

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و هفتم، آذر و دی ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مبادلات تولید و محدودیت‌های وزنی در تحلیل پوششی داده‌های نسبی

جواد گرامی

گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۹/۲۸

چکیده

در این مقاله به بررسی موضوع اعمال اطلاعات برتری ارزشی در تحلیل پوششی داده‌ها^۲ در حضور داده‌های نسبی^۳ می‌پردازیم. ما نشان می‌دهیم اعمال محدودیت‌های وزنی^۴ در مدل آنالیز نسبی معادل در نظر گرفتن مبادلات تولید^۵ میان نسبت‌های مولفه‌های ورودی به خروجی در مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی^۶ می‌باشد. در ادامه یک مقایسه میان نمره کارایی و رتبه متناظر با واحدهای تصمیم‌گیرنده حاصل از این دو مدل با انتخاب متفاوت محدودیت‌های وزنی بر اساس یک مثال کاربردی انجام می‌دهیم و به ارزیابی عملکرد و رتبه‌بندی واحدهای دانشگاهی با در نظر گرفتن محدودیت‌های وزنی براساس نظر مدیران ارشد دانشگاه می‌پردازیم. در انتها نتایج حاصل از تحقیق را می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، آنالیز نسبی، تحلیل پوششی داده‌های نسبی، محدودیت وزنی، مبادلات تولید.

Email: geramijavad@gmail.com

عهده‌دار مکاتبات:

² Data envelopment analysis (DEA)

³ Ratio data

⁴ weight restrictions

⁵ Production trade-offs

⁶ Ratio based data envelopment analysis (DEA-R)

۱- مقدمه

برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده مدل‌های متفاوتی در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه شده است. یک طبقه از این مدل‌ها مدل‌هایی می‌باشند که از نسبت مؤلفه‌های ورودی به خروجی (یا بلعکس) برای اندازه‌گیری کارایی از واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده می‌کنند (وو و لیانگ^۷ [۲۱]، گرامی^۸ و همکاران [۴۰]).

این نسبت‌ها برای تصمیم‌گیرنده دارای اهمیت می‌باشند، این داده‌ها لزوماً به صورت اعداد اعشاری یا کسری نمی‌باشند و می‌توانند بصورت مستقیم در مدل قرار گیرند. یکی از مدل‌ها برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور نسبت داده‌ها، مدل آنالیز نسبتی^۹ می‌باشد (زا و لیانگ^{۱۰} [۲۲]، سانگ^{۱۱} و همکاران [۱۷]).

این مدل‌ها یک ترکیب وزن‌دار شده از تمام نسبت‌های مولفه‌های ورودی به خروجی (یا بلعکس) را برای محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده به کار می‌برند و کارایی واحد تحت ارزیابی را در مقابل سایر واحدها به دست می‌آورند این مدل‌ها در شکل‌های مضربی یا پوششی ارائه گردیدند (چن و ام سی گینیس^{۱۲} [۲]). در مدل‌های مضربی نسبت وزن‌دار شده تمام مولفه‌های ورودی به خروجی (یا بلعکس) از واحد تحت ارزیابی را به نحوی حداکثر می‌کنیم تا کارایی این واحد در مقابل کارایی سایر واحدها حداکثر گردد.

یکی دیگر از این مدل‌ها که از نسبت مولفه‌های ورودی به خروجی (یا بلعکس) استفاده می‌کند مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی می‌باشد. این مدل در ابتدا به وسیله دسپیک^{۱۳} و همکاران [۳] ارائه گردید. آنها رابطه میان مقادیر کارایی حاصل از مدل سنتی تحلیل پوششی داده‌ها (CCR) در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس ثابت را با مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی به دست آوردند. در ادامه وی^{۱۴} و همکاران [۱۸-۲۰] به بررسی رابطه میان مقادیر کارایی حاصل از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی و مدل‌های سنتی را در یک شکل متفاوت ارائه دادند. آنها نشان دادند که مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی در مقابل مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های سنتی (CCR) در ماهیت ورودی، از بعضی از مشکلات نظیر عدم تخمین درست کارایی و ناکارایی کاذب جلوگیری می‌کنند. آنها همچنین نشان دادند که مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی در ماهیت ورودی دارای مقادیر کارایی بزرگتر نسبت به مقادیر متناظر خود حاصل از مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها (CCR) می‌باشند آنها بیان داشتند که مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی می‌توانند یک جایگزین مناسب برای مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های سنتی (CCR) باشند. گرامی و همکاران [۶]، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی را در شکل غیرشعاعی ارائه دادند. آنها کارایی واحد تصمیم‌گیرنده را بر اساس مقادیر اسلک متناظر با تمام نسبت‌های مولفه‌های ورودی به خروجی ارائه دادند. مدل آنها SBM DEA-R نام داشت. آنها رابطه میان مقادیر کارایی حاصل از مدل سنتی تحلیل پوششی داده‌ها (CCR) در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس ثابت را با مدل SBM DEA-R به دست آوردند. آنها مدل‌های ابر کارایی SBM DEA-R را برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور داده‌های بدست آوردند. گرامی و همکاران [۵] به بررسی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی برای ساختار شبکه در تحلیل پوششی داده‌ها پرداختند. آنها رابطه میان مقادیر کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در مراحل اول، دوم و سراسری را

