروژن مستقیم، آلومینیوم گروه ۱۱۰۰ با مدول الاستیک برابر با  $E = 70 \text{ GPa}$  برای ناحیه‌ی الاستیک و نمودار تنش سیلان هولمن-لودویک با رابطه‌ی  $\sigma = 174 \varepsilon^{0.304} \text{ MPa}$  انتخاب گردید. شکل ۱۱، نشان‌دهنده‌ی ابعاد قطعه کار، پانچ و قالب می‌باشد. با توجه به ابعاد اولیه شده در شکل ۱۱، میزان کاهش در سطح مقطع برابر با ۴۴/۴ درصد می‌باشد. به منظور شبیه‌سازی براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی، ۱۰۲۵ گره مورد استفاده قرار گرفت. میزان فروروی پانچ برابر با ۵ میلی‌متر بوده و ضریب اصطکاک بین قالب، پانچ و قطعه کار برابر با ۰/۰۵ انتخاب گردید. شکل ۱۲، نشان‌دهنده‌ی کانتور کرنش به دست آمده از شبیه‌سازی براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی و نرم افزار ANSYS می‌باشد. همان‌گونه که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی براساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - المان طبیعی دارای هم‌خوانی خوبی با نتایج به دست آمده از نرم افزار

الاستیک و نمودار تنش سیلان هولمن-لودویک با رابطه‌ی  $\sigma = 174 \varepsilon^{0.304} \text{ MPa}$  انتخاب گردید. با توجه به اعمال تنش محوری به قطعه، تنش محوری اعمال شده،  $\sigma_{zz}$ ، برابر با تنش موثر،  $\bar{\sigma}$  و کرنش محوری،  $\varepsilon_{zz}$ ، برابر با کرنش موثر،  $\bar{\varepsilon}$  می‌باشد:

$$\sigma_{zz} = \bar{\sigma} = \frac{F}{A}, \quad \varepsilon_{zz} = \bar{\varepsilon} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (35)$$

که  $l_0$  و  $l$  طول نخست و طول دوم قطعه می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\bar{\sigma} = 174 \varepsilon^{0.304} \rightarrow \sigma_{zz} = 174 \varepsilon_{zz}^{0.304} \rightarrow \frac{F}{A} = 174 \left( \ln \frac{l}{l_0} \right)^{0.304} \rightarrow F = 174 A \left[ \ln \left( \frac{l}{l_0} \right) \right]^{0.304} \quad (36)$$

با توجه به فرض ثابت بودن حجم خواهیم داشت:

$$A = A_0 l_0 / (l_0 + \Delta l) \quad (37)$$

شکل ۶، ابعاد نمونه آزمون کشش را در حالت تقارن محوری نشان می‌دهد. با توجه به این‌که قطعه دارای دو محور تقارن می‌باشد، می‌توان یک چهارم از قطعه را شبیه‌سازی کرد. تعداد المان انتخاب شده به منظور شبیه‌سازی بر اساس روش المان محدود شامل ۶۴ گره و ۹۰ المان مثلثی می‌باشد. به منظور شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی، فقط ۶۴ گره مورد استفاده قرار می‌گیرد (شکل ۶). تغییر طول ۱۰ میلی‌متر در ۱۰۰ مرحله به قطعه اعمال شده است. شکل ۷، نمودار تغییرات نیرو بر حسب تغییر طول را برای روش‌های المان محدود و روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی و تئوری هولمن-لودویک نشان می‌دهد. هم‌خوانی نتایج به دست آمده بیان‌کننده‌ی توانایی روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی در شبیه‌سازی تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ می‌باشد.

### فرآیند اکستروژن مستقیم

اکستروژن یکی از روش‌های شکل دادن فلزات است که یکی از فرآیندهای مهم در ساخت و تولید قطعات نظامی و صنعتی به‌شمار می‌رود و با توجه به سرعت تولید بالا و پیچیدگی قطعات تولید شده و نیز گستره‌ی آلیاژهای آهنی و غیرآهنی که در این روش شکل داده می‌شوند، در صنعت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این فرآیند به دو گروه بزرگ اکستروژن مستقیم و غیرمستقیم تقسیم

### سپاسگزاری

در پایان از معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت که در قالب طرح پژوهشی از این طرح حمایت نموده‌اند، تشکر و قدردانی می‌گردد.

