J. Analysis of Structure and Earthquake
Volum 20, Issue 4, winter 2024
وبگاه مجله: www.civil-strj.maragheh.iau.ir
Issn: 2821-0999
آنالیز سازه - زلزله
فصلنامه علمی
دوره ۲۰، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲
ASE

An Analytical Study on the Buckling Behavior of Cracked Column Based on the Physical Property of the Dirac delta Function

S.H. Dehghan Manshadi*

Assistant professor, Department of Civil Engineering, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran

S.R. Reyhani

M.S. Student, Department of Civil Engineering, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran

M.A. Dashti

Assistant professor, Department of Civil Engineering, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran

sh.manshadi@iau.ac.ir

Keywords:
Cracked column,
Buckling,
Dirac's delta function,
crack opening and closing,
torsion spring

Abstract

The Dirac delta function provides a simple and effective tool for representing point loads and singularities in structural problems, often leading to closed-form solutions. In this study, buckling of simple double-ended columns with one and two cracks has been analyzed analytically. Although in recent years this issue has attracted the attention of many researchers, the methods presented to solve the problem usually have a significant computational load. Therefore, in this study, a new approach has been used to solve the problem using the property of the Dirac's delta function. This approach simplifies the problem-solving process and significantly reduces the computational cost. Based on this, the crack is modeled with a bilateral behaviour via Dirac delta function. This model takes into account the crack closure effect on buckling behaviour of column by introducing a suitable switching criterion, which allows each crack to be open or closed depending on the sign of the axial strain at the crack centre. The proposed method was used to finding the buckling load, determining the effects of crack stiffness for both one and two-crack scenarios, and accounting for the effect(s) of crack opening and closing on the buckling load. For validation purposes, the finite element software SAP2000 was utilized.

بررسی تحلیلی رفتار کمانشی ستون دارای ترک بر مبنای خاصیت فیزیکی تابع دلتای دیراک

هادی دهقان منشادی*
استادیار، گروه مهندسی عمران، واحدیزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران
رهام ریحانی
دانش آموخته کارشناسی ارشد سازه، گروه مهندسی عمران، واحدیزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران
محمدعلی دشتی
استادیار، گروه مهندسی عمران، واحدیزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران
sh.manshadi@iau.ac.ir

تاریخ دریافت : ۱۳ تیر ۱۴۰۲ تاریخ پذیرش: ۰۵ آبان ۱۴۰۲

چکیده

تابع دلتای دیراک نمایش ساده و مؤثر بارهای نقطه‌ای و تکینگی‌ها را در انواع مسائل سازه‌ای امکان پذیر می‌کند که اغلب به راه حل‌های بسته منجر می‌شود. در این پژوهش کمانش ستونی دوسر ساده با یک و دو ترک به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. با وجود این‌که در سال‌های اخیر این موضوع مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته، اما روش‌های ارائه شده برای حل مساله معمولا بار محاسباتی قابل توجهی دارند. از اینرو در این پژوهش از نگرشی جدید جهت حل مساله با استفاده از خاصیت تابع دلتای دیراک استفاده شده که روند حل مسأله را ساده‌تر و حجم محاسبات را به شدت کاهش می‌دهد. بر این اساس، ترک با رفتار دو طرفه به کمک تابع دلتای دیراک مدل شده است. این مدل با معرفی یک معیار مناسب، اثر بسته شدن ترک روی رفتار خمشی ستون را در نظر می‌گیرد. این معیار بسته به علامت کرنش محوری و همچنین یک یا دو طرفه بودن ترک، به هر ترک اجازه می‌دهد که باز یا بسته باشد. از روش پیشنهادی به منظور یافتن بار کمانشی، اثرات سختی ترک به ازای موقعیت‌های مختلف در دو حالت یک و دو ترکه و همچنین تاثیر باز و بسته شدن ترک روی بار کمانشی استفاده شد . به منظور صحت‌سنجی روابط تحلیلی به دست آمده از نرم‌افزار اجزای محدود SAP2000 بهره گرفته شد.

کلید واژگان: ستون ترک خورده، کمانش، تابع دلتای دیراک، باز و بسته شدن ترک، فنرپیچشی

