

## Research Paper

# Effect of the power type of the general flow function on the texture simulation of ECAP process

Arman Hasani<sup>1\*</sup>

1. Assistant Prof. of Mechanical Engineering, , Mechanical Engineering Group, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

Received: 2021/03/05

Revised: 2021/11/02

Accepted: 2021/11/06

Use your device to scan and read the article online



DOI:  
10.30495/jnm.2021.27412.1911

### Keywords:

ECAP, simulation, Texture, Flow function

### Abstract

Flow line model as an efficient model in ECAP process analysis is based on functions that evaluate the material plastic flow inside the die. Among the various flow functions, the general flow function has the highest ability in analyzing of ECAP process. All parameters of this function have so far been considered as fixed parameters in calculating velocity and velocity gradient fields. Previous studies have shown a relatively linear relationship between the power in the function and the initial position of the flow lines. Accordingly, in the present work, the mentioned fields have been calculated based on the variable power and in order to investigate its effect, the experimental results of the ECAP process with an angle of 90 degree of aluminum alloy AA2124 have been used. The experimental flow lines were analyzed to find the linear relationship between the function's power and the initial position of the flow lines. Simulations of the texture evolution were carried out subsequently using the general flow function in both constant and variable power conditions. Comparison of the simulated textures with the experimental results showed a much better performance of the variable power mode; in such a way that compared to the constant power condition, the deviation in the position of the simulated texture components in the variable power mode is significantly lower. However, the change in the power mode of the function did not show a significant effect on the intensity of the simulated texture.

**Citation:** Abedi-Sarvestani A, Ezatti-Sarvari N, Abdollahzadeh GH. Water Conflict and Its Management Strategies Among Users of Shared Water Wells: The Case Study of Farmers in Bahar County of Hamadan Province. Quarterly Journal of New Materials. 2021; 12 (44): 13-28.

**\*Corresponding author:** Arman Hasani

**Address:** Mechanical Engineering Group, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

**Tell:** +988733660073

**Email:** a.hasani@uok.ac.ir

## Extended Abstract

### Introduction

Among the severe plastic deformation (SPD) methods used to produce nanostructured bulk materials, equal channel angular pressing (ECAP) as one of the most widely used of these processes has attracted the attention of many researchers over the past decades. Several models have been proposed to describe the deformation manner in ECAE. Simple shear model [1] is the first and most widely used deformation model. In this approach, the simple shear deformation is localized in a narrow zone around the intersection plane of the inlet and outlet channels. However, experimental observations [1, 3, 4] and finite element simulations [5, 6], however, showed that the flow lines can be quite rounded. These rounded flow lines were then modeled basically by two approaches; the fan-model [7] and the flow line model [4]. The second model, which has a higher ability to interpret the flow lines, is the main subject of the present work. So, the first power-law flow line model was developed for a 90° die without rounding of the corners [4]; and then it has been adapted for the 120° die [9]. Both of them are based on an analytic flow line function using only one parameter; which was not capable to describe the input and output deviations revealed in the experimental and simulated flow lines. So, a general power-law flow line function is presented subsequently [10, 11], which consists of three parameters ( $n$ ,  $\alpha$ ,  $m$ ); the parameter  $n$  control the sharpness of the flow line and the parameter  $\alpha$  and  $m$  makes the input and output deviations on the flow line. In the previous studies [10, 11], all of these parameters were considered constant during derivations in order to find the velocity field and velocity gradients. So, variation of these parameters affect obviously the flow function behavior. As a result, one can expect occurrence of some differences between the obtained velocity field and velocity gradients from the two different conditions of constant or variable parameters. The main part of the applied strain is imposed on the material in the curved part of the flow line; and it highlights

the importance of examining the  $n$  parameter. So, we focus on the exponent " $n$ " and analyze the effect of its variation on the texture simulation in ECAP process. It should be noted that another flow function is presented and developed to interpret NECAP and DECLC [12-15] processes. Although these function have a relative ability to analyze the ECAP process, however it has not the high capabilities of the general flow function in analyzing this process.

### Materials and Methods

Analyzing of the experimental flow lines revealed a linear relationship between the  $x_0$  and  $n$  parameter [10, 11]. So, the initial position  $x_0$ , and consequently the  $n$  parameter, could be defined as a function of  $x$  and  $y$ , using the general flow function. As the result, the  $n$  parameter has been considered as a variable parameter during first and second derivations of the flow line in order to find the velocity field and velocity gradient components. The experimental flow lines of an AA2124 aluminum alloy sample attained from 90 degree ECAP experiment, originally presented in the previous work [12], were analyzed using the general flow function. So, the respected parameters of the flow lines were found and linear variation of the  $n$  parameter with  $x_0$  for the flow lines was obtained, subsequently. Effect of the variation of  $n$  parameter can be illustrated by successful modeling of the texture development. So the texture evolution of the Al ECAP sample (published previously [12]) has been simulated using the velocity gradients defined by variable and constant  $n$  parameter. The ATEX software [16] was employed to plotting of the ODF (orientation distribution function) in two different  $\phi_2 = 0^\circ$  and  $45^\circ$  sections of the textures. Based on the plane of the samples in which the textures were measured, the corresponding flow line with respected parameters was considered. Texture simulations have been carried out employing viscoplastic self-consistent (VPSC) model [17] and the 12 {111} <110> type slip systems [18] were used. The Zhou et al. approach [19] was used for Strain hardening simulation. Other simulation parameters are considered

according to reference [12].

### Results and Discussion

The experimental texture contains the expected shear components; with different deviations from the ideal positions. The deviation angles of the simulated texture components (using both  $n$  conditions) from the corresponding experimental positions have been measured. For all components, the deviation angles in the variable  $n$  condition are considerably lower than the constant condition. In the variable condition of the  $n$  parameter, the largest value of deviation belongs to the C component; the deviation angles of the other components are below one degree, and even for the  $A_1^*$  component almost no deviation is observed. It is quite clear that variable condition of the  $n$  parameter have provided much better simulation results than constant condition; however, there is no considerable difference in the relative peak intensities between the simulated textures under two different  $n$  condition.

### Conclusion

The obtained results can be summarized as:

- The experimental data illustrated a direct relation between parameter  $n$  of the general flow function and initial position of the flow line  $x_0$ . It means that the  $n$  parameter could be considered as a variable parameter during derivations in order to find the velocity fields and velocity gradient components.
- Variable  $n$  condition produced a better simulated texture than the constant  $n$ ; so, considerable lower deviations were obtained in the simulated texture components using variable  $n$ , compare to the experiment.
- Variation in the  $n$  condition had not considerable effect on the simulated texture peak intensity.

### Ethical Considerations compliance with ethical guidelines

All Ethical Considerations and guidelines have been considered in preparation of this paper.

### Funding

This work was supported by the research vice-presidency of University of Kurdistan over research project referenced by 4/17699.

### Authors' contributions

All matters related to this paper have been done by: Arman Hasani.

### Conflicts of interest

No conflict of interest.

## مقاله پژوهشی

## تأثیر نوع تابع جامع سیلان در شبیه‌سازی بافت کریستالی فرآیند فشردن در کانال‌های هم‌مقطع زاویه‌دار

آرمان حسنی<sup>\*۱</sup>

۱. استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

## چکیده

مدل خطوط سیلان به عنوان یکی از کارآمدترین مدلها در تحلیل فرآیند فشردن در کانال‌های هم‌مقطع زاویه دار (ECAP) بر مبنای توابعی استوار است که مسیر سیلان پلاستیک مواد درون قالب را تجزیه و تحلیل می‌کنند. در بین توابع سیلان مختلف، تابع جامع سیلان از بالاترین توانایی در تحلیل فرآیند ECAP برخوردار است. کلیه پارامترهای موجود در این تابع تا کنون به صورت پارامترهای ثابت در محاسبه میدان‌های سرعت و گرادیان سرعت در نظر گرفته شده‌اند. مطالعات پیشین ارتباط نسبتاً خطی بین تابع موجود در این تابع و موقعیت اولیه خطوط سیلان را نشان داده‌اند. بر این اساس در کار حاضر میدان‌های مذکور بر مبنای توان متغیر محاسبه گردیده و جهت بررسی تأثیر آن، نتایج تجربی به دست آمده از فرآیند ECAP با زاویه ۹۰ درجه آلیاژ آلومینیوم AA2124 مورد استفاده قرار گرفته است. خطوط سیلان تجربی به منظور دستیابی به ارتباط خطی بین تابع جامع سیلان و موقعیت اولیه خطوط، تجزیه و تحلیل گردید. متعاقباً شبیه‌سازی تحولات بافت کریستالی آلیاژ مذکور با استفاده از تابع جامع سیلان در دو حالت توان ثابت و متغیر انجام گرفت. مقایسه بافت‌های شبیه‌سازی شده با نتایج تجربی عملکرد بسیار مناسب‌تر حالت توان متغیر را نشان داد؛ به گونه‌ای که در مقایسه با حالت توان ثابت، انحراف در موقعیت اجزای بافت شبیه‌سازی شده در حالت توان متغیر در حد قابل ملاحظه‌ای پایین‌تر می‌باشد. با این حال تغییر در حالت تابع تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر شدت نسبی بافت کریستالی شبیه‌سازی شده از خود نشان نداد.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۱۵