ANSYS می‌باشد و در گوشه‌های قالب ناحیه‌ی مرده<sup>۱</sup> قابل مشاهده است و تغییر شکل‌های شدید در ناحیه‌ی خروجی قالب ایجاد شده است. همچنین، باتوجه به کانتورهای کرنش ارایه شده در شکل ۱۲، نواحی تغییر شکل یافته به صورت صلب از قالب خارج می‌شوند و ناحیه‌ی تماسی قطعه با پانچ دارای حداقل کرنش ایجاد شده می‌باشد.

### نتیجه گیری

در این پژوهش، روشی جدید بر پایه‌ی روش ترکیبی گالرکین بدون المان (EFG) و المان طبیعی (NEM) به منظور آنالیز تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ مسایل دوبعدی مانند آزمون کشش و فرآیند اکستروژن مستقیم ارایه شده است. در روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی، توابع شکل به دست آمده از روش المان طبیعی به عنوان توابع وزن در روش گالرکین بدون المان مورد استفاده قرار می‌گیرند که سبب ایجاد ویژگی دلتای کرانیکر در توابع شکل می‌شود. در حالت عادی توابع شکل به دست آمده از روش گالرکین بدون المان دارای ویژگی دلتای کرانیکر نمی‌باشند که به منظور اعمال شرایط مرزی اساسی، نیاز به استفاده از روش‌های ویژه می‌باشد.

در ادامه، به منظور بررسی درستی نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان و المان طبیعی، آزمون کشش و فرآیند اکستروژن مستقیم به کمک نرم افزار ANSYS مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به دست آمده شامل نمودار نیرو بر حسب میزان کشیدگی در آزمون کشش و کانتور کرنش معادل در فرآیند اکستروژن مستقیم می‌باشد.

مقایسه‌ی نتایج، بیان‌کننده‌ی هم‌خوانی خوبی بین نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-المان طبیعی می‌باشد که نشان می‌دهد روش یاد شده توانایی مدل کردن تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ را دارا می‌باشد.

<sup>1</sup> - Dead zone



**References:**

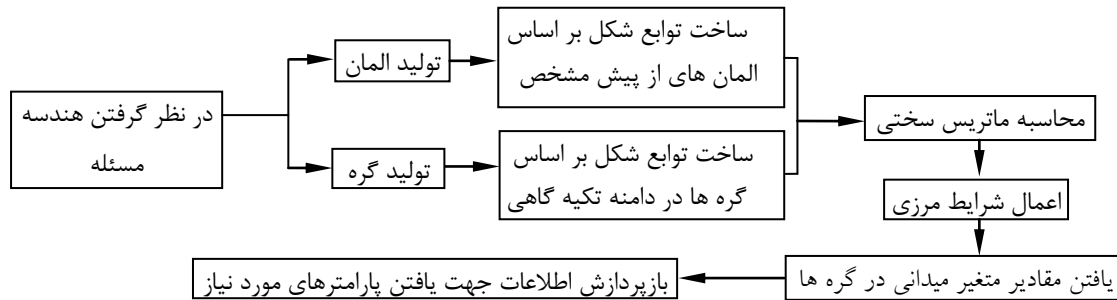
- 1- M.M. Moshksar and R. Ebrahimi, "A new upper bound analysis for prediction of load and flow pattern in backward extrusion forging", Iranian Journal of Science and Technology, 23(3), pp. 251-266, 1999.
- 2- R. McMeeking and J.R. Rice, "Finite element formulation for problems of large elasto plastic Deformation", Journal of International of Solids and Structures, 11, 601-616. 1975.
- 3- T. Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, "Element-free galerkin methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37, pp. 229-256, 1994.
- 4- T. Most, "A natural neighbour-based moving least-squares approach for the element-free Galerkin method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 71, pp. 224-252, 2007.
- 5- N. Sukumar, B. Moran and T. Belytschko, "The natural element method in solid mechanics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 43(5), pp. 839-887, 1998.
- 6- N. Sukumar and B. Moran, "C Natural neighbor interpolate for partial differential equations", Numerical Methods for Partial Differential Equations, 15(4), pp. 417-447, 1999.
- 7- F. Daneshmand, S.A.S. Javanmard, T. Liaghat, M.M. Moshksar, and J.F. Adamowski, "Numerical solution for two-dimensional flow under sluice gate using natural element method", Canadian Journal of Civil Engineering, 37(12), pp. 1550-1559, 2010.
- 8- D.R.J. Owen and E. Hinton, "Finite element in plasticity: theory and Practice", Swansea (UK), Pineridge Press Limited, 1980.
- 9- MS. Gadala and J. Wang, "Computational implementation of stress integration in FE analysis of elasto-plastic large deformation problems", Finite Elements in Analysis and Design, 35, pp. 379-396, 2000.