۱-مقدمه

اعضای سازه‌ای در طول عمر مفید خود دچار تغییرات مختلفی از قبیل ایجاد و گسترش ترک، فرسودگی و یا سایر آسیب های احتمالی می‌شوند که تأثیر این پدیده‌ها روی رفتار کمانشی ستون ها و به طور کلی ایمنی سازه باید به نحو قابل قبولی در طراحی آن‌ها در نظر گرفته شود. وجود ترک در سازه‌ها می‌تواند رفتار کمانشی آن‌ها را تحت تأثیر قرار دهد و موجب کاهش قابل ملاحظه بار بحرانی کمانش شود. از اعضای سازه ای مهمی که وجود ترک رفتار آن ها را تحت تأثیر قرار دهد، ستون‌ها می‌باشند به نحوی که هرگونه عیب در این سازه‌ها باعث تغییر در رفتار سازه و پایداری آن می‌گردد و در صورتی که به موقع تشخیص داده نشود می‌تواند منجر به خرابی و خسارت فاجعه باری شود. تحقیقات متعددی در زمینه‌ی بررسی پایداری و تعیین میزان بار بحرانی کمانش صورت پذیرفته است [۱-۴]. کیسا با استفاده از روش المان محدود به بررسی رفتار ارتعاشی و پایداری تیرهای ترک‌دار تحت بار محوری پرداخت . او ترک را به صورت فنرپیچشی مدل نمود و سپس تحلیل پایداری را به منظور محاسبه بار بحرانی کمانش انجام داد [۵]. یزدچی و همکاران با استفاده از روش ماتریس انتقال به محاسبه بار کمانشی ستون‌های ترک‌دار با سطح مقطع‌های مختلف پرداختند [۶]. تویگر و همکاران ترکیبی از تست‌های تجربی و روش المان محدود به منظور بررسی تأثیر ترک روی بار بحرانی کمانش تیرهای کامپوزیتی را به کار گرفتند [۷]. اوکامورا و همکاران نیز تحقیقاتی روی ستون‌های باریک با یک ترک ، به منظور تعیین ظرفیت باربری ستون و میزان بار شکست ستون انجام دادند [۸]. ژو و هانگ اثر بار محوری فشاری روی ویژگی بسته شدن ترک را مورد بررسی قرار دادند . تحقیقات آنها رابطه‌ی بین ظرفیت باربری ستون و عمق ترک و لاغر بودن ستون را نشان داد[۹]. کالامل و همکاران در پژوهشی اثر وجود ترک و اغتشاشات طولی در اثر جابجا شدن تکیه‌گاه میانی را بر رفتار کمانشی ستون دو دهانه مورد بررسی قرار دادند[۱۰]. فو و یانگ اثر وجود تعداد ترک‌های دلخواه را روی انحراف و زاویه چرخش تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند [۱۱]. سلیمان در پژوهشی تیرهای کنسولی دارای ترک دوطرفه را تحت تجزیه و تحلیل استاتیکی قرارداده است[۱۲].دهقان منشادی و همکاران کمانش ستونی ترک خورده را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار داده و به منظور یافتن معادله‌ی حاکم بر مساله از فرم تغییراتی انرژی پتانسیل ستون استفاده کردند [۱۳]. همان‌گونه که اشاره شد، در بسیاری از تحقیقات انجام شده در این زمینه به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار کمانشی و پایداری تیرها و ستون‌های ترک دار تحت اثر نیروی محوری پرداخته شده است، اما عمده تحقیقات انجام شده در این زمینه عمدتاً بر اساس روش‌های عددی نظیر روش المان محدود، روش ماتریس انتقال، روش حساب تغییرات و روش انرژی بوده است. روش‌های مورد بررسی در این پژوهش‌ها عمدتا با بار محاسباتی قابل توجهی در حل مسأله همراه بوده و نیازمند اعمال شرایط سازگاری و پیوستگی خیز و نیروی برشی در محل ترک می باشد.

در تحقیق حاضر کمانش ستون دوسر ساده با یک و دو ترک به صورت تحلیلی و با رویکردی جدید مورد بررسی قرار گرفت . معادله رفتاری حاکم بر مسأله با استفاده از تئوری تیر اویلر – برنولی و بهره گیری از خاصیت تابع دلتای دیراک برای ترک‌ها به دست آمد. این پژوهش قصد دارد رفتار یک طرفه‌ی ترک (اثرات باز و بسته شدن ترک) روی رفتار کمانشی ستون یک و دو ترکه را مورد بررسی قرار دهد. قابل توجه است که فرض می‌شود، ستون از قبل ترک خورده می باشد و اثرات مربوط به این ترک تنها در محدوده‌ی پایداری ارتجاعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ساختار مقاله‌ی حاضر به صورت زیر می باشد: در بخش ۲، معادلات حاکم بر مساله با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی و بهره‌گیری از خاصیت تابع دلتای دیراک به دست می آید. بخش ۳ به بررسی رفتار کمانشی ستون یک ترکه و همچنین کنترل درستی روابط تحلیلی به دست آمده از طریق مدل سازی ستونی ترک خورده در نرم افزار اجزای محدود SAP2000 اختصاص دارد . بارکمانشی ستون دو ترکه و اثرات باز و بسته شدن ترک‌ها در بخش ۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد . در انتها نیز به نتایج حاصل از این پژوهش اشاره می‌شود.

۱- معادله حاکم

تیری به طول L با صلبیت خمشی $E(x)I(x)$ در نظر بگیرید، بطوری‌که $E(x)$ و $I(x)$ به ترتیب معرف ضریب ارتجاعی و ممان اینرسی می‌باشد. بر اساس تئوری تیر اویلر-برنولی معادله حاکم بر مساله به صورت رابطه (۱) قابل بیان است:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[E(x)I(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x)\right] \pm \frac{d}{dx}\left[p\frac{d}{dx}u(x)\right] = q(x) \qquad (۱)$$