⁷ Wu and Liang

⁸ Gerami

⁹ Ratio analysis

¹⁰ Zha and Liang

¹¹ Song

¹² Chen and McGinnis

¹³ Despic

¹⁴ Wei

ارائه دادند. گرامی و همکاران [۷] به بررسی ساختار زنجیره تامین در بیمارستان بر اساس مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی پرداختند. مظفری و همکاران [۸] به بررسی مدل‌های کارایی هزینه و درآمد در حضور داده‌های نسبی پرداختند. مظفری و همکاران [۹] رابطه میان مقادیر کارایی در مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها (BCC) در عدم حضور ورودی‌ها را با مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی را به دست آوردند. مظفری و همکاران [۱۰]، مجموعه امکان تولید در حضور داده‌های نسبی را ارائه دادند. آنها مرز کارایی از مجموعه امکان تولید در حضور داده‌های نسبی را به دست آوردند. آنها یک الگوریتم برای به دست آوردن تمام وجوه^{۱۵} از مجموع امکان تولید در حضور داده‌های نسبی ارائه دادند.

یکی دیگر از راه‌های اعمال اطلاعات ارزشی تصمیم‌گیرنده در پروسه ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده در تحلیل پوششی داده‌ها، استفاده از محدودیت‌های وزنی بر روی مولفه‌های ورودی یا خروجی می‌باشد. در ابتدا آلن^{۱۶} و همکاران [۱]، رول^{۱۷} و همکاران [۱۶]، اعمال محدودیت‌های وزنی را در مدل‌های مضربی تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند. همچنین آنها نشان دادند که اعمال محدودیت‌های وزنی بر روی مولفه‌های ورودی یا خروجی می‌تواند مرز کارایی از مجموعه امکان تولید را تغییر دهد و ممکن است مقدار کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده نسبت به قبل از اعمال محدودیت‌های وزنی کمتر گردد. آلن و همکاران [۱] نشان دادند که اعمال محدودیت‌های وزنی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها ممکن است منجر به نشدنی شدن مدل گردد.

پودینوسکی^{۱۸} [۱۱] به بررسی رابطه میان محدودیت‌های وزنی در مدل‌های مضربی و مبادلات تولید در مدل‌های پوششی از تحلیل پوششی داده‌ها پرداخت. او تکنولوژی تولید در حضور مبادلات تولید را در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس ثابت و متغیر ارائه داد.

پودینوسکی و بوزدین^{۱۹} [۱۳] موضوع تولید نامحدود و آزاد از بردار خروجی‌ها در تکنولوژی تولید را مطرح کردند. آنها نشان دادند که اگر مدل مضربی برای هر واحد تصمیم‌گیرنده مشاهده شده، شدنی باشد، آنگاه استفاده از محدودیت‌های وزنی ممکن است منجر به تولید نامحدود و آزاد خروجی‌ها گردد.

پودینوسکی و بوزدین [۱۴] به بررسی رابطه میان محدودیت‌های وزنی در مدل‌های مضربی و مبادلات تولید در مدل‌های پوششی در تحلیل پوششی داده‌ها پرداختند. آنها تکنولوژی تولید در حضور مبادلات تولید را در تکنولوژی‌های بازده به مقیاس ثابت^{۲۰} و متغیر ارائه دادند. آنها شرایط لازم و کافی برای سازگاری وزن‌ها در مبادلات تولید در مبادلات تولید را ارائه دادند و بیان داشتند که چگونه می‌توان با انتخاب یک مبادله تولید مناسب از برآمد ناسازگاری وزن‌ها جلوگیری کرد.