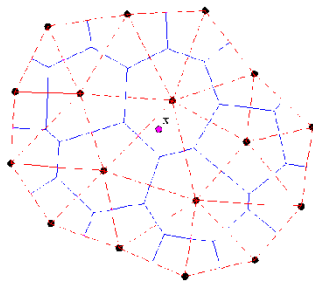
## پیوست‌ها

جدول ۱- توابع میان یاب از دو روش المان محدود و المان طبیعی

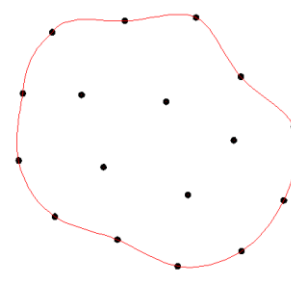
تابع شکل	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\varphi_5$
المان محدود	0	$A_{x45}/A_{245}$	0	$A_{x25}/A_{245}$	$A_{x24}/A_{245}$
المان طبیعی	$A_{aef}/A_{abcde}$	$A_{abhgf}/A_{abcde}$	$A_{bch}/A_{abcde}$	$A_{cdgh}/A_{abcde}$	$A_{defg}/A_{abcde}$



شکل ۱- مقایسه بین روش المان محدود و روش‌های بدون المان

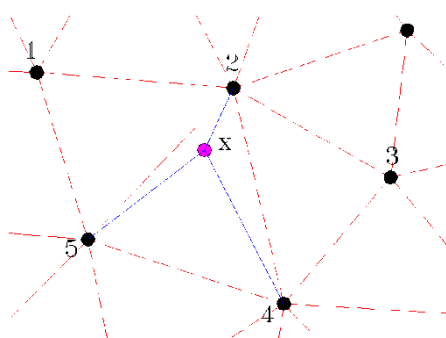


(ب)

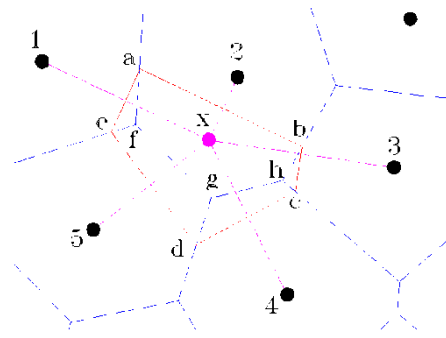


(الف)

شکل ۲- (الف) مثلث‌بندی دلانی، (ب) نمای شبکه‌ی ورونی

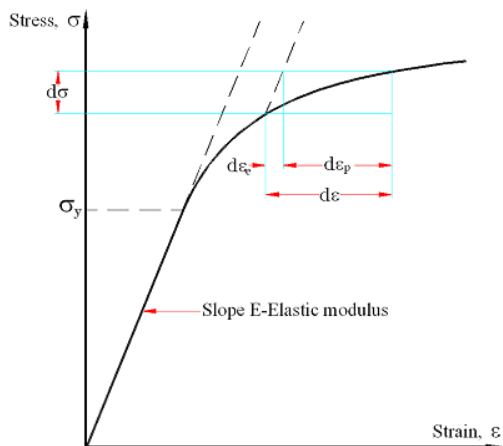


(ب)