در رابطه‌ی بالا p و q به ترتیب بیانگر بار محوری و گسترده‌ی جانبی می باشد. علامت$\pm$ نیز معرف فشاری وکششی بودن نیروی محوری می باشد. به منظور سادگی در روند محاسبات پارامترهای بی بعد مطابق رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{L}; \tilde{u}(\xi) = \frac{u(\xi L)}{L}; \lambda^2 = \frac{pL^2}{EI}$$

$$\tilde{q}(\xi) = \frac{q(\xi L)L^3}{EI_0}; E\tilde{I}(\xi) = \frac{E(\xi L)I(\xi L)}{EI_0} \tag{۲}$$

که در آن ξ بیانگر مختصات بی بعد ، λ پارامتر بار کمانشی بی بعد و EI_0 معرف سختی خمشی مقطع ترک نخورده می‌باشد. با استفاده از پارامترهای بی بعد تعریف شده در رابطه‌ی (۲) معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله (۱) به صورت معادله (۳) باز نویسی می‌شود.

$$[E\tilde{I}(\xi)\tilde{u}''(\xi)]'' \pm \lambda^2\tilde{u}''(\xi) = \tilde{q}(\xi) \tag{۳}$$

به منظور درنظر گرفتن اثرات کاهش سختی خمشی ناشی از ترک در معادلات از خاصیت تابع دلتای دیراک استفاده می‌شود. به طوری که مطابق رابطه‌ی (۴)، سختی خمشی در محل‌های ترک ($\xi = \bar{\xi}_j$) با توجه به مقدار واحد دلتا [۱۴]، کاهشی بوده و در فواصلی بین ترک‌ها با توجه به صفر بودن مقدار دلتا، سختی خمشی بدون تغییر باقی می ماند.

$$E\tilde{I}(\xi)^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j}\beta_j\delta(\xi - \bar{\xi}_j) \tag{۴}$$

در رابطه‌ی بالا n معرف تعداد ترک، $\delta(\xi - \bar{\xi}_j)$ بیانگر تابع دلتای دیراک به مرکزیت موقعیت j امین ترک و پارامتر بی بعد γ_j معرف شدت خسارت و ترک خوردگی در $\xi = \bar{\xi}_j$ بوده که عملا اثرات کاهش سختی در اثر وجود ترک را درنظر گرفته و به صورت رابطه (۵) تعریف می‌شود:

$$\gamma_j = \frac{K_j L}{EI_0} \tag{۵}$$

که در آن K_j معرف سختی پیچشی فنر متناظر با ترک می‌باشد [۸].

$$K_j = \frac{0.9\left[\left(\frac{d_j}{h}\right) - 1\right]^2}{\left(\frac{d_j}{h}\right)\left[2 - \frac{d_j}{h}\right]} \tag{۶}$$

در رابطه‌ی بالا، h ارتفاع مقطع ستون و d_j عمق j امین ترک می‌باشد. در حالت حدی هنگامی که $K_j \to 0$ محل ترک به صورت یک مفصل داخلی معادل شده و پارامتر شدت خسارت، γ_j به سمت صفر میل می‌کند. در مقابل با میل کردن $K_j \to \infty$ پارامتر شدن خسارت به سمت صفر میل کرده که بیانگر عدم خسارت مقطع مورد بررسی می‌باشد. پارامتر β_j در رابطه‌ی (۴) اثرات باز و بسته بودن ترک را درنظر گرفته که به صورت رابطه‌ی (۷) تعریف می‌شود:

$$\beta_j = \begin{cases} 0 & \tilde{\varepsilon}_j \le 0 \\ 1 & \tilde{\varepsilon}_j > 0 \end{cases} \tag{۷}$$

که در آن $\tilde{\varepsilon}_j$ کرنش محوری الاستیک در j امین ترک می‌باشد. مقدار این پارامتر مثبت بوده در صورتی‌که که تارهای قرار گرفته در ترک کشیده شده و در صورت فشرده شدن علامت این پارامتر منفی در نظر گرفته می‌شود.

$$\tilde{\varepsilon}_j = \frac{N(\xi_j L)}{A_0 E} + \frac{M(\xi_j L)}{EI_0}\bar{y}_j \tag{۸}$$

در رابطه‌ی بالا، $N(\xi_j L)$ نیروی محوری در $x = x_j$ (مثبت در کشش و منفی در فشار)، A_0E بیانگر صلبیت محوری، (A_0) نشان دهنده‌ی مساحت مقطع ترک نخورده می‌باشد)، $M(\xi_j L)$ لنگر خمشی حول تار خنثی و $\bar{y}_j$ فاصله‌ی بین تار خنثی و تار گذرنده از مرکز ترک می‌باشد، به طوری‌که $\bar{y}_j > 0$ بیانگر این است که jامین ترک در وجه پایینی مقطع تیر بوده و در این حالت ترک تمایل به باز شدن دارد. در مقابل هنگامی که $\bar{y}_j < 0$ ترک در وجه بالایی مقطع بوده و ترک تمایل به بسته شدن دارد. بر این اساس پارامتر تعریف شده در رابطه‌ی (۸) به لبه‌ی قرار گیری ترک روی مقطع تیر، لنگر خمشی مقطع و نیروی محوری مقطع در موقعیت ترک وابسته است. با این توضیحات پارامتر β_j برابر با یک است هرگاه jامین ترک باز و برابر صفر است هرگاه ترک بسته باشد. با جاگذاری معادله‌ی (۴) در معادله‌ی (۳) خواهیم داشت:

$$\left\{\left[1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j}\beta_j\delta(\xi - \bar{\xi}_j)\right]^{-1} \tilde{u}''(\xi)\right\}'' \pm \lambda^2\tilde{u}''(\xi) = \tilde{q}(\xi) \tag{۹}$$