پودینوسکی [۱۲] به محاسبه اهداف کارا در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با مبادلات تولید پرداختند. پودینوسکی و همکاران [۱۵] به بررسی موضوع معادلات تولید و محدودیت‌های وزنی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در حضور داده‌های نسبی پرداختند. آنها یک شکل خاص از داده‌های نسبی را در نظر گرفتند. این داده‌های نسبی می‌توانند به صورت اعداد اعشاری یا کسری باشند. در مدل آنها از نسبت مستقیم داده‌ها در مدل استفاده نمی‌شود.

¹⁵ Facet

¹⁶ Allen

¹⁷ Roll

¹⁸ Podinovski

¹⁹ Podinovski and Bouzdine-Chameeva

²⁰ Variable and Constant returns to scal

می‌توان گفت که سهم اصلی این مطالعه به صورت زیر می‌باشد.

در این مطالعه در ابتدا به بررسی مدل آنالیز نسبی در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم و این مدل‌ها را در حضور محدودیت‌های وزنی ارائه می‌دهیم. در ادامه شکل‌های پوششی و مضربی مدل آنالیز نسبی را به دست می‌آوریم. همچنین رابطه میان مدل آنالیز نسبی (Ratio analysis) و مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی (DEA-R) در حضور محدودیت‌های وزنی را به دست می‌آوریم. ما نشان می‌دهیم که استفاده از محدودیت‌های وزنی در مدل آنالیز نسبی (در شکل مضربی^{۲۱}) معادل در نظر گرفتن مبادلات تولید در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی (شکل پوششی^{۲۲}) می‌باشد.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم به بررسی مدل آنالیز نسبی در حضور محدودیت‌های وزنی محدودیت‌های وزنی می‌پردازیم. در بخش سوم، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی در حضور مبادلات تولید را به دست می‌آوریم. در بخش چهارم یک مطالعه کاربردی از برای واحدهای دانشگاهی را ارائه می‌دهیم و در بخش پنجم، نتایج حاصل از تحقیق را می‌آوریم.

۲- مدل آنالیز نسبی در حضور محدودیت‌های وزنی

n واحد تصمیم‌گیرنده بصورت $DMU_j = (X_j, Y_j), j = 1, \dots, n$ را در نظر بگیرید. هر یک از این واحدها، بردار ورودی را $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ برای تولید بردار خروجی $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ مصرف می‌کند. فرض کنید که این بردارها دارای مولفه‌های مثبت باشند یعنی

$$x_{ij} > 0, y_{rj} > 0, i = 1, \dots, m, \\ r = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n.$$

فرض کنید که

$$w_{ir}, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s.$$

نشان‌دهنده وزن متناظر با نسبت مولفه i -ام ورودی به مولفه r -ام از خروجی باشد. مدل آنالیز نسبی برای محاسبه کارایی از واحد تحت ارزیابی یعنی $DMU_o = (X_o, Y_o)$ بصورت زیر ارائه می‌گردد. (گرامی و همکاران [۶]).

$$\gamma_o^* = \min \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^m w_{ir} \left(\frac{x_{io}}{y_{ro}} \right) \\ s. t. \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^m w_{ir} \left(\frac{x_{ij}}{y_{rj}} \right) \geq 1, j = 1, \dots, n, \\ w_{ir} \geq 0, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s. \quad (1)$$

تعریف (۱) DMU_o کارا در ارزیابی با مدل آنالیز نسبی می‌نامیم، در صورتیکه $\gamma_o^* = 1$ ، در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارای می‌نامیم.

فرض کنید که

$$w_{ir}^*, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s.$$

یک جواب بهین از مدل (۱) باشد. در این صورت کارایی DMU_o در ارزیابی با مدل آنالیز نسبی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

²¹ Multiplier

²² Envelopment

$$\sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^m w_{ir}^* \left(\frac{x_{io}}{y_{ro}} \right). \quad (2)$$

استفاده از محدودیت‌های وزنی اضافی در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها یک تکنیک مشترک می‌باشد که کاهش انعطاف‌پذیری از وزن‌های ورودی و خروجی را به دنبال دارد (آلن و همکاران [۱]).
بردارهای ثابت

$$Q_t, P_t \in R^{m+s}. \quad (3)$$

را در نظر بگیرید. مولفه‌های این بردارها می‌توانند مثبت، منفی یا صفر باشند. در صورتیکه هر دو بردار ناصفر باشند. محدودیت وزنی همگن را بصورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m P_{ir}^t w_{ir} &\leq 0, & r = 1, \dots, s, t = 1, \dots, K. \\ \sum_{r=1}^s Q_{ir}^t w_{ir} &\leq 0, & i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (4)$$

روابط (۴) معادل رابطه زیر است.

$$\begin{aligned} (\sum_{r=1}^s Q_{ir}^t w_{ir} - \sum_{i=1}^m P_{ir}^t w_{ir}) &\leq 0, & i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s, \\ t &= 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (5)$$

محدودیت وزنی همگن (۵) را پیوند^{۲۳} می‌نامیم. در غیر اینصورت اگر یکی از دو بردار صفر باشند آنگاه آن را بدون پیوند^{۲۴} می‌نامیم (پودینوسکی و بوزدین [۱۴]).