تاریخ داوری: ۱۴۰۰/۰۸/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۸/۱۵

از دستگاه خود برای اسکن و خواندن مقاله به صورت آنلاین استفاده کنید



DOI:

10.30495/jnm.2021.27412.1911

## واژه‌های کلیدی:

فشردن در کانال‌های هم‌مقطع زاویه‌دار، شبیه‌سازی، بافت کریستالی، تابع سیلان

\* نویسنده مسئول: آرمان حسنی

نشانی: گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

تلفن: ۰۸۷۳۳۶۶۰۰۷۳

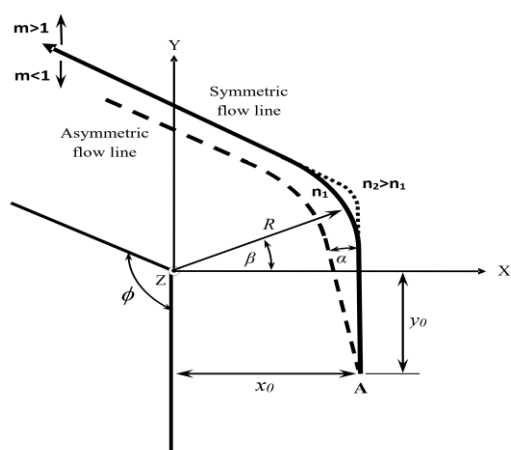
پست الکترونیکی: a.hasani@uok.ac.ir

## مقدمه

سیلان کاملاً برطرف شده است اما داده‌های به دست آمده از پژوهش‌های عملی [۴ و ۱۰] و شبیه‌سازی‌های اجزاء محدود [۶ و ۵] شکلی کاملاً نامتقارن از خطوط سیلان را در فرآیند ECAP به نمایش درآورده‌اند که امکان تفسیر این عدم تقارن در خطوط سیلان توسط توابع پیشین میسر نمی‌باشد. از طرف دیگر توابع مذکور تنها برای حالت‌های خاصی ارائه شده‌اند و قابلیت استفاده در هر زاویه قالبی را دارا نمی‌باشند. از این رو تابع جامع خطوط سیلان [۱۱، ۱۰] ارائه گردید که نه تنها قابل استفاده در تمامی زوایای قالب فرآیند ECAP می‌باشد بلکه توانایی پوشش دادن عدم تقارن در خطوط سیلان و انحرافات ورودی و خروجی در مسیر سیلان ماده در داخل قالب را نیز دارد. ارائه فرآیند فشردن در کانال‌های غیرهم‌مقطع زاویه‌دار<sup>۷</sup> (NECAP) [۱۲]، به عنوان فرآیند تغییر شکل یافته ECAP، باعث گردید که تابع خط سیلان جدیدی جهت آنالیز این فرآیند ارائه گردد [۱۳]. محدودیت نسبی تابع مذکور در تفسیر دقیق جزئیات خطوط سیلان فرآیند NECAP باعث گردید که با اعمال تغییراتی نه تنها قابلیت آن در تفسیر خطوط سیلان در فرآیند NECAP افزایش یابد [۱۴] بلکه در فرآیند فشردن در کانال‌های هم‌مقطع زاویه‌دار جانبی<sup>۸</sup> (DECLC) نیز به کار گرفته شود [۱۵]. لازم به ذکر است که فرآیند DECLC به نوعی جزو فشردن در کانال‌های نابرابر محسوب می‌گردد. اگر چه تابع مورد اشاره از توانایی نسبی در تحلیل فرآیند ECAP برخوردار است اما از قابلیت‌های بالای تابع جامع سیلان در تحلیل این فرآیند برخوردار نیست. از این رو در کار حاضر تابع جامع سیلان به عنوان تابع اصلی در تحلیل فرآیند ECAP مد نظر قرار گرفته است. فرم این تابع به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x, y) = (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^n + \frac{(y \sin \phi - x \cos \phi)^n}{m} = (y_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha)^n \quad (1)$$

در این تابع  $\phi$  زاویه قالب و  $(x_0, y_0)$  مختصات نقطه شروع خط سیلان می‌باشند که در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- خط سیلان در قالب ECAP و تأثیر پارامترهای تابع خط سیلان بر شکل آن [۱۱].

در بین روش‌های تغییر شکل شدید<sup>۱</sup> (SPD) که جهت تولید مواد نانو ساختار حجمی<sup>۲</sup> مورد استفاده قرار می‌گیرند، فرآیند فشردن در کانال‌های هم‌مقطع زاویه‌دار<sup>۳</sup> (ECAP) [۱] به عنوان یکی از پرکاربردترین این فرآیندها نه تنها توجه محققین بسیاری را به خود جلب کرده بلکه به عنوان رکن اساسی در ارائه فرآیندهای ترکیبی [۲] نیز مورد توجه قرار گرفته است. مدل‌های متعددی به منظور توضیح شیوه تغییر شکل در ECAP تا کنون ارائه شده، با این حال مکانیزم آن هنوز به طور کامل شناخته شده نیست. در بین مدل‌های ارائه شده، مدل برشی ساده<sup>۴</sup> [۱] بیشترین کاربرد را به خود اختصاص داده است. در این مدل، تغییر شکل برشی ساده به یک ناحیه باریک در اطراف فصل مشترک کانال‌های ورودی و خروجی محدود می‌باشد. تحقیقات عملی [۴ و ۱۰] و شبیه‌سازی‌های اجزاء محدود [۶ و ۵] در رابطه با فرآیند ECAP نشان داده‌اند که تغییر شکل در آن نه تنها محصور به ناحیه باریک اطراف فصل مشترک کانال‌ها نبوده بلکه مسیرهای سیلان حین تغییر شکل در قالب ECAP از فرمی کاملاً گرد با انحنای متفاوت برخوردار می‌باشند. خطوط سیلان گرد در فرآیند ECAP به عنوان اصلی‌ترین چالش در برابر مدل برشی ساده [۱] موجب ارائه دو رویکرد جهت تفسیر آنها گردید؛ مدل فن<sup>۵</sup> [۷] و مدل خط سیلان<sup>۶</sup> [۴]. در اولین مدل فن [۷] فرمی کاملاً دایره‌ای شکل با سرعت سیلان ثابت برای خطوط سیلان در ECAP در نظر گرفته شد. شکل پیشنهادی این مدل برای خطوط سیلان از انحراف و خطای بسیار بالایی در تفسیر خطوط سیلان به دست آمده از آزمایشات و شبیه‌سازی‌ها برخوردار بوده و ضمناً پیوستگی مسیر سیلان در نواحی ابتدا و انتهای ناحیه منحنی شکل آن در نظر گرفته نشده است. در دومین مدل فن [۸]، یک معادله بیضی خاص جهت تفسیر مسیر سیلان ماده در ECAP معرفی شده است. در مدل مذکور خط‌های مدل اول در توضیح بخش منحنی شکل مسیر سیلان کاهش یافته و پیوستگی مسیر سیلان قبل و بعد از بخش انحنایی آن مد نظر قرار گرفته شده است. با این حال این مدل از قابلیت تغییر و کنترل مقدار انحنای ناحیه منحنی شکل مسیر سیلان برخوردار نبوده و تفسیر میزان انحراف موجود در مسیر سیلان ماده در کانال‌های ورودی و خروجی نیز از حیثه توانایی آن خارج است. از این رو کماکان خط‌های قابل ملاحظه‌ای در تفسیر خطوط سیلان توسط این مدل وجود دارد. اما مدل خطوط سیلان، که موضوع اصلی کار حاضر است، اولین بار برای تفسیر خطوط سیلان در قالب‌های ۹۰ درجه ارائه گردید [۴]، و پس از آن برای قالب ۱۲۰ درجه تعمیم داده شد [۹]. هر دو مدل مذکور بر اساس یک تابع خط سیلان تحلیلی ارائه شده بودند که پارامترهای آن‌ها با استفاده از منطبق سازی خطوط سیلان بر داده‌های به دست آمده از مسیرهای سیلان نمونه‌های عملی و یا شبیه‌سازی‌های اجزاء محدود به دست می‌آیند. اگر چه در مقایسه با مدل‌های فن، در مدل‌های خطوط سیلان مذکور مشکل کنترل میزان انحنای خطوط