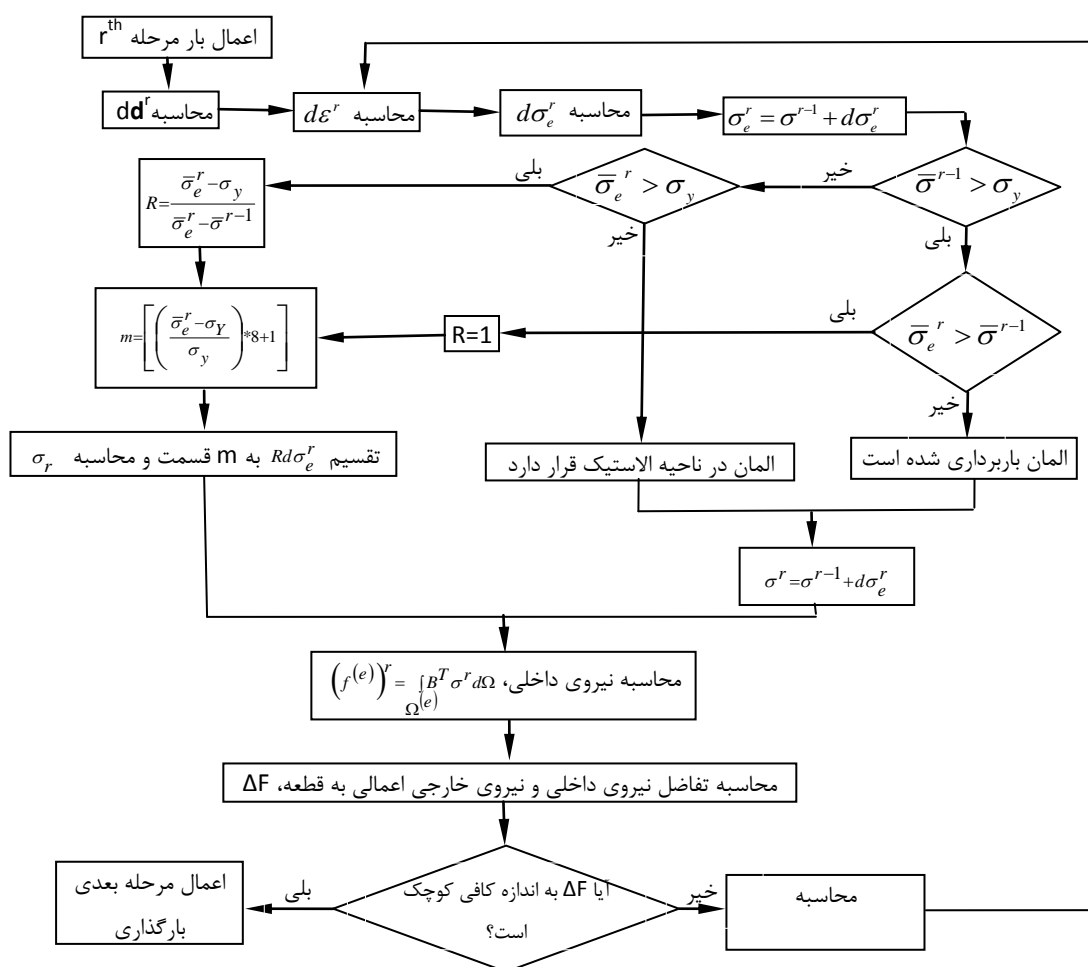


(الف)

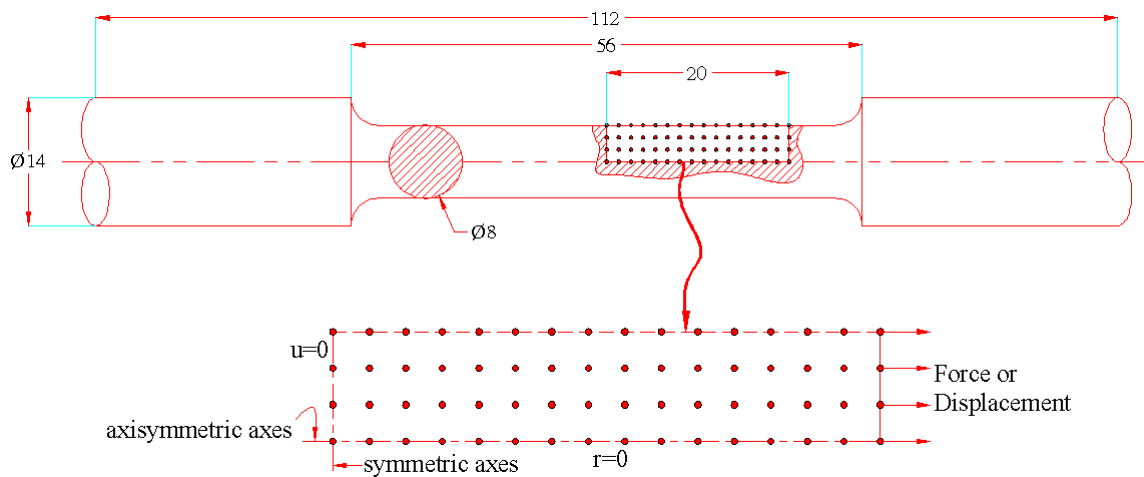
شکل ۳- (الف) همسایگان طبیعی نقطه X و ترسیم شبکه ورونی به منظور محاسبه توابع شکل نقطه، (ب) همسایگان نقطه X بمنظور محاسبه توابع شکل نقطه X بر اساس تئوری المان محدود.