با در نظر گرفتن محدودیت‌های وزنی (۴) می‌توان مدل آنالیز نسبی^{۲۵} در حضور محدودیت‌های وزنی را بصورت زیر ارائه دهیم.

$$\begin{aligned} \delta_o^* &= \min \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^m w_{ir} \left(\frac{x_{io}}{y_{ro}} \right) \\ s. t. \quad &\sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^m w_{ir} \left(\frac{x_{ij}}{y_{rj}} \right) \geq 1, & j = 1, \dots, n, \\ &\sum_{i=1}^m P_{ir}^t w_{ir} \leq 0, & r = 1, \dots, s, t = 1, \dots, K, \\ &\sum_{r=1}^s Q_{ir}^t w_{ir} \leq 0, & i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, K. \\ &w_{ir} \geq 0, & i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (6)$$

تعریف ۲ DMU_o کارا در ارزیابی با مدل آنالیز نسبی در حضور محدودیت‌های وزنی می‌نامیم، در صورتیکه $\delta_o^* = 1$ ، در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارای می‌نامیم.
فرض کنید که

$$w_{ir}^*, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s.$$

یک جواب بهین از مدل (۶) باشد. در این صورت

کارایی DMU_o در ارزیابی با مدل آنالیز نسبی در حضور محدودیت‌های وزنی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^m w_{ir}^* \left(\frac{x_{io}}{y_{ro}} \right). \quad (7)$$

²³ linked

²⁴ unlinked

²⁵ Ratio analysis

۳- مبادلات تولید در حضور داده‌های نسبی

تاثیر اعمال محدودیت‌های وزنی بر روی مدل آنالیز نسبی را می‌توان بر اساس مدل دوال آن بیان نمود. دوال مدل (۶) را می‌توان به صورت زیر ارائه نمود.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j \left(\frac{x_{ij}}{y_{rj}} \right) + \hat{\alpha}_i P_{ir}^t + \hat{\beta}_r Q_{ir}^t \leq \left(\frac{x_{io}}{y_{ro}} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s, \\ & t = 1, \dots, K, \\ & \hat{\alpha}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \hat{\beta}_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \hat{\lambda}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (۸)$$

در مدل (۸)، $\hat{\lambda}_j$ ، $\hat{\alpha}_i$ ، $\hat{\beta}_r$ متغیرهای دوال متناظر با قیود اول، دوم و سوم در مدل (۶) می‌باشند.

قضیه (۱) مدل (۱۰) معادل مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی^{۲۶} با مبادلات تولید می‌باشد.
اثبات: قرار دهید

$$\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_j = \rho, \quad (۹)$$

در اینصورت مدل (۸)، بصورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & \rho \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\rho} \left(\frac{x_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{\hat{\alpha}_i}{\rho} P_{ir}^t + \frac{\hat{\beta}_r}{\rho} Q_{ir}^t \leq \frac{1}{\rho} \left(\frac{x_{io}}{y_{ro}} \right), \quad i = 1, \dots, m, \\ & r = 1, \dots, s, \quad t = 1, \dots, K, \\ & \hat{\alpha}_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \hat{\beta}_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \hat{\lambda}_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (۱۰)$$

قرار دهید:

$$\lambda_j = \frac{\hat{\lambda}_j}{\rho}, \quad \alpha_i = \frac{\hat{\alpha}_i}{\rho}, \quad \beta_r = \frac{\hat{\beta}_r}{\rho}, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s, \\ j = 1, \dots, n. \quad (۱۱)$$

با اعمال تغییر متغیر (۱۱)، و توجه به این موضوع که از نقطه نظر بهینه‌سازی حداکثرسازی ρ معادل حداقل‌سازی $\frac{1}{\rho} = \theta_o^{TO}$ می‌باشد. بنابراین مدل (۱۰) به مدل (۱۲) تبدیل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \theta_o^{TO*} = \min \quad & \sum_{j=1}^n \theta_o^{TO} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{x_{ij}}{y_{rj}} \right) + \alpha_i P_{ir}^t + \beta_r Q_{ir}^t \leq \theta_o^{TO} \left(\frac{x_{io}}{y_{ro}} \right), \quad i = 1, \dots, m, \\ & r = 1, \dots, s, \quad t = 1, \dots, K, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (۱۲)$$

$$\beta_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

مدل (۱۲)، مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی با مبادلات تولید می‌باشد و اثبات کامل می‌شود. ■
مبادلات تولید برای نسبت‌های مولفه‌های ورودی به خروجی بصورت $\alpha_i P_{ir}^t + \beta_r Q_{ir}^t$ در مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی قرار می‌گیرد.