<sup>5</sup> fan-model

<sup>6</sup> Flow line model

<sup>7</sup>Non Equal Channel Angular Pressing

<sup>8</sup>Dual Equal Channel Lateral Extrusion

<sup>1</sup> Sever Plastic Deformation

<sup>2</sup> Nano-Bulk Materials

<sup>3</sup> Equal Channel Angular Pressing

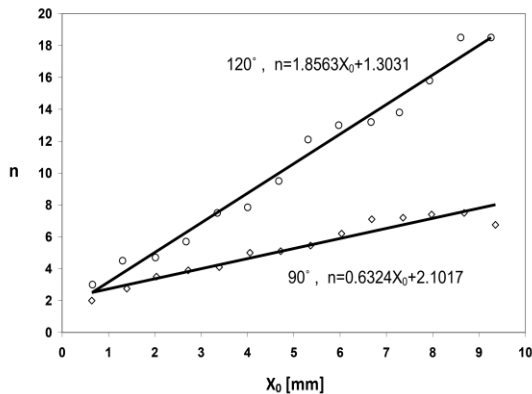
<sup>4</sup> simple shear model

پارامترهای موجود در مدل بر مولفه‌های گرادیان سرعت قابل تعمیم است. بدیهی است در صورتیکه هر یک از پارامترهای مورد اشاره به صورت پارامتری متغیر و تابعی از مختصات خط سیلان در نظر گرفته شود روند محاسبه روابط مربوط به میدان سرعت و گرادیان آن را تحت تاثیر قرار داده و لذا به طور مستقیم بر نتایج شبیه‌سازی بافت کریستالی تأثیرگذار خواهد بود. در کار حاضر پارامتر  $n$  به عنوان مهمترین و تأثیر گذارترین پارامتر در تابع جامع سیلان مورد توجه قرار گرفته و تأثیر متغیر بودن این پارامتر بر نتیجه شبیه سازی بافت کریستالی در قالب ۹۰ درجه فرآیند ECAP مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور احتراز از تأثیر دیگر پارامترها در شبیه‌سازی بافت کریستالی، انحراف ورودی و خروجی در خطوط سیلان نادیده گرفته شده و به عبارتی مقادیر پارامترهای دیگر به صورت  $m=1$  و  $\alpha=0^\circ$  در نظر گرفته می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی حاصل از دو حالت  $n$  ثابت و متغیر با داده های تجربی مقایسه می‌گردند.

پرواضح است که در کارهای آتی تاثیر حالت پارامترهای دیگر تابع جامع سیلان بر نتایج شبیه سازی می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. علاوه بر آن انجام بررسی مشابه در رابطه با فرآیند NECAP نیز باید در تحقیقات آینده مورد توجه قرار گیرد.

### تعیین میدان سرعت و گرادیان سرعت از تابع جامع سیلان با "n" متغیر

نتایج تحقیقات عملی در فرآیند ECAP [۱۰، ۱۱] نشان داده که ارتباط مستقیمی بین موقعیت اولیه خط سیلان  $x_0$  و پارامتر  $n$  وجود دارد. تغییرات پارامتر  $n$  بر حسب  $x_0$  برای خطوط سیلان آلومینیوم خالص در دو قالب ۹۰ و ۱۲۰ درجه از فرآیند ECAP [۱۰] در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- تغییرات پارامتر  $n$  بر حسب  $x_0$  برای آلومینیوم خالص در دو قالب ۹۰ و ۱۲۰ درجه از فرآیند ECAP [۱۱].

در شکل ۲، قالب‌های مورد استفاده در تست ECAP دارای سطح مقطع مربعی شکل به ضلع ۱۰ میلی‌متر بوده‌اند. همانطور که این شکل نشان می‌دهد، ارتباطی تقریباً خطی مابین پارامتر  $n$  و  $x_0$  وجود دارد به گونه‌ای که با افزایش  $x_0$  مقدار پارامتر  $n$  در

با توجه به رابطه ۱ ارتباط بین مختصات نقطه شروع خط سیلان به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$y_0 = x_0 \cot \phi \quad (2)$$

همان‌طور که دیده می‌شود، در تابع سیلان (رابطه ۱) سه پارامتر  $(n, \alpha, m)$  وجود دارد که تابع را قادر می‌سازند تا سیلان ماده در هر قالب ECAP را با انعطاف بسیار بالا تفسیر کند، که مسیر سیلان نامتقارن را نیز در بر می‌گیرد. هر پارامتر از تأثیر مختص به خود بر شکل خط سیلان برخوردار می‌باشد. پارامتر  $n$  میزان تندی انحنای خط سیلان را کنترل میکند، پارامتر  $\alpha$  زاویه انحراف در راستای ورودی را ایجاد و پارامتر  $m$  وظیفه اعمال تغییرات در موقعیت خروجی خط سیلان را بر عهده دارد. در شرایطی که هر سه پارامتر مذکور به عنوان پارامترهای ثابت در نظر گرفته شوند مولفه‌های میدان سرعت و تانسور گرادیان سرعت به ترتیب به صورت معادلات ۳ و ۴ به دست خواهند آمد [۱۰، ۱۱]:

$$v_x = -v_0 \frac{\sin \alpha p^{n-1} + \frac{\sin \phi}{m} q^{n-1}}{c^{n-1}}, \quad (3)$$

$$v_y = v_0 \frac{\cos \alpha p^{n-1} - \frac{\cos \phi}{m} q^{n-1}}{c^{n-1}},$$

$$c = y_0 \sin \alpha + x_0 \cos \alpha, \quad p = y \sin \alpha + x \cos \alpha,$$

$$q = y \sin \phi - x \cos \phi.$$

$$L_{xx} = -v_0(n-1) \begin{bmatrix} c^{1-n} \left( p^{n-2} \sin \alpha \cos \alpha - q^{n-2} \frac{\sin \phi \cos \phi}{m} \right) \\ -c^{1-2n} \left( p^{n-1} \sin \alpha + q^{n-1} \frac{\sin \phi}{m} \right) \\ \left( p^{n-1} \cos \alpha - q^{n-1} \frac{\cos \phi}{m} \right) \end{bmatrix},$$

$$L_{yy} = -L_{xx},$$

$$L_{xy} = -v_0(n-1) \begin{bmatrix} c^{1-n} \left( p^{n-2} \sin^2 \alpha + q^{n-2} \frac{\sin^2 \phi}{m} \right) \\ -c^{1-2n} \left( p^{n-1} \sin \alpha + q^{n-1} \frac{\sin \phi}{m} \right)^2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$L_{yx} = v_0(n-1) \begin{bmatrix} c^{1-n} \left( p^{n-2} \cos^2 \alpha + q^{n-2} \frac{\cos^2 \phi}{m} \right) \\ -c^{1-2n} \left( p^{n-1} \cos \alpha - q^{n-1} \frac{\cos \phi}{m} \right)^2 \end{bmatrix}.$$

در بکارگیری مدل خطوط سیلان در شبیه سازی تحولات بافت کریستالی در فرآیند ECAP پارامترهای متعددی دخیل می‌باشند؛ بدیهی است که تعیین دقیق مقدار آنها میزان صحت شبیه سازی را تعیین خواهد کرد. صرف نظر از توانایی یک تابع سیلان در تفسیر خطوط سیلان ماده در قالب، مهمترین عامل در فرآیند شبیه سازی محاسبه دقیق میدان گرادیان سرعت می‌باشد. با ارائه تابع جامع سیلان توانایی مدل خط سیلان در تفسیر مسیر سیلان در فرآیند ECAP در حد قابل توجهی افزایش یافت. علیرغم قابلیت‌های این مدل در تفسیر خطوط سیلان، وجود ضعفهایی در مدل سازی موقعیت دقیق اجزاء بافت کریستالی (که با تغییر در پارامترهای مدل و تعیین دقیق آنها مرتفع نمی‌گردند) حاکی از نیاز به بازنگری در تعریف میدان گرادیان سرعت در مدل مذکور می‌باشد. این مهم با بازنگری نحوه تاثیر گذاری



$$\frac{dn}{dx} = \frac{I}{J} \quad \text{و} \quad \frac{dn}{dy} = \frac{W}{J} ,$$

$$I = R.G.(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} , \quad (10)$$

$$J = 1 - R \frac{(P+Q)^{\left(\frac{1}{n}\right)}}{n} \left\{ \frac{E}{(P+Q)} - \ln \left[ (P+Q)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right] \right\} ,$$

$$W = R.F.(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} .$$

مشتقات دوم پارامتر  $n$  در پیوست ۱ ارائه شده است.