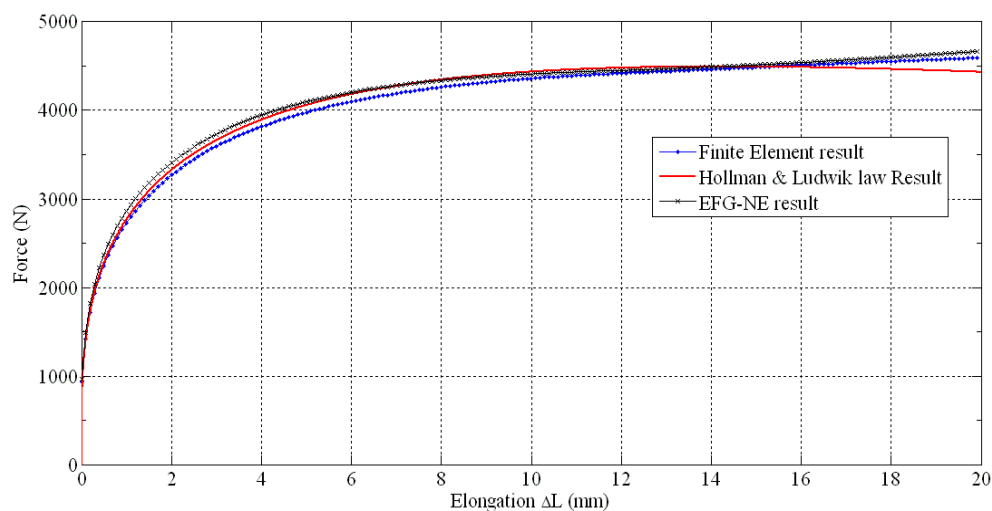
شکل ۴- نمودار تنش- کرنش برای یک ماده دارای ویژگی الاستو-پلاستیک



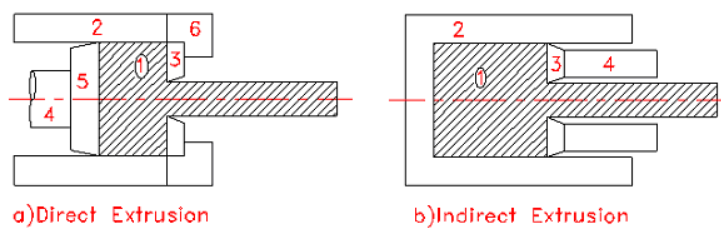
شکل ۵- الگوریتم حل مسایل با رفتار الاستو-پلاستیک