تعریف (۳) DMU_o کارا در ارزیابی با مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی با مبادلات تولید می‌نامیم، در صورتیکه $\theta_o^{To*} = 1$ در غیر این صورت آن را یک واحد ناکارا می‌نامیم.
فرض کنید که

$\lambda_j = 1, j = 1, \dots, n, \alpha_i^* = 1, i = 1, \dots, m, \beta_r^* = 1, r = 1, \dots, s, \theta_o^{To*}$
یک جواب بهین از مدل (۱۲) باشد. در این صورت کارایی DMU_o در ارزیابی با مدل آنالیز نسبی در حضور محدودیت‌های وزنی را بصورت θ_o^{To*} تعریف می‌کنیم.

۴- مطالعه کاربردی

در این بخش نتایج حاصل از مدل‌های ارائه شده در این مقاله را با یک مثال کاربردی نشان می‌دهیم. جدول (۱) داده‌های مربوط به ده دانشگاه در کشور ایران را نشان می‌دهد. این دانشگاه‌ها در یک حوزه تخصصی پذیرش دانشجو دارند. ده دپارتمان مشترک از این دانشگاه‌ها را در نظر می‌گیریم. برای ارزیابی این واحدهای دانشگاهی از مدل‌های ارائه شده در این مقاله استفاده می‌کنیم. برای ارزیابی این واحدها دو ورودی و دو خروجی را در نظر می‌گیریم. ورودی اول، شامل میزان حقوق پرداختی به کارکنان در طول دوره ارزیابی می‌باشد، و ورودی دوم، شامل میزان هزینه‌های پژوهشی پرداخت شده در طول دوره ارزیابی می‌باشد. واحد اندازه‌گیری دو ورودی بر حسب میلیارد ریال می‌باشد. همچنین ما دو خروجی را برای ارزیابی این واحدها در نظر می‌گیریم. خروجی اول، شامل تعداد دانشجویان مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد فارغ التحصیل در طول دوره ارزیابی می‌باشد، و خروجی دوم شامل، میزان کارهای پژوهشی (مقالات و کتاب‌ها و کنفرانس‌ها) انجام شده در طول دوره ارزیابی می‌باشد. واحد اندازه‌گیری هر دو خروجی تعداد مشاهدات می‌باشند. داده‌های ورودی و خروجی در جدول (۱) آمده است. در این ارزیابی هر یک از واحدهای دانشگاهی را یک واحد تصمیم‌گیرنده در نظر می‌گیریم.

جدول ۱. مجموعه داده‌ها و نتایج ارزیابی کارایی در مثال عددی

کارایی حاصل از مدل (۱)	خروجی دوم	خروجی اول	ورودی دوم	ورودی اول	واحد تصمیم‌گیرنده
1 (1)	2174	32441	1868	219718	1
1 (1)	6570	741905	2762	4351036	2
0.7098 (4)	1782	4316	642	983639	3
0.5379 (5)	2540	35819	1234	2053945	4
1 (1)	5078	1960	1141	1754690	5
0.8708 (2)	2992	2460	836	2342515	6
1 (1)	7189	159634	1882	2876203	7
1 (1)	1465	1855	594	429710	8
1 (1)	4515	790	1829	1016343	9
0.7753 (3)	2267	75736	975	1388514	10

مطابق جدول (۱)، واحدهای ۱، ۲، ۵، ۷، ۸ و ۹ بر اساس مدل آنالیز نسبی (مدل (۱)) کارا و سایر واحدها ناکارا هستند. برای حل مدل آنالیز نسبی با محدودیت وزنی (مدل (۱۲))، چهار محدودیت وزنی بصورت زیر انتخاب می‌کنیم.