مولفه‌های میدان سرعت سرعت ماده در نقطه شروع خط سیلان

$v_y$  و  $v_x = -v_0 \sin \alpha$  عبارتند از:  $(x_0, y_0)$

با  $v_0 \cos \alpha$  که  $v_0$  سرعت ورودی ماده در قالب می‌باشد. با

استفاده از این روابط و رابطه ۲ مقدار پارامتر  $\lambda$  در رابطه شماره ۹

به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda = \frac{-v_0}{\left\{ R \frac{P_0 \ln P_0}{n} + n P_0^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \right\}} , \quad (11)$$

$$P_0 = x_0^n (\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n .$$

و در ادامه مولفه‌های تانسور گرادین سرعت با استفاده از رابطه

۱۱ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$L_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dx} H + \frac{dH}{dx} \lambda ,$$

$$L_{yy} = -L_{xx} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \left[ \frac{d\lambda}{dy} K + \frac{dK}{dy} \lambda \right] , \quad (12)$$

$$L_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dy} H + \frac{dH}{dy} \lambda ,$$

$$L_{yx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = - \left[ \frac{d\lambda}{dx} K + \frac{dK}{dx} \lambda \right] .$$

کلیه مشتقات موجود در رابطه ۱۲ به تفصیل در پیوست شماره ۱

ارائه شده است. لازم به ذکر است که به خاطر پیچیدگی معادلات

به دست آمده، صحت آن‌ها به صورت عددی کنترل گردیده است.

### آنالیز خطوط سیلان در فرآیند ECAP آلومینیوم

خطوط سیلان مربوط به فرآیند ECAP با زاویه ۹۰ درجه آلیاژ

آلومینیوم AA2124 ارائه شده در مرجع [۱۲] با استفاده از رابطه

۱ مورد بررسی قرار گرفت که نتیجه آن در شکل ۳ نشان داده

شده است.

هر دو قالب افزایش می‌یابد. بنابراین میتوان پارامتر  $n$  را به صورت تابعی خطی از  $x_0$  تعریف کرد:

$$n = ax_0 + b . \quad (5)$$

توابع مرتبط با دو قالب ۹۰ و ۱۲۰ درجه در شکل ۲ نشان داده

شده است. با استفاده از رابطه ۱،  $x_0$  را می‌توان به صورت تابعی

از  $x$  و  $y$ ، به عنوان متغیرهای اصلی تابع سیلان در فرآیند

مشتق‌گیری، به دست آورد:

$$x_0 = \left[ \frac{(y \sin \alpha + x \cos \alpha)^n + \frac{(y \sin \phi - x \cos \phi)^n}{m}}{(\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n} \right]^{\frac{1}{n}} . \quad (6)$$

$x_0$  معرف نقطه شروع هر خط سیلان بوده و برای هر یک از آنها

مقدار ثابت و مشخصی وجود دارد. همان‌طور که گفته شد  $x_0$  در

رابطه ۶ تنها تابعی از  $x$  و  $y$  بوده و به عبارتی تنها متغیرهای

موجود در این رابطه می‌باشند و مابقی پارامترها ثابت در نظر گرفته

می‌شوند. با ترکیب روابط ۵ و ۶ پارامتر  $n$  به صورت تابعی از  $x$  و

$y$  به دست خواهد آمد:

$$n = a \left[ \frac{(y \sin \alpha + x \cos \alpha)^n + \frac{(y \sin \phi - x \cos \phi)^n}{m}}{(\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n} \right]^{\frac{1}{n}} + b . \quad (7)$$

و یا:

$$n = R(P+Q)^{\left(\frac{1}{n}\right)} + b , \quad (8)$$

$$P = (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^n ,$$

$$Q = (y \sin \phi - x \cos \phi)^n / m ,$$

$$R = a / (\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha) .$$

با جایگذاری رابطه ۷ در رابطه ۱، میدان سرعت در شرایط

متغیر به صورت رابطه ۹ به دست خواهد آمد:

$$v_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda H \quad \text{و} \quad H = \frac{\partial f}{\partial y} = \left\{ \frac{dn}{dy} E + nF \right\} ,$$

$$v_y = -\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda K \quad \text{و} \quad K = \frac{\partial f}{\partial x} = \left\{ \frac{dn}{dx} E + nG \right\} ,$$

$$F = \left[ \sin \alpha . P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} + \frac{\sin \phi}{m \left(\frac{1}{n}\right)} Q^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \right] , \quad (9)$$

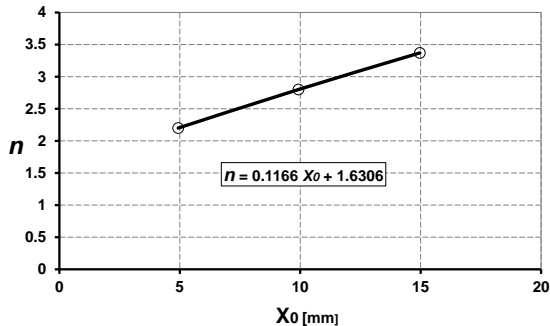
$$E = \left[ \frac{P \ln P + Q \ln (mQ)}{n} \right] ,$$

$$G = \left[ \cos \alpha . P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} - \frac{\cos \phi}{m \left(\frac{1}{n}\right)} Q^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \right] .$$

با استفاده از رابطه ۷، مشتقات اول و دوم پارامتر  $n$  قابل محاسبه

است:

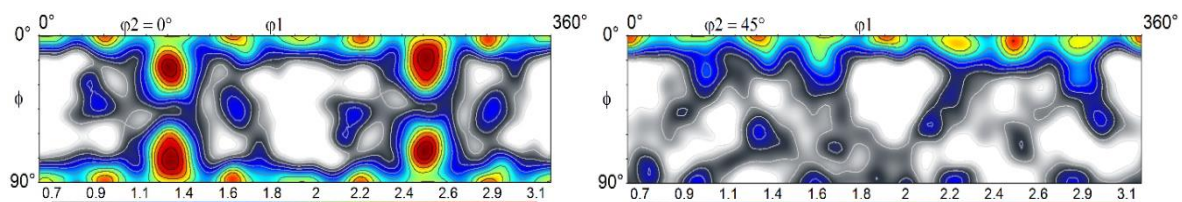
$n$  در شکل ۴ ارائه شده که ثابت  $a$  و  $b$  تعریف شده در رابطه ۵ نیز در آن نشان داده شده است. مقادیر مربوط به دو پارامتر دیگر در جدول ۱ ارائه شده است. لازم به ذکر است که کلیه داده های مرجع [۱۲] با کسب اجازه از نویسندگان آن در کار حاضر مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل ۴- تغییرات پارامتر  $n$  بر حسب  $x_0$  مربوط به خطوط سیلان ارائه شده در شکل ۳.

### شبیه سازی بافت کریستالی

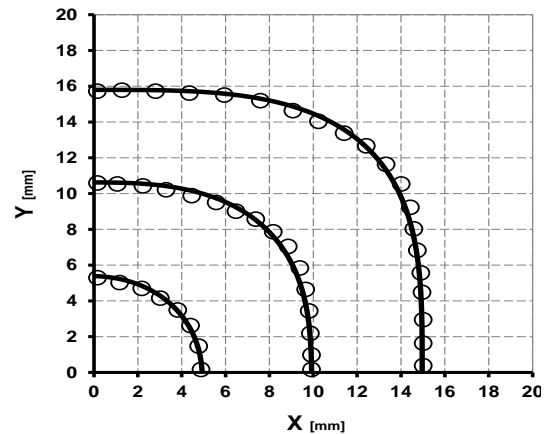
تاثیر شرایط پارامتر  $n$  بر قابلیت تابع جامع سیلان در تفسیر میدان تغییر شکل در فرآیند ECAP را می توان با استفاده از شبیه سازی تحولات بافت کریستالی در این فرآیند مورد ارزیابی قرار داد. بدین منظور داده های تجربی ارائه شده در مرجع [۱۲]، مربوط به تحولات بافت کریستالی آلیاژ آلومینیوم AA2124 به دست آمده از فرآیند ECAP مورد استفاده قرار گرفت. شکل ۵ بافت اولیه نمونه مذکور (که به ۲۰۰۰ جهت دانه تفکیک شده است) را نشان میدهد.



شکل ۵- بافت کریستالی اولیه نمونه آلیاژ آلومینیوم AA2124 مورد استفاده در فرآیند شبیه سازی در دو مقطع  $\phi_2=0^\circ$  و  $\phi_2=45^\circ$  از ODF.