شکل ۶- ابعاد نمونه آزمون کشش و توزیع گره در حالت تقارن محوری بر حسب میلی‌متر

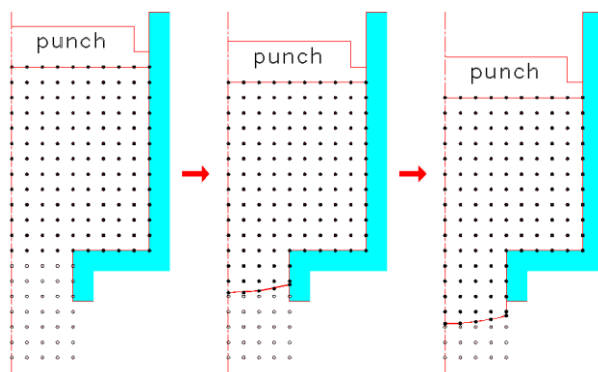


شکل ۷- مقایسه‌ی نتایج نمونه آزمون کشش در حالت تقارن محوری

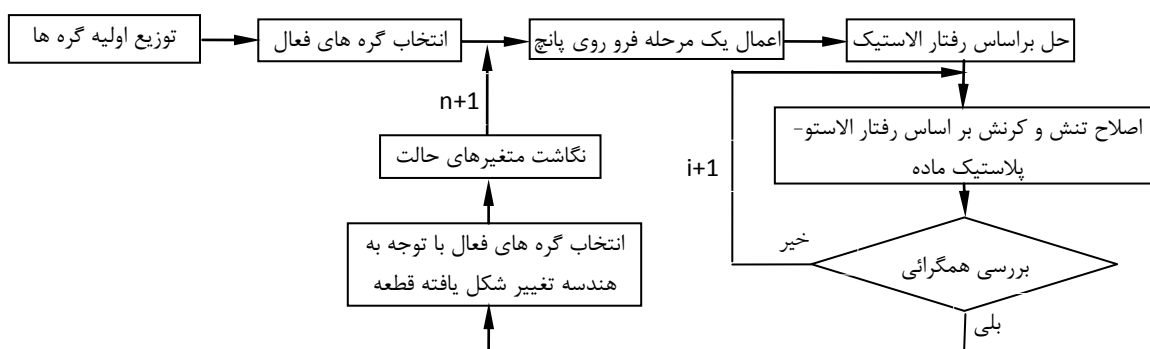


۱- شمش، ۲- محفظه، ۳- قالب، ۴- میله اکستروژن، ۵- بلوک، ۶- نگهدارنده قالب

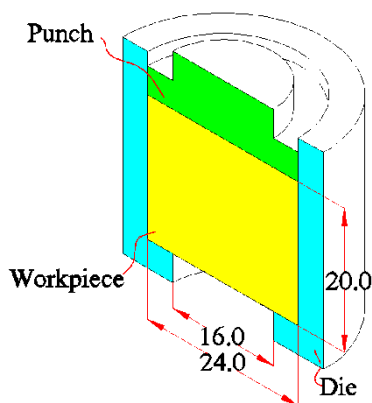
شکل ۸- روش‌های اصلی اکستروژن



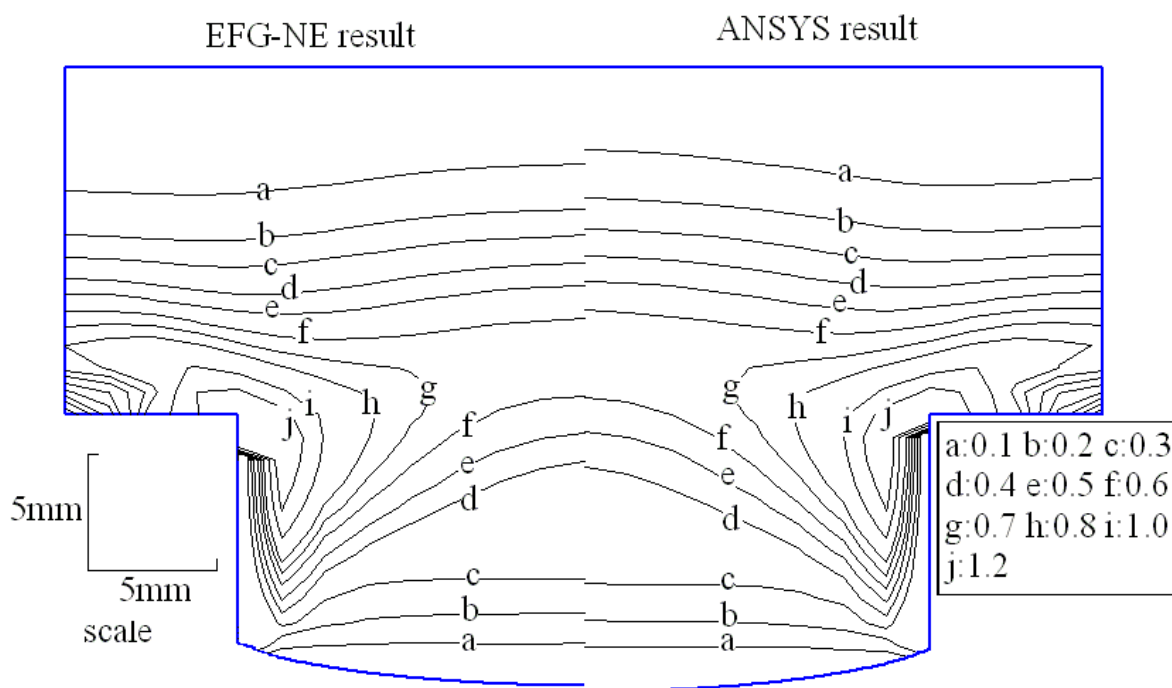
شکل ۹- چگونگی فعال سازی گره ها در مراحل گوناگون فروروی پانچ



شکل ۱۰- الگوریتم حل مسئله بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان- المان طبیعی



شکل ۱۱- ابعاد هندسی قالب قطعه کار و پانچ بر حسب میلی متر



شکل ۱۲- مقایسه‌ی کانتور کرنش معادل بمنظور فرآیند اکستروژن مستقیم در حالت تقارن محوری