محدودیت وزنی اول:

$$\begin{aligned} P^1 &= (P_{11}^1, P_{21}^1, P_{12}^1, P_{22}^1) = (1, -1, 1, -2), \\ Q^1 &= (Q_{11}^1, Q_{12}^1, Q_{21}^1, Q_{22}^1) = (2, -2, 1, -3). \end{aligned} \quad (13)$$

محدودیت وزنی دوم:

$$\begin{aligned} P^1 &= (P_{11}^1, P_{21}^1, P_{12}^1, P_{22}^1) = (2, 1, 3, -3), \\ Q^1 &= (Q_{11}^1, Q_{12}^1, Q_{21}^1, Q_{22}^1) = (2, -2, 1, -3). \end{aligned} \quad (14)$$

محدودیت وزنی سوم:

$$\begin{aligned} P^1 &= (P_{11}^1, P_{21}^1, P_{12}^1, P_{22}^1) = (3, -1, 2, -3), \\ Q^1 &= (Q_{11}^1, Q_{12}^1, Q_{21}^1, Q_{22}^1) = (1, 3, 1, -2). \end{aligned} \quad (15)$$

محدودیت وزنی چهارم:

$$\begin{aligned} P^1 &= (P_{11}^1, P_{21}^1, P_{12}^1, P_{22}^1) = (-2, 1, -3, -3), \\ Q^1 &= (Q_{11}^1, Q_{12}^1, Q_{21}^1, Q_{22}^1) = (3, 3, 1, -2). \end{aligned} \quad (16)$$

به عنوان مثال مطابق محدودیت وزنی اول (رابطه (۱۳))، معادل قرار دادن محدودیت های زیر در مدل آنالیز نسبی می باشد.

$$2w_{11} + 1w_{21} \leq 0, \quad (17)$$

$$3w_{12} - 3w_{22} \leq 0, \quad (18)$$

$$2w_{11} - 2w_{12} \leq 0, \quad (19)$$

$$1w_{21} - 3w_{22} \leq 0, \quad (20)$$

به عنوان مثال رابطه (۱۷) نشان میدهد که اهمیت نسبت وزن متناظر با مولفه اول ورودی به مولفه اول خروجی کمتر از نصف وزن متناظر با مولفه دوم ورودی به مولفه اول خروجی می باشد یا به عبارت دیگر میزان اهمیت نسبت میزان هزینه کارمندان به تعداد دانشجویان فارغ التحصیل کمتر از میزان اهمیت نسبت میزان هزینه کارهای پژوهشی به تعداد دانشجویان فارغ التحصیل می باشد. برای سایر محدودیت ها می توانیم تعبیر مشابهی را ارائه دهیم.

جدول ۲. نتایج ارزیابی کارایی حاصل از مدل آنالیز نسبی با محدودیت وزنی (مدل (۶)).

رتبه واحد	محدودیت وزنی چهارم	محدودیت وزنی سوم	محدودیت وزنی دوم	محدودیت وزنی اول	واحد تصمیم گیرنده
10	0.2615	0.3042	1	1	1
7	0.5345	0.667	0.5345	0.667	2
4	0.6237	0.7097	0.6253	0.7097	3
9	0.4625	0.5379	0.4625	0.5379	4
1	1	1	1	1	5
3	0.8042	0.8708	0.8042	0.8708	6
2	0.8583	1	0.8621	1	7
6	0.5542	0.6159	0.8786	1	8
5	0.5547	0.5547	1	1	9
8	0.5224	0.626	0.5509	0.6502	10

با توجه به نتایج در جدول (۲)، واحد ۵ با اعمال هر چهار محدودیت وزنی یعنی روابط (۱۳-۱۶) کارا می‌باشد. واحدهای ۱ و ۹ با اعمال محدودیت‌های وزنی سوم و چهارم ناکارا می‌گردد. با مقایسه مقادیر کارایی حاصل از مدل آنالیز نسبی مربوط به قبل و بعد از اعمال محدودیت‌های وزنی مشاهده می‌گردد که کارایی تمام واحدها بعد از اعمال محدودیت وزنی بهتر نمی‌گردد و بهبودی در مقادیر کارایی واحدها نخواهیم داشت. مقادیر کارایی واحدها بعد از اعمال محدودیت‌های وزنی ممکن است کاهش یابد.

ستون آخر جدول (۲) رتبه واحدها براساس مقادیر کارایی حاصل از مدل آنالیز نسبی با محدودیت وزنی (مدل (۱۲)) چهارم را نشان می‌دهد. با مقایسه این نتایج به نتایج در ستون آخر جدول (۱) مشاهده می‌گردد که ممکن است رتبه متناظر با واحدها بعد از اعمال محدودیت‌های وزنی تغییر نماید. بعنوان مثال رتبه متناظر با واحد ۴ قبل و بعد از اعمال محدودیت وزنی بترتیب برابر با ۵ و ۹ می‌باشد.