افزار ATEX [۱۶] استفاده شده است. شکل ۵ نشان می دهد که ماده دارای بافت اولیه تقریباً ضعیفی است که بیشتر از اجزای مکعب کریستالی<sup>۲</sup> تشکیل شده است. در رابطه با نمونه تغییر شکل یافته، صفحه افقی میانی نمونه (XZ) موازی با محور X (شکل ۱) جهت اندازه گیری بافتهای کریستالی مورد استفاده قرار گرفته است؛ از این رو خط میانی

<sup>2</sup> Crystal Cube Components



شکل ۳- خطوط سیلان عملی نمونه ECAP آلومینیوم ارائه شده در مرجع [۱۲] (دوایر، با مجوز) که توسط خطوط پیوسته به دست آمده از رابطه ۱ شبیه سازی شده اند.

بر اساس داده های به دست آمده از خطوط سیلان ارائه شده در شکل ۳، تغییرات مربوط به پارامتر  $n$  بر حسب  $x_0$  برای خطوط مذکور به دست آمده و با بکارگیری رابطه ۱ پارامتر  $n$  به صورت تابعی از متغیرهای مکانی  $(X, Y)$  تعریف گردید. بر این مبنا مولفه های میدان سرعت و گرادیان آن با استفاده از پارامتر  $n$  متغیر محاسبه شدند. شکل ۴ تغییرات مربوط به پارامتر  $n$  بر حسب  $x_0$  برای خطوط سیلان ارائه شده در شکل ۳ را نشان میدهد.

همانطور که در شکل ۴ دیده میشود، با افزایش مقدار پارامتر  $n$  تقریباً به صورت خطی افزایش می یابد. همچنین رابطه تغییرات

جهت ارائه بافت کریستالی دو مقطع  $\phi_2=0^\circ$  و  $\phi_2=45^\circ$  از تابع توزیع جهت کریستالی<sup>۱</sup> (ODF) با محدوده  $(0^\circ-360^\circ)$  برای  $\phi_1$  و  $(0^\circ-90^\circ)$  برای  $\phi$  مورد استفاده قرار گرفته است؛ این مقاطع دربرگیرنده تمامی اجزاء اصلی بافت برشی ایده آل هستند. جهت ترسیم بافت کریستالی از نرم

<sup>1</sup> Orientation Distribution Function (ODF)



با بکارگیری داده‌های تانسور گرادیان سرعت محاسبه شده شبیه‌سازی بافت کریستالی در شرایط متغیر و ثابت پارامتر  $n$  با بکارگیری مدل ویسکوپلاستیک خود سازگار<sup>۱</sup> (VPSC) [۱۷] انجام گرفت. در این شبیه‌سازی از ۱۲ سیستم لغزش از نوع  $\{111\} <110>$  [۱۸] استفاده گردیده و کلیه پارامترهای مورد استفاده در مدل VPSC مطابق با مرجع [۱۲] در نظر گرفته شده است. همچنین از مدل ژو و همکاران [۱۹] نیز برای شبیه‌سازی کرنش سختی استفاده گردید.

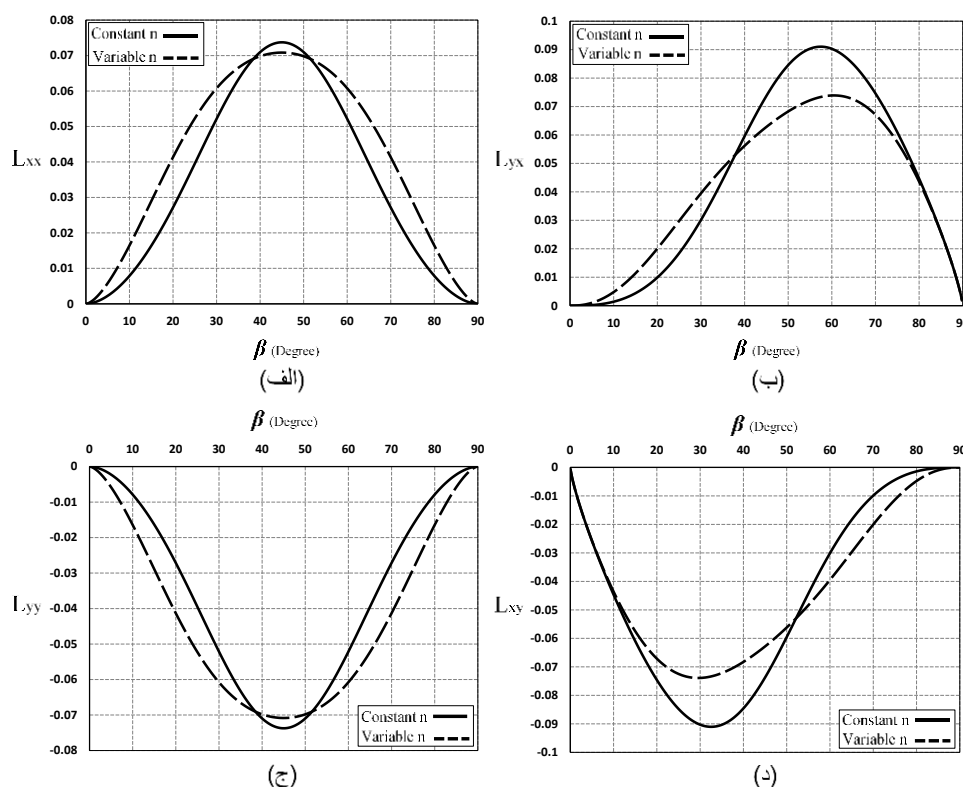
### نتیجه‌گیری و بحث

مقایسه‌ای بین تغییرات مولفه‌های تانسور گرادیان سرعت در دو حالت مختلف پارامتر  $n$  در شکل ۶ انجام گرفته است.

نشان داده شده در شکل ۳ به عنوان خط جریان در شبیه‌سازی‌ها در نظر گرفته شده که با توجه به شکل ۴ مقدار پارامتر  $n$  برای این خط ۲،۷۸۷۹ می‌باشد. سایر پارامترهای مربوط به این خط سیلان در جدول ۱ ارائه گردیده است. بر اساس داده‌های مذکور مقادیر مولفه‌های تانسور گرادیان سرعت در طول مسیر سیلان برای هر دو حالت متغیر و ثابت پارامتر  $n$  و با استفاده از روابط (۴) و (۱۲) محاسبه گردید.

جدول ۱- مقادیر پارامترهای  $\alpha$  و  $m$  خطوط سیلان ارائه شده در شکل ۳.

$x_0$ [mm]	۴.۹۳۳۶	۹.۹۲۵۴	۱۴.۹۶۵۲
$m$	۱.۲۲	۱.۲۱	۱.۲
$\alpha$ [درجه]	۳	۳	۰



شکل ۶- مقایسه تغییرات مولفه‌های تانسور گرادیان سرعت به کار گرفته شده در شبیه‌سازی بافت کریستالی در دو حالت پارامتر  $n$  ثابت و متغیر بر حسب زاویه  $\beta$  (شکل ۱).

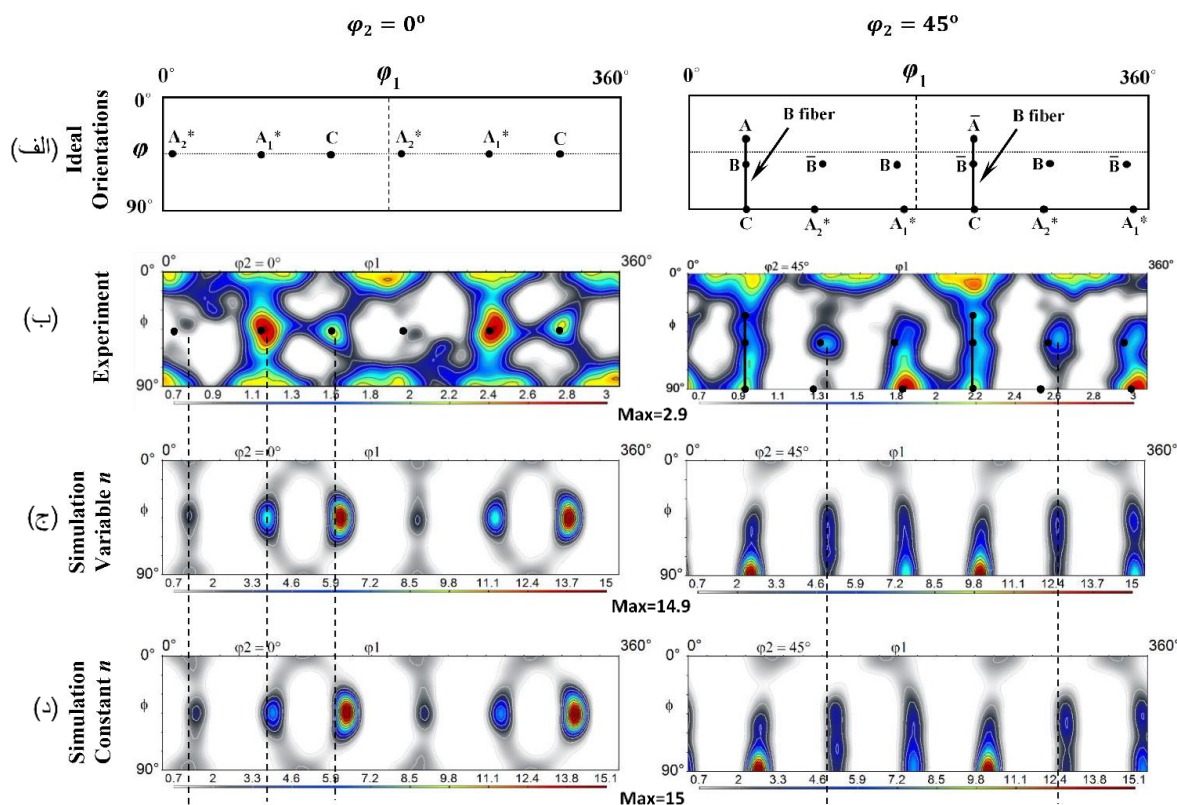
طور کلی در هر چهار مولفه، تغییر در پارامتر  $n$  از حالت ثابت به متغیر باعث کاهش ارتفاع نمودارها و در مقابل گسترش نسبی آنها به صورت عرضی گردیده است. در مولفه‌های  $L_{yy}$  و  $L_{xx}$  کاهش جزئی ارتفاع نمودارها و گسترش آنها در طرفین دیده می‌شود؛ در حالیکه در مولفه‌های  $L_{xy}$  و  $L_{yx}$  کاهش ارتفاع