دو بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۹) منجر به رابطه‌ی (۱۰) خواهد شد:

$$\tilde{u}''(\xi) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\gamma_j}\beta_j\delta(\xi - \bar{\xi}_j)\right] \tag{۱۰}$$

$$\times\left[\tilde{q}^{[2]}(\xi)+c_1\xi+c_2-\lambda^2\tilde{u}''(\xi)\right]$$

در رابطه‌ی بالا، c_1 و c_2 ثابت‌های مجهول انتگرال می‌باشند. $\tilde{q}^{[2]}(\xi)$ نشان دهنده‌ی انتگرال تابع بار $\tilde{q}(\xi)$ از مرتبه‌ی دوم می باشد. با اعمال تبدیل لاپلاس و معکوس آن روی رابطه‌ی (۱۰) تابع پاسخ به فرم معادله‌ی (۱۱) حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\xi)&=\int_0^{\xi}\frac{\sin(\lambda\tau)}{\lambda}\tilde{q}^{[2]}(\xi-\tau)d\tau\\&+\frac{1}{\lambda^3}\begin{bmatrix}c_1(\lambda\xi-\sin(\lambda\xi))+c_2\lambda(1-\cos(\lambda\xi))\\+c_3\lambda^3\cos(\lambda\xi)+c_4\lambda^2\sin(\lambda\xi)\end{bmatrix}\\&+\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}\beta_j\sin(\lambda(\xi-\bar{\xi}_j))H(\xi-\bar{\xi}_j)\\&\times\left[\tilde{q}^{[2]}(\bar{\xi}_j)-\lambda^2\tilde{u}(\bar{\xi}_j)+c_1\bar{\xi}_j+c_2\right]\end{aligned}\quad(۱۱)$$

به طوری که $H(\xi)$ بیانگر تابع پله‌ای هویساید بوده و به صورت معادله‌ی (۱۲) تعریف می‌شود [۱۴]:

$$H(\xi)=\int_{-\infty}^{\xi}\delta(\xi)d\xi=\begin{cases}0,\xi<0;\\\frac{1}{2},\xi=0;\\1,\xi>0.\end{cases}\quad(۱۲)$$

به منظور سادگی در بیان رابطه‌ی (۱۱)، پارامترهای $\beta^*(\xi)$ و η_j به ترتیب به صورت رابطه‌ی (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\beta^*(\xi)=\frac{1}{\lambda^3}\begin{bmatrix}c_1(\lambda\xi-\sin(\lambda\xi))+c_2\lambda(1-\cos(\lambda\xi))\\+c_3\lambda^3\cos(\lambda\xi)+c_4\lambda^2\sin(\lambda\xi)\end{bmatrix}$$

$$\eta_j=\beta^*(\bar{\xi}_j)+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{\gamma_k}\beta_k\sin(\lambda(\bar{\xi}_j-\bar{\xi}_k))H(\bar{\xi}_j-\bar{\xi}_k)\times\left[\tilde{q}^{[2]}(\bar{\xi}_k)-\lambda^2\eta_k+c_1\bar{\xi}_k+c_2\right]\quad(۱۳)$$

با فرض شرایط تکیه گاهی دو سر ساده، شرایط مرزی مسأله به ترتیب در ابتدا ($x=0$) و انتهای عضو ($x=L$) عبارتند از :

$$u(0)=0\quad(۱۴)$$

$$M(x=0)=0\rightarrow EIy''=0\rightarrow y''(0)=0\quad(۱۵)$$

$$\rightarrow u''(0)=0$$

$$u(1)=0\quad(۱۶)$$

$$\begin{aligned}&M(x=L)=0\\&\rightarrow EIy''=0\rightarrow y''(L)=0\rightarrow u''(1)=0\end{aligned}\quad(۱۷)$$

در ادامه، ستون یک ترکه تحلیل و دترمینان ماتریس ضرایب پس از اعمال شرایط مرزی، محاسبه شده است.

۲- بررسی ستون با یک ترک

رابطه جابجایی برای ستون یک ترکه با مختصات بی بعد به صورت معادله (۱۸) بیان می‌شود :

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(\xi)=\beta^*(\xi)+\frac{1}{\lambda\gamma_1}\sin(\lambda(\xi-\alpha))H(\xi-\alpha)\\&\times\left[-\lambda^2\eta_1+c_1\alpha+c_2\right]\end{aligned}\quad(۱۸)$$