اکنون به تحلیل نتایج حاصل از مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی با مبادلات تولید یعنی مدل (۱۲) می‌پردازیم. نتایج با انتخاب متفاوت محدودیت‌های وزنی اول تا چهارم یعنی روابط (۱۳-۱۶) می‌پردازیم.

جدول ۳. نتایج ارزیابی کارایی حاصل از مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی با مبادلات تولید (مدل (۱۲)).

محدودیت وزنی دوم	محدودیت وزنی اول	بدون محدودیت وزنی	واحد تصمیم‌گیرنده
0.8659	0.8659	1 (1)	1
1	1	1 (1)	2
0.0257	0.0257	0.7098 (4)	3
0.1081	0.1023	0.5379 (5)	4
0.0066	0.0066	1 (1)	5
0.011	0.0062	0.8708 (2)	6
0.3255	0.3255	1 (1)	7
0.0253	0.0253	1 (1)	8
0.0046	0.0046	1 (1)	9
0.3199	0.3199	0.7753 (3)	10
رتبه واحدها با محدودیت چهارم	محدودیت وزنی چهارم	محدودیت وزنی سوم	DMU
5	0.0647	1	1
1	1	1	2
6	0.025	0.1831	3
4	0.1081	0.125	4
9	0.0064	0.2925	5
8	0.011	0.1291	6
2	0.3158	0.3716	7
7	0.0116	0.3446	8
10	0.0016	0.449	9
3	0.2892	0.3589	۱۰

براساس ستون دوم از جدول (۳)، واحدهای ۱، ۲، ۵، ۷، ۸ و ۹ براساس مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی بدون در نظر گرفتن مبادلات تولید، کارا می‌باشند و واحدهای ۳، ۴، ۶ و ۱۰ واحدهای ناکارا هستند. با توجه به نتایج در جدول (۳)، واحد ۲ با اعمال هر چهار محدودیت وزنی یعنی روابط (۱۳-۱۶) در شکل مبادلات تولید در مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی با مبادلات تولید (مدل (۱۲)) کارا خواهد می‌باشد. بجز واحد ۲ سایر واحدها با اعمال مبادلات تولید در مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی مطابق جدول (۳) ناکارا هستند. با مقایسه مقادیر کارایی حاصل از مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی با اعمال مبادلات تولید (مدل (۱۲)) مشاهده می‌گردد که کارایی واحدها بعد از اعمال مبادلات تولید بهتر نمی‌گردد و بهبودی در مقادیر کارایی واحدها نخواهیم داشت. مقادیر کارایی واحدها بعد از اعمال مبادلات تولید ممکن است کاهش یابد. ستون آخر جدول (۳) رتبه واحدها براساس مقادیر کارایی حاصل از مدل تحلیل پوششی داده‌های نسبی با اعمال مبادلات تولید (مدل (۱۲)) و در نظر گرفتن محدودیت وزنی چهارم (رابطه (۱۶)) را نشان می‌دهد. با مقایسه این نتایج به نتایج در ستون دوم جدول (۳) مشاهده می‌گردد که ممکن است رتبه متناظر با واحدها بعد از در نظر گرفتن مبادلات تولید تغییر نماید. بعنوان مثال رتبه متناظر با واحد ۳ قبل و بعد از اعمال محدودیت وزنی بترتیب برابر با ۴ و ۶ می‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل‌های آنالیز نسبی در تحلیل پوششی داده‌ها را در حضور محدودیت‌های وزنی ارائه دادیم. در ادامه مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی را براساس مبادلات تولید بدست آوردیم. ما نشان دادیم که اعمال محدودیت‌های وزنی در مدل‌های آنالیز نسبی معادل در نظر گرفتن مبادلات تولید در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی می‌باشد. در این مقاله، رابطه میان این مدل‌ها ارائه گردید. ما نشان دادیم که با اعمال محدودیت‌های نسبی در مدل‌های آنالیز نسبی ممکن است کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده کاهش یابد و رتبه واحدها نیز در مقایسه تغییر نماید. موضوع فوق در مورد مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی با در نظر گرفتن مبادلات تولید نیز صادق است. با استفاده از مدل‌های ارائه شده در این مقاله می‌توانیم میزان اهمیت نسبت‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها را در ارزیابی آنها دخالت دهیم. این مقاله به نحوی اطلاعات ارزشی تصمیم‌گیرنده را در پروسه ارزیابی بکار می‌برد. با انتخاب محدودیت‌های وزنی مناسب می‌توانیم به یک ارزیابی مطلوب مدنظر مدیر رسید. به عنوان کارهای آتی می‌توان مدل‌های ارائه شده در این مقاله را برای دیگر انواع محدودیت‌های وزنی در تحلیل پوششی داده‌ها توسعه داد. همچنین می‌توان این مدل‌ها را در سایر تکنولوژی‌ها نظیر تکنولوژی غیرمحدب توسعه داد.