در این شکل تغییرات مولفه‌های تانسور گرادیان سرعت بر اساس تغییرات زاویه مرکزی خط سیلان (زاویه  $\beta$  در شکل ۱) ارائه شده است. همانگونه که دیده می‌شود تغییرات محسوسی در اثر تغییر در نوع پارامتر  $n$  در مولفه‌های تانسور گرادیان سرعت ایجاد شده است. اگرچه تغییرات ایجاد شده در نمودارها متفاوت است، اما به

<sup>1</sup> Viscoplastic self-consistent (VPSC) model

بافت کریستالی مربوط به نمونه تغییر شکل یافته در شکل ۷ (ب) نشان داده شده است.

محسوس تر بوده اما گسترش عرضی نمودارها تنها در یک طرف صورت گرفته است.



شکل ۷- مقاطع  $\phi_2=0^\circ$  و  $\phi_2=45^\circ$  از ODF مربوط به موقعیت‌های ایده‌آل در فرآیند ECAP با زاویه  $90^\circ$  درجه (الف) ، بافت کریستالی نمونه عملی (ب) و بافت کریستالی شبیه‌سازی شده با استفاده از پارامتر  $n$  متغیر (ج) و ثابت (د).

تشخیص زاویه انحراف اجزای ODF نمونه آزمایش شده، کلیه موقعیت‌های ایده‌آل به صورت دایره‌های کوچک در مقاطع ODF مربوطه مشخص شده‌اند. علاوه بر این، برای آشکار شدن تفاوت بین اجزاء بافت‌های کریستالی تجربی و شبیه‌سازی شده، موقعیت اجزاء تجربی توسط خط چین‌هایی مشخص شده‌اند. زاویه چرخش هر یک از اجزای ODF از موقعیت‌های ایده‌آل مربوطه در جهت  $\phi_1$  در جدول ۲ ارائه شده است.

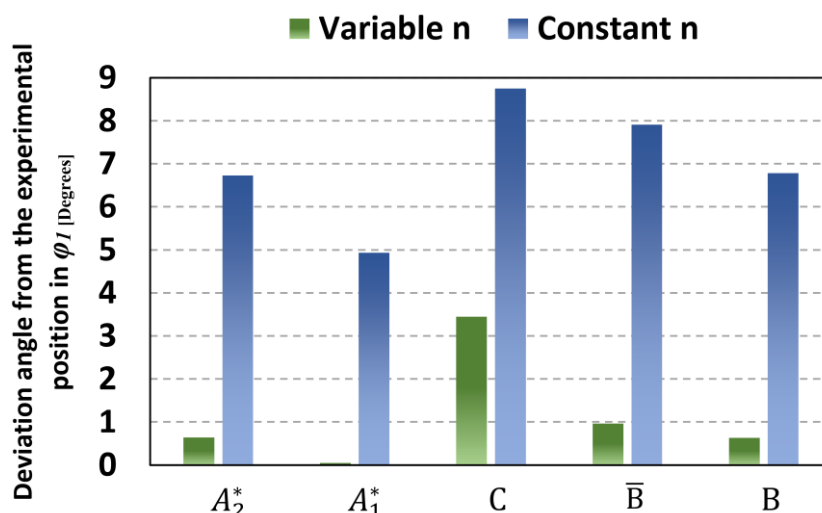
این شکل می‌دهد که اگرچه اجزای مکعبی در بافت تجربی نمونه تغییر شکل یافته ناپدید نشده‌اند با این حال این بافت حاوی اجزای برشی مورد انتظار در فرآیند ECAP با زاویه  $90^\circ$  درجه می‌باشد. همچنین اجزاء مذکور از انحرافات متفاوتی نسبت به موقعیت‌های ایده‌آل خود برخوردار هستند. بافت‌های کریستالی شبیه‌سازی شده با استفاده از پارامتر  $n$  متغیر و ثابت در دو مقطع ODF به ترتیب در شکل‌های ۷ (ج) و (د) ارائه شده است. شکل مربوط به کلید جهات کریستالی ایده‌آل در فرآیند ECAP با زاویه  $90^\circ$  درجه نیز در شکل ۷ (الف) گنجانده شده است. به منظور

جدول ۲- زوایای چرخش اجزاء ODF بافت تجربی از موقعیت‌های ایده‌آل در جهت  $\phi_1$  .

اجزاء بافت کریستالی تجربی	$A_2^*$	$A_1^*$	C	$\bar{B}$	B
زوایای چرخش (درجه)	۱۱۶۱	۵۰	۲۰۲	۴۰۴	۸۰۲

زوایای انحراف اجزای بافت کریستالی شبیه‌سازی شده در هر دو حالت نسبت به موقعیت اجزاء متناظر تجربی نیز اندازه‌گیری شده‌اند که نتایج آن در شکل ۸ نشان داده شده است.

جدول ۲ نشان می‌دهد که کمترین و بیشترین انحراف به ترتیب مربوط است به اجزاء  $A_2^*$  و C.



شکل ۸- زوایای انحراف اجزاء بافت کریستالی شبیه سازی شده در دو حالت پارامتر  $n$  ثابت و متغیر نسبت به موقعیت اجزاء تجربی متناظر در جهت  $\phi_1$ .

اصلاح موقعیت جهات کریستالی موفق بوده در بهبود شدت بافت کریستالی عملکرد مناسبی نداشته است.

### نتایج

براساس توضیحات ارائه شده، نتایج بدست آمده را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- آنالیز خطوط سیلان تجربی وجود یک رابطه مستقیم و خطی بین پارامتر  $n$  تابع جامع سیلان و موقعیت اولیه خط جریان  $(x_0)$  را نشان داد. این بدان معنی است که پارامتر  $n$  باید به عنوان یک پارامتر متغیر و به صورت تابعی از متغیرهای مکانی  $(x, y)$  در فرآیند محاسبه مولفه‌های میدان سرعت و گرادیان آن در نظر گرفته شود.

- بافت کریستالی شبیه سازی شده در شرایط  $n$  متغیر بسیار بهتر از شرایط  $n$  ثابت بوده به نحوی که در مقایسه با نتایج تجربی، انحراف در موقعیت اجزای بافت شبیه سازی شده با استفاده از  $n$  متغیر در حد قابل توجهی کمتر از شرایط  $n$  ثابت می‌باشد.

- تغییر در شرایط  $n$  تأثیر قابل توجهی بر شدت نسبی بافت کریستالی نداشته؛ با این حال تفاوت قابل توجهی بین بافت های شبیه سازی شده و تجربی وجود دارد.

### ملاحظات اخلاقی پیروی از اصول اخلاق پژوهش

تمامی اصول و ملاحظات اخلاقی در آماده‌سازی این مقاله در نظر گرفته شده است.