دررابطه بالا α نشان‌دهنده موقعیت ترک ستون در مختصات بی بعد می‌باشد. اعمال شرایط مرزی (۱۴) تا (۱۷) منجر به روابط (۲۱-۱۹) خواهد شد:

$$\begin{aligned}&\tilde{u}(0)=\beta^*(0)=0\\&\qquad\rightarrow\frac{1}{\lambda^3}\left[c_3\lambda^3\cos(0)\right]=0\rightarrow c_3=0\\&\tilde{u}''(0)=\beta^{*''}(0)=0\\&\qquad\rightarrow\frac{1}{\lambda^3}\left[c_2\lambda(v^2\cos(0))\right]=0\rightarrow c_2=0\end{aligned}\quad(۱۹)$$

$$\tilde{u}(1)=0$$

$$c_1\begin{pmatrix}\lambda(1+\frac{1}{\gamma_1}\sin(\lambda(1-\alpha))\times[\sin(\lambda\alpha)])\\-\sin(\lambda)\end{pmatrix}\quad(۲۰)$$

$$+c_4\begin{pmatrix}\lambda^2\sin(\lambda)-\\\frac{\lambda^3}{\gamma_1}\sin(\lambda(1-\alpha))\times[\sin(\lambda\alpha)]\end{pmatrix}=0$$

$$\tilde{u}''(1)=0\quad(۲۱)$$

فصلنامه علمی
آنالیز سازه-زلزله
دوره ۲۰، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲

$$c_1\begin{pmatrix} sin(\lambda)-\dfrac{\lambda}{\gamma_1}sin(\lambda(1-\alpha)) \\ \times[sin(\lambda\alpha)]\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} -\lambda^2 sin(\upsilon) \\ +\dfrac{\lambda^3}{\gamma_1}sin(\lambda(1-\alpha))\times[sin(\lambda\alpha)]\end{pmatrix}=0$$

معادلات (۲۰) و (۲۱) را می‌توان به صورت حاصلضرب ماتریس در بردار مجهولات، مطابق رابطه‌ی (۲۲) بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0\end{Bmatrix}$$

$$A_{11}=\lambda\left(1+\frac{1}{\gamma_1}sin(\lambda(1-\alpha))\right.$$
$$\left.\times[sin(\lambda\alpha)]\right)-sin(\lambda)$$

$$A_{12}=\lambda^2 sin(\lambda)$$
$$-\frac{\upsilon^3}{\gamma_1}sin(\lambda(1-\alpha))\times[sin(\lambda\alpha)] \qquad (۲۲)$$

$$A_{21}=sin(\lambda)$$
$$-\frac{\lambda}{\gamma_1}sin(\lambda(1-\alpha))\times[sin(\lambda\alpha)]$$

$$A_{22}=-\lambda^2 sin(\lambda)$$
$$+\frac{\lambda^3}{\gamma_1}sin(\lambda(1-\alpha))\times[sin(\lambda\alpha)]$$

جواب غیر بدیهی رابطه‌ی بالا، از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب حاصل خواهد شد:

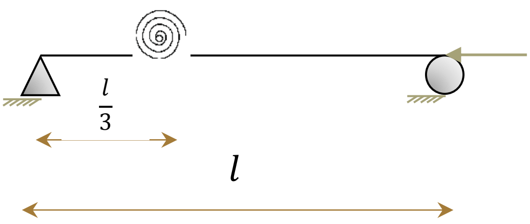
$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}=0 \qquad (۲۳)$$

پس از ساده سازی، حاصل دترمینان بالا به صورت معادله‌ی (۲۴) به دست می‌آید:

$$-\lambda^3 sin(\lambda)$$
$$+\frac{\lambda^4}{\gamma_1}sin(\lambda(1-\alpha))\times[sin(\lambda\alpha)]=0 \qquad (۲۴)$$