فهرست منابع

- [1] Allen R., Athanassopoulos A., Dyson R. G., & Thanassoulis E. (1997). Weights restrictions and value judgments in data envelopment analysis: Evolution, development and future directions, *Annals of Operations Research*, 73, 13–34.
- [2] Chen W. C., & McGinnis, L. F. (2007). Reconciling ratio analysis and DEA as performance assessment tools, *European Journal of Operational Research*, 178, 277–291.
- [3] Despic O., Despic M., & Paradi J. C. (2007). DEA-R: Ratio-based comparative efficiency model, its mathematical relation to DEA and its use in applications, *Journal of Productivity Analysis*, 28(1), 33–44.
- [4] Gerami J. (2019). An interactive procedure to improve estimate of value efficiency in DEA, *Expert Systems with Applications*, 137, 29–45.
- [5] Gerami J., Mozaffari M. R., Wanke P.F. (2020). A multi-criteria ratio-based approach for two-stage data envelopment analysis, *Expert Systems with Applications*, 158, 113508.
- [6] Gerami J., Mozaffari M.R., Wanke P.F., & Correa H. (2022). A novel slacks-based model for efficiency and super-efficiency in DEA-R, *Operations Research*, 22(4), 3373–3410.
- [7] Gerami J., Kiani Mavi R., Farzipoor Saen R., & Kiani Mavi N. (2023). A novel network DEA-R model for evaluating hospital services supply chain performance, *Annals of Operations Research*, 324, (1-2), 1041-1066.
- [8] Mozaffari M. R., Kamyab P., Jablonsky J., & Gerami, J. (2014). Cost and revenue efficiency in DEA-R models. *Computers & Industrial Engineering*, 78, 188–194.
- [9] Mozaffari M. R., Gerami J., & Jablonsky J. (2014). Relationship between DEA models without explicit inputs and DEA-R models, *Central European Journal of Operations Research*, 22(1), 1–12.
- [10] Mozaffari M. R., Dadkhah F., & Jablonsky J., Wanke, P. W. (2021). Finding efficient surfaces in DEA-R models, *Applied Mathematics and Computation*, 386, 125497.
- [11] Podinovski V.V. (2004). Production trade-offs and weight restrictions in data envelopment analysis, *Journal of the Operational Research Society*, 55(12), 1311–1322.
- [12] Podinovski V. V. (2007). Computation of efficient targets in DEA models with production trade-offs and weight restrictions, *European Journal of Operational Research*, 181(2), 586–591.
- [13] Podinovski V.V., & Bouzdine-Chameeva T. (2013). Weight restrictions and free production in data envelopment analysis, *Operations Research*, 61(2), 426–437.

- [14] Podinovski V.V., & Bouzdine-Chameeva T. (2015). Consistent weight restrictions in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, 244(1), 201-209.
- [15] Papaioannou G., & Podinovski V.V. (2023). Production technologies with ratio inputs and outputs, *European Journal of Operational Research*, 310, 1164–1178.
- [16] Roll Y., Cook W.D., & Golany B. (1991). Controlling factor weights in data envelopment analysis, *IIE Transactions*, 23(1), 2–9.
- [17] Song M., Wu J., & Wang Y. (2011). An extended aggregated ratio analysis in DEA, *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 20(2), 249-256.
- [18] Wei C. K., Chen L. C., Li R. K., & Tsai C. H. (2011). A study of developing an input oriented ratio-based comparative efficiency model, *Expert Systems with Applications*, 38(3), 2473–2477.
- [19] Wei C. K., Chen L. C., Li R. K., & Tsai C. H. (2011). Exploration of efficiency underestimation of CCR model: Based on medical sectors with DEA-R model, *Expert Systems with Applications*, 38(4), 3155–3160.
- [20] Wei C. K., Chen L. C., Li R. K., & Tsai C. H. (2011). Using DEA-R model in the hospital industry to study the pseudo-inefficiency problem, *Expert Systems with Applications*, 38(3), 2172–2176.
- [21] Wu D. S., Liang L., Huang Z. M., & Li S. X. (2005). Aggregated ratio analysis in DEA, *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 4(3), 369–384.
- [22] Zha Y., & Liang, L. (2015). Aggregated ratio analysis in DEA, *International Journal of Information Technology & Decision Making*, 14(6), 1285-1297.