### حامی مالی

از نتایج ارائه شده در شکل ۸ می‌توان دریافت که زاویه انحراف تمامی اجزاء در شرایط  $n$  متغیر به طور قابل توجهی کمتر از شرایط  $n$  ثابت است. در شرایط متغیر پارامتر  $n$ ، بیشترین مقدار انحراف مربوط به جزء C است که حدود ۳.۵ درجه می‌باشد. زاویه انحراف سایر اجزاء کمتر از یک درجه بوده و حتی برای جزء  $A_1^*$  تقریباً هیچ انحرافی مشاهده نمی‌شود. بنابراین کاملاً واضح است که شرایط متغیر پارامتر  $n$  نتایج شبیه سازی بسیار بهتری را نسبت به شرایط ثابت این پارامتر ارائه داده است. بدیهی است که این مطلب بیانگر این واقعیت است که میدان گرادیان سرعت ارائه شده تحت شرایط متغیر پارامتر  $n$  از دقت بالاتری نسبت به شرایط ثابت آن برخوردار می‌باشد؛ و در واقع تغییرات اعمال شده بر روی مولفه‌های گرادیان سرعت که در شکل ۶ نمایش داده شده‌اند اثراتی کاملاً مثبت بر فرآیند شبیه سازی بافت کریستالی از خود برجای گذاشته است.

با وجود توانایی مدل‌های اشاره شده در بخش ۱ در پیش‌بینی موقعیتهای ارجح کریستالی در فرآیند ECAP، بارزترین تفاوت بین بافتهای کریستالی تجربی و شبیه‌سازی شده اختلاف در شدت آنها می‌باشد؛ به گونه‌ای که بافتهای شبیه‌سازی شده از شدت بالاتری نسبت به نمونه‌های متناظر تجربی برخوردار بوده و این اختلاف بسته به مدل مورد استفاده متفاوت است. شدت بافت کریستالی شکل‌های ۸ (ب) و (ج) وجود این پدیده در رابطه با تابع مورد استفاده در کار حاضر را نشان می‌دهد. با این حال مقایسه شدت بافتهای شبیه سازی شده در شکل‌های ۸ (ج) و (د) نشان می‌دهد که اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین شدت بافتهای کریستالی شبیه‌سازی شده در دو حالت ثابت و متغیر پارامتر  $n$  وجود ندارد و به عبارتی تغییر در حالت پارامتر  $n$  آن گونه که در

این کار توسط معاونت پژوهشی دانشگاه کردستان و در قالب طرح پژوهشی شماره ۴/۱۷۶۹۹ پشتیبانی و حمایت گردیده است.

### تعارض منافع

مقاله حاضر فاقد هرگونه تعارض منافع می‌باشد.

### مشارکت نویسندگان

کلیه امور مربوط به این مقاله توسط آرمان حسینی انجام گرفته است.

## References

1. Segal, V.M., "Equal channel angular extrusion: from macromechanics to structure formation", *Materials Science and Engineering A*, 271(1), pp. 322-333, 1999.
2. Shaban Ghazani, M., "Application of the combination of extrusion and equal channel angular pressing for processing fine grained and nanostructured metallic materials", *Journal of New Materials*, 10(2), pp. 17-32, 2020. (In Persian)
3. Gholinia, A., Bate, P., Prangnell, P.B., "Modeling texture development during equal channel angular extrusion of aluminum", *Acta Materialia*, 50, pp. 2121-2136, 2002.
4. Tóth, L.S., et al., "Analysis of texture evolution in equal channel angular extrusion of copper using a new flow field", *Acta Materialia*, 52(7), pp. 1885-1898, 2004.
5. Bagherzadeh, S., K. Abrinia, and Q. Han, "Analysis of plastic deformation behavior of ultrafine-grained aluminum processed by the newly developed ultrasonic vibration enhanced ECAP: Simulation and experiments", *Journal of Manufacturing Processes*, 50, pp. 485-497, 2020.
6. Li, S., et al., "Finite element analysis of the plastic deformation zone and working load in equal channel angular extrusion", *Materials Science and Engineering: A*, 382(1), pp. 217-236, 2004.
7. Beyerlein, I.J. and C.N. Tomé, "Analytical modeling of material flow in equal channel angular extrusion (ECAE) ", *Materials Science and Engineering A*, 380(1), pp. 171-190, 2004.
8. Hasani, A. and Tóth, L.S., "A fan-type flow-line model in equal channel angular extrusion", *Scripta Materialia*, 61(1), pp. 24-27, 2009.
9. Arruffat-Massion, R., Tóth, L.S., Mathieu, J.P., "Modeling of deformation and texture development of copper in a 120 degrees ECAE die", *Scripta Materialia*, 54, pp. 1667-1672, 2006.
10. Hasani, A., Lapovok, R., Tóth, L.S., Molinari, A., "Deformation field variations in equal channel angular extrusion due to back pressure", *Scripta Materialia*, 58, pp. 771-774, 2008.
11. Hasani, A. and L.S. Toth, "Deformation Field Analysis in Equal Channel Angular Extrusion of Metals Using Asymmetric Flow Function", *Advanced Engineering Materials*, 17(12), pp. 1760-1772, 2015.
12. Tóth, L.S., Lapovok, R., Hasani, A., Gu, C.F., "Non-equal channel angular pressing of aluminum alloy", *Scripta Materialia*, 2009. 61: pp. 1121-1124.
13. Hasani, A., Tóth, L.S. and Beausir, B., "Principles of Nonequal Channel Angular Pressing", *Journal of Engineering Materials and Technology*, 132(3), article 031001, 2010.
14. Hasani, A., Tóth, L.S., and Mardokh Rouhani, S., "A New Flow Line Function for Modeling Material Trajectory and Textures in Nonequal-Channel Angular Pressing", *Advances in Materials Science and Engineering*, 2019, pp.1-6, 2019.
15. Hasani, A., Sepsi, M., Feyzi, S. and Tóth, L.S., "Deformation field and texture analysis in T-ECAP using a flow function", *Materials Characterization*, 173, Pages 110912, 2021.
16. Beausir, B. and Fundenberger, J.J., *Analysis Tools for Electron and X-ray diffraction*, ATEX - software. 2017: Université de Lorraine, Metz, France.
17. Molinari, A. and L.S. Tóth, Tuning a self consistent viscoplastic model by finite element results—I. Modeling. *Acta Metallurgica et Materialia*, 1994. 42(7): pp. 2453-2458.
18. Arzaghi, M., Beausir, B., Tóth, L.S., Contribution of non-octahedral slip to texture evolution of fcc polycrystals in

simple shear, *Acta. Mater.*, 2009, 57, 2440-2453.

19. Zhou, Y., K.W. Neale, and Tóth, L.S. "A modified model for simulating latent hardening during the plastic deformation of rate-dependent FCC polycrystals". *International Journal of Plasticity*, 1993. 9(8): pp. 961-978.

## پیوست ۱

از رابطه ۹ میتوان موارد زیر را به دست آورد:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d^2n}{dydx} E + \frac{dE}{dx} \frac{dn}{dy} + \frac{dn}{dx} F + \frac{dF}{dx} n \quad (1-1)$$

$$\frac{dH}{dy} = \frac{d^2n}{d^2y} E + \frac{dE}{dy} \frac{dn}{dy} + \frac{dn}{dy} F + \frac{dF}{dy} n$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{d^2n}{d^2x} E + \frac{dE}{dx} \frac{dn}{dx} + \frac{dn}{dx} G + \frac{dG}{dx} n \quad (2-1)$$

$$\frac{dK}{dy} = \frac{d^2n}{dxdy} E + \frac{dE}{dy} \frac{dn}{dx} + \frac{dn}{dy} G + \frac{dG}{dy} n$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\left\{ \frac{dP}{dx} (1 + \ln P) + \frac{dQ}{dx} \left[ \frac{1}{m} + \ln(mQ) \right] \right\} n - \frac{dn}{dx} [P \ln P + Q \ln(mQ)]}{n^2} \quad (3-1)$$

$$\frac{dE}{dy} = \frac{\left\{ \frac{dP}{dy} (1 + \ln P) + \frac{dQ}{dy} \left[ \frac{1}{m} + \ln(mQ) \right] \right\} n - \frac{dn}{dy} [P \ln P + Q \ln(mQ)]}{n^2}$$

$$\frac{dF}{dx} = \sin \alpha \cdot P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln P}{n^2} \frac{dn}{dx} + \frac{(n-1)}{nP} \frac{dP}{dx} \right] + \frac{\sin \phi}{m} (mQ)^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln(mQ)}{n^2} \frac{dn}{dx} + \frac{(n-1)}{nQ} \frac{dQ}{dx} \right] \quad (4-1)$$

$$\frac{dF}{dy} = \sin \alpha \cdot P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln P}{n^2} \frac{dn}{dy} + \frac{(n-1)}{nP} \frac{dP}{dy} \right] + \frac{\sin \phi}{m} (mQ)^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln(mQ)}{n^2} \frac{dn}{dy} + \frac{(n-1)}{nQ} \frac{dQ}{dy} \right]$$

$$\frac{dG}{dx} = \cos \alpha \cdot P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln P}{n^2} \frac{dn}{dx} + \frac{(n-1)}{nP} \frac{dP}{dx} \right] - \frac{\cos \phi}{m} (mQ)^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln(mQ)}{n^2} \frac{dn}{dx} + \frac{(n-1)}{nQ} \frac{dQ}{dx} \right] \quad (5-1)$$

$$\frac{dG}{dy} = \cos \alpha \cdot P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln P}{n^2} \frac{dn}{dy} + \frac{(n-1)}{nP} \frac{dP}{dy} \right] - \frac{\cos \phi}{m} (mQ)^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \left[ \frac{\ln(mQ)}{n^2} \frac{dn}{dy} + \frac{(n-1)}{nQ} \frac{dQ}{dy} \right]$$