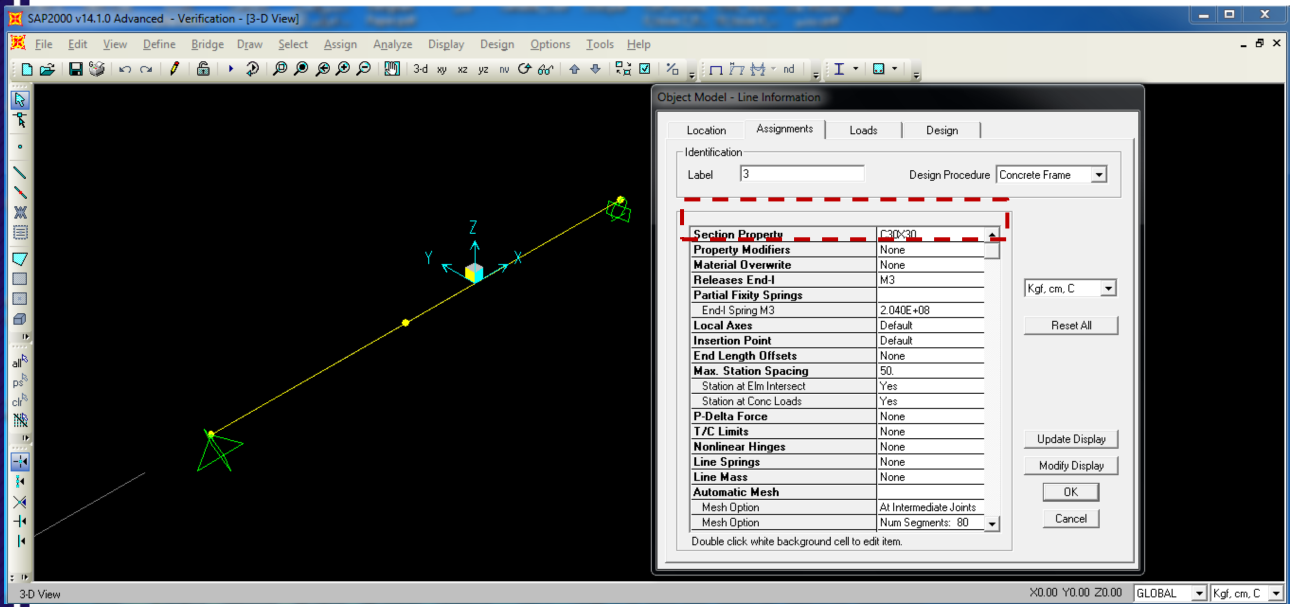
۳-۱-صحت سنجی در حالت یک ترکه

در این بخش به منظور کنترل درستی روابط تحلیلی به دست آمده به مدل سازی ستونی ترک خورده با شرایط تکیه گاهی دو سر ساده‌در نرم افزار SAP2000 پرداخته و نتیجه به دست آمده از آن با نتیجه تحلیلی این پژوهش مقایسه می‌شود. بدین منظور ستون بتنی دو سر ساده با مقطع مربعی به ابعاد 30×30 cm، طول L=600 cm، عمق ترک d=14 cm و ضریب ارتجاعی E=253456.35 kg/cm^2 در نظر گرفته می شود (شکل ۱). موقعیت ترک در $\frac{1}{3}$ از تکیه‌گاه فرض می‌شود. مدل سازی ترک در نرم افزار اجزای محدود SAP2000 از طریق شبیه سازی با فنر پیچشی انجام شده، به طوری که بر اساس مشخصات مقطع و عمق ترک، سختی فنر پیچشی با استفاده از رابطه (۶) برابر k=2040 ton.m به دست می آید. از سوی دیگر به منظور مدل‌سازی ستون از المان Beam استفاده شده است. جزئیات مربوط به مدل‌سازی و اعمال سختی پیچشی فنر در شکل ۲ نشان داده است. با مدل‌سازی ستون با مشخصات یاد شده در نرم‌افزار اجزاء محدود SAP2000، بار بحرانی کمانش ستون برابر با P_{cr}=379280.957 Kg گزارش می‌شود که متناظر با λ=2.825 می‌باشد (شکل ۳). از سوی دیگر با توجه به مشخصات مقطع و ترک، بر اساس روابط (۵) و (۶) مقدار عددی γ=7.15 به دست می‌آید. با جای‌گذاری این مقدار در رابطه (۲۴) و حل عددی این رابطه مقدار λ=2.8258 حاصل خواهد شد که دقیقا برابر مقدار λ به دست آمده از نرم افزار اجزای محدود SAP2000 می‌باشد.

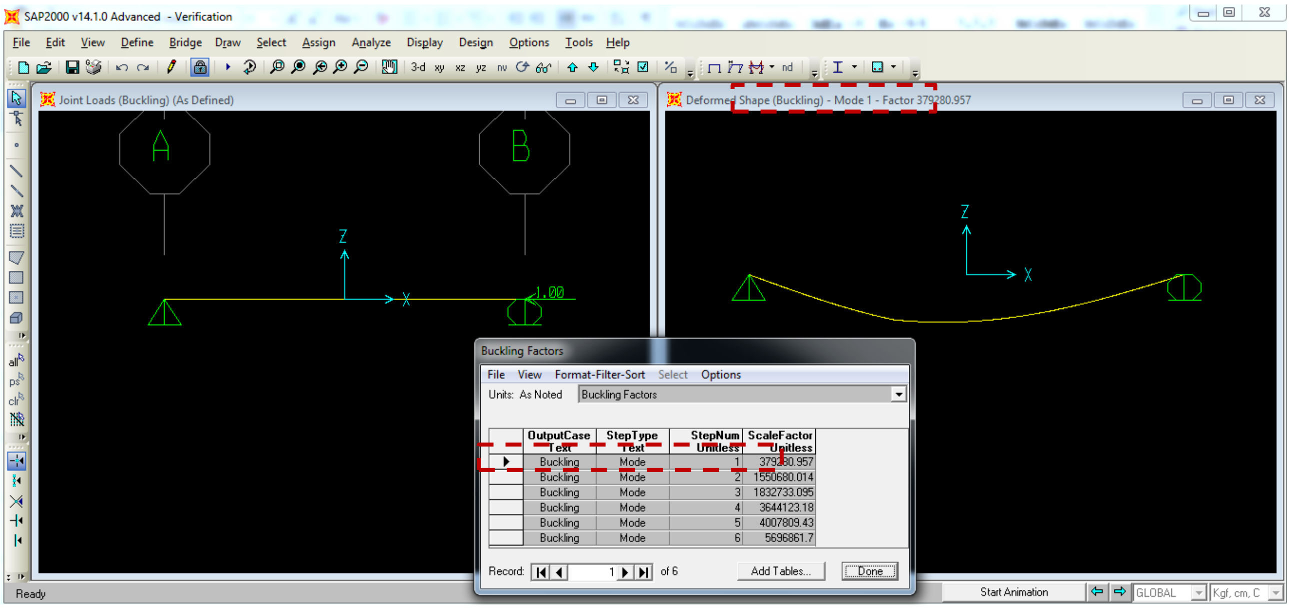


شکل ۱- مدل سازه ای: ستون یک ترکه (فاصله: یک سوم از تکیه‌گاه)

فصلنامه علمی آنالیز سازه-زلزله
دوره ۲۰، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲



شکل ۲- مدل سازه‌ای ستون یک ترکه در SAP2000 و اعمال سختی پیچشی فنر جهت شبیه سازی ترک

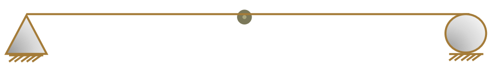


شکل ۳- بار بحرانی کمانش گزارش شده توسط SAP2000 بر حسب کیلوگرم در حالت یک ترکه

۳-۲- بررسی تغییرات γ

هنگامی که γ به سمت صفر میل می‌کند، ترک توسط لولا قابل مدل‌سازی می‌باشد (شکل۴). در مقابل با میل کردن γ به سمت بینهایت، سازه مورد نظر ستونی دوسرساده را تشکیل می‌دهد. در این حالت بر اساس رابطه‌ی کلاسیک اولر، بار کمانشی ستون به صورت رابطه‌ی (۲۵) می‌باشد:

$$\gamma \Rightarrow \infty : \lambda = \pi \qquad (۲۵)$$

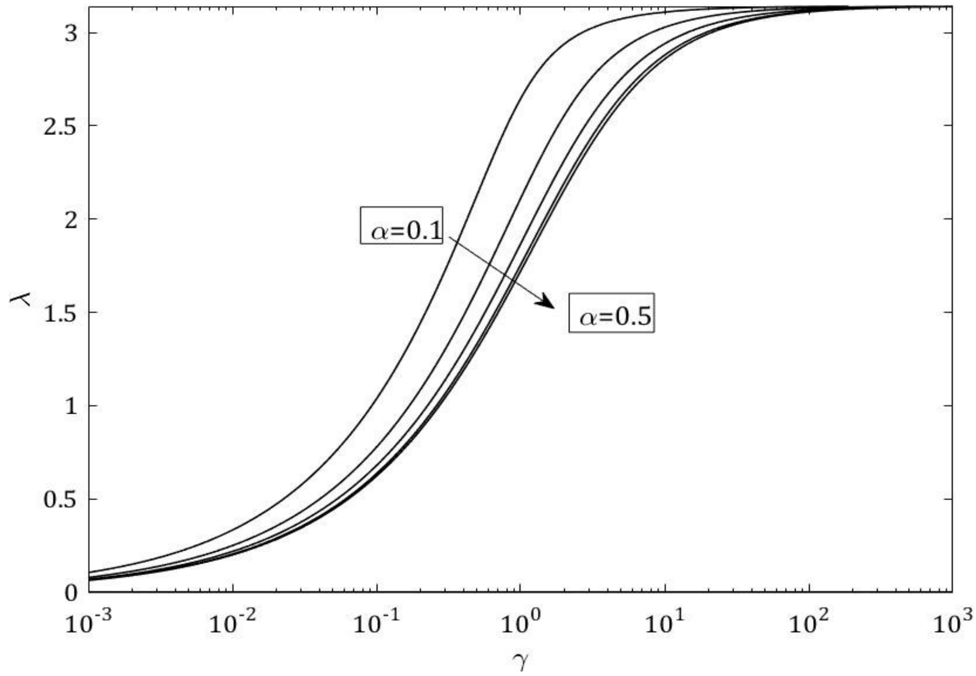


شکل ۴: حالت خاص: $\gamma = 0$، ستون با مفصل داخلی

شکل (۵)، اثر پارامتر سختی ترک (γ) به ازای موقعیت‌های مختلف ترک را روی بار کمانشی نشان می‌دهد. بار کمانشی مستقل از موقعیت ترک با افزایش پارامتر سختی ترک افزایش یافته و با میل کردن پارامتر سختی به بینهایت (ستون دو سر ساده ایده ال)، بار کمانشی مطابق رابطه (۲۴) به

$\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ میل می‌کند(بار کمانش اولر). از سوی دیگر همان‌گونه که در شکل (۵) مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن ترک به تکیه‌گاه ستون به ازای پارامتر سختی ترک ثابت (ثابت بودن عمق ترک)، بار کمانشی افزایش می‌یابد.

دوره ۲۰، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲



شکل ۵ : اثر پارامتر سختی ترک روی بار کمانشی ستون ترک خورده

۳- بررسی ستون با دو ترک

در این بخش به بررسی ستون با دو ترک پرداخته می‌شود. بر این اساس، رابطه جابجایی برای ستون های دوترکه با بسط رابطه (۱۸) به صورت معادله‌ی (۲۶) بازنویسی می‌شود:

$$\tilde{u}(\xi) = \beta^*(\xi) + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\gamma_1} sin(\lambda(\xi-\theta_1))H(\xi-\theta_1) \times [-\lambda^2\eta_1 + c_1\theta_1 + c_2]\right] + \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\gamma_2} sin(\lambda(\xi-\theta_2))H(\xi-\theta_2) \times [-\lambda^2\eta_2 + c_1\theta_2 + c_2]\right] \tag{۲۶}$$

در رابطه بالا $\boldsymbol{\theta_1}$ و $\boldsymbol{\theta_2}$ ، ضرایبی از طول ستون بوده و به ترتیب نشان دهنده‌ی موقعیت ترک‌ها از انتهای چپ ستون ترک اول و ترک دوم می‌باشند. اعمال شرایط مرزی (۱۴) تا (۱۷) منجر به روابط (۲۹-۲۷) خواهد شد:

$$\tilde{u}(0) = \beta^*(0) = 0 \rightarrow \frac{1}{\lambda^3}[c_3\lambda^3 cos(0)] = 0 \rightarrow c_3 = 0 \tag{۲۷}$$

$$\tilde{u}''(0) = 0 \rightarrow \frac{1}{\lambda^3}[c_2(\lambda^3 cos(0))] = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$\tilde{u}(1) = c_1\left([\tfrac{1}{\lambda^3}(\lambda - sin(\lambda))] + [[\tfrac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \tfrac{sin(\lambda\theta_2)}{\lambda}] + [\tfrac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \left(-\tfrac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times \tfrac{sin(\lambda\theta_1)}{\lambda}]\right) + \tfrac{1}{\gamma_1\lambda} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times \tfrac{sin(\lambda\theta_1)}{\lambda}] + c_4\left([\tfrac{1}{\lambda} sin(\lambda)] + [\tfrac{1}{\gamma_1\lambda} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times (-\lambda) sin(\lambda\theta_1)] + [\tfrac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times (-\lambda) sin(\lambda\theta_2)] + [\tfrac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \left(-\tfrac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times (-\lambda) sin(\lambda\theta_1)]\right) \tag{۲۸}$$

$$\tilde{u}''(1) = c_1\left([\tfrac{1}{\lambda} sin(\lambda)] - [\tfrac{1}{\gamma_1} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times sin(\lambda\theta_1)] - [\tfrac{1}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times sin(\lambda\theta_2)] - [\tfrac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \right. \tag{۲۹}$$

$$\left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times \frac{sin(\lambda\theta_1)}{\lambda}]\Big) + c_4 \Big([-\lambda\, sin(\lambda)] - [\frac{\lambda}{\gamma_1} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)] - [\frac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_2)] - [\frac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-$$

$$\theta_2)) \times \left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)]\Big) = 0$$

معادلات (۲۸) و (۲۹) را می‌توان به صورت حاصلضرب ماتریس در بردار مجهولات، مطابق رابطه‌ی (۳۰) بازنویسی کرد

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۳۰}$$

به طوری که :

$$A_{11} = [\frac{1}{\lambda^3}(\lambda - sin(\lambda))] + [\frac{1}{\gamma_1\lambda} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times \frac{sin(\lambda\theta_1)}{\lambda}] + [\frac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \frac{sin(\lambda\theta_2)}{\lambda}] + [\frac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times \frac{sin(\lambda\theta_1)}{\lambda}] \tag{۳۱}$$

$$A_{21} = [\frac{1}{\lambda} sin(\lambda)] - [\frac{1}{\gamma_1} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times sin(\lambda\theta_1)] - [\frac{1}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times sin(\lambda\theta_2)] - [\frac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times \frac{sin(\lambda\theta_1)}{\lambda}] \tag{۳۲}$$

$$A_{12} = [\frac{1}{\lambda} sin(\lambda)] + [\frac{1}{\gamma_1\lambda} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)] + [\frac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_2)] + [\frac{1}{\gamma_2\lambda} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)] \tag{۳۳}$$

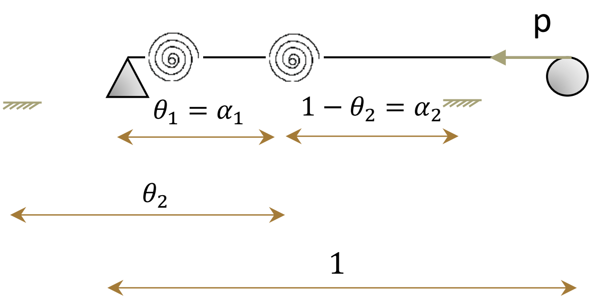
$$A_{22} = [-\lambda\, sin(\lambda)] - [\frac{\lambda}{\gamma_1} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)] - [\frac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_2)] - [\frac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)] \tag{۳۴}$$

جواب غیر بدیهی رابطه‌ی بالا، از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب حاصل خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{۳۵}$$

پس از ساده سازی، حاصل دترمینان بالا به صورت معادله‌ی (۳۶) به دست می‌آید :

$$[-\lambda\, sin(\lambda)] - [\frac{\lambda}{\gamma_1} sin(\lambda(1-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)] - [\frac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_2)] - [\frac{\lambda}{\gamma_2} sin(\lambda(1-\theta_2)) \times \left(-\frac{\lambda}{\gamma_1}\right) sin(\lambda(\theta_2-\theta_1)) \times (-\lambda)\, sin(\lambda\theta_1)] = 0 \tag{۳۶}$$



شکل۶- مدل سازه ای ستون با دوترک