که از رابطه ۸ مشتقات P و Q به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P \ln P}{n} \frac{dn}{dx} + n \cos \alpha P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \quad (6-1)$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{P \ln P}{n} \frac{dn}{dy} + n \sin \alpha P^{\left(\frac{n-1}{n}\right)}$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{Q \ln(mQ)}{n} \frac{dn}{dx} - \frac{n \cos \phi Q^{\left(\frac{n-1}{n}\right)}}{m^{\left(\frac{1}{n}\right)}} \quad (6-1)$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{Q \ln(mQ)}{n} \frac{dn}{dy} + \frac{n \sin \phi Q^{\left(\frac{n-1}{n}\right)}}{m^{\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

مشتقات دوم پارامتر n با استفاده از رابطه ۱۰ به صورت زیر به دست می‌آیند:



$$\begin{aligned} \frac{d^2n}{dx^2} &= \frac{\frac{dI}{dx}J - \frac{dJ}{dx}I}{J^2} = \frac{1}{J} \left[ \frac{dI}{dx} - \frac{dJ}{dx} \frac{dn}{dx} \right], \\ \frac{d^2n}{dx dy} &= \frac{\frac{dI}{dy}J - \frac{dJ}{dy}I}{J^2} = \frac{1}{J} \left[ \frac{dI}{dy} - \frac{dJ}{dy} \frac{dn}{dx} \right], \\ \frac{d^2n}{dy^2} &= \frac{\frac{dW}{dy}J - \frac{dJ}{dy}W}{J^2} = \frac{1}{J} \left[ \frac{dW}{dy} - \frac{dJ}{dy} \frac{dn}{dy} \right], \\ \frac{d^2n}{dy dx} &= \frac{\frac{dW}{dx}J - \frac{dJ}{dx}W}{J^2} = \frac{1}{J} \left[ \frac{dW}{dx} - \frac{dJ}{dx} \frac{dn}{dy} \right]. \end{aligned} \quad (Y-1)$$

و مشتقات I, J و W:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= R(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} \left\{ G \left[ \frac{(1-n)}{n(P+Q)} \left( \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \right) - \frac{\ln(P+Q)}{n^2} \frac{dn}{dx} \right] + \frac{dG}{dx} \right\}, \\ \frac{dI}{dy} &= R(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} \left\{ G \left[ \frac{(1-n)}{n(P+Q)} \left( \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \right) - \frac{\ln(P+Q)}{n^2} \frac{dn}{dy} \right] + \frac{dG}{dy} \right\}. \end{aligned} \quad (A-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dx} &= 1 - \frac{RU^{\left(\frac{1}{n}\right)}}{n} \left\{ \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{E}{U} - \frac{\ln U}{n} \right) \left[ \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} - \frac{dn}{dx} \left( 1 + \frac{\ln U}{n} \right) \right] + \frac{1}{U^2} \left( \frac{dE}{dx} U - \frac{dU}{dx} E \right) + \frac{\ln U}{n^2} \frac{dn}{dx} - \frac{1}{nU} \frac{du}{dx} \right\}, \\ \frac{dJ}{dy} &= 1 - \frac{RU^{\left(\frac{1}{n}\right)}}{n} \left\{ \left( \frac{1}{n} \right) \left( \frac{E}{U} - \frac{\ln U}{n} \right) \left[ \frac{1}{U} \frac{dU}{dy} - \frac{dn}{dy} \left( 1 + \frac{\ln U}{n} \right) \right] + \frac{1}{U^2} \left( \frac{dE}{dy} U - \frac{dU}{dy} E \right) + \frac{\ln U}{n^2} \frac{dn}{dy} - \frac{1}{nU} \frac{du}{dy} \right\}, \end{aligned} \quad (9-1)$$

$$U = (P + Q).$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= R(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} \left\{ F \left[ \frac{(1-n)}{n(P+Q)} \left( \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \right) - \frac{\ln(P+Q)}{n^2} \frac{dn}{dx} \right] + \frac{dF}{dx} \right\}, \\ \frac{dW}{dy} &= R(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} \left\{ F \left[ \frac{(1-n)}{n(P+Q)} \left( \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \right) - \frac{\ln(P+Q)}{n^2} \frac{dn}{dy} \right] + \frac{dF}{dy} \right\}. \end{aligned} \quad (10-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dx} &= R(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} \left\{ F \left[ \frac{(1-n)}{n(P+Q)} \left( \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \right) - \frac{\ln(P+Q)}{n^2} \frac{dn}{dx} \right] + \frac{dF}{dx} \right\}, \\ \frac{dW}{dy} &= R(P+Q)^{\left(\frac{1-n}{n}\right)} \left\{ F \left[ \frac{(1-n)}{n(P+Q)} \left( \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \right) - \frac{\ln(P+Q)}{n^2} \frac{dn}{dy} \right] + \frac{dF}{dy} \right\}. \end{aligned} \quad (11-1)$$

مشتق‌های مربوط به پارامتر  $\lambda$  با استفاده از رابطه ۱۱ به دست خواهند آمد. ابتدا این رابطه به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-v_0}{K_k}, \\ K_k &= \left\{ R \frac{P_0 \ln P_0}{n} + n P_0^{\left(\frac{n-1}{n}\right)} \right\}, \\ P_0 &= x_0^n (\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n. \end{aligned} \quad (12-1)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx} &= \frac{v_0}{K_k^2} \frac{dK_k}{dx}, \\ \frac{d\lambda}{dy} &= \frac{v_0}{K_k^2} \frac{dK_k}{dy}. \end{aligned} \quad (13-1)$$

که در آن:

$$\frac{dK_k}{dx} = R \left\{ \frac{\left[ n \left( \frac{dP_0}{dx} \right) (1 + \ln P_0) - \left( \frac{dn}{dx} \right) P_0 \ln P_0 \right]}{n^2} \right\} + P_0^{\left( \frac{n-1}{n} \right)} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dx} \right) \ln P_0 + \frac{(n-1)}{P_0} \left( \frac{dP_0}{dx} \right) + \left( \frac{dn}{dx} \right) \right], \quad (14-1)$$

$$\frac{dK_k}{dy} = R \left\{ \frac{\left[ n \left( \frac{dP_0}{dy} \right) (1 + \ln P_0) - \left( \frac{dn}{dy} \right) P_0 \ln P_0 \right]}{n^2} \right\} + P_0^{\left( \frac{n-1}{n} \right)} \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{dn}{dy} \right) \ln P_0 + \frac{(n-1)}{P_0} \left( \frac{dP_0}{dy} \right) + \left( \frac{dn}{dy} \right) \right].$$

با استفاده از رابطه ۱۱ مشتقات  $P_0$  به دست خواهد آمد:

$$\frac{dP_0}{dx} = (\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n \left[ \left( \frac{dn}{dx} \right) \ln x_0 + \frac{n}{x_0} \left( \frac{dx_0}{dx} \right) \right] x_0^n, \quad (15-1)$$

$$\frac{dP_0}{dy} = (\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n \left[ \left( \frac{dn}{dy} \right) \ln x_0 + \frac{n}{x_0} \left( \frac{dx_0}{dy} \right) \right] x_0^n.$$

و سرانجام مشتقات  $x_0$  با استفاده از رابطه ۶:

$$\frac{dx_0}{dx} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{(P+Q)} \left( \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx} \right) - \left( \frac{1}{n} \right) \ln \left[ \frac{(P+Q)}{(\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n} \right] \left( \frac{dn}{dx} \right) \right\} \left[ \frac{(P+Q)^{\left( \frac{1}{n} \right)}}{(\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)} \right], \quad (16-1)$$

$$\frac{dx_0}{dy} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{(P+Q)} \left( \frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy} \right) - \left( \frac{1}{n} \right) \ln \left[ \frac{(P+Q)}{(\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)^n} \right] \left( \frac{dn}{dy} \right) \right\} \left[ \frac{(P+Q)^{\left( \frac{1}{n} \right)}}{(\sin \alpha \cot \phi + \cos \alpha)} \right].$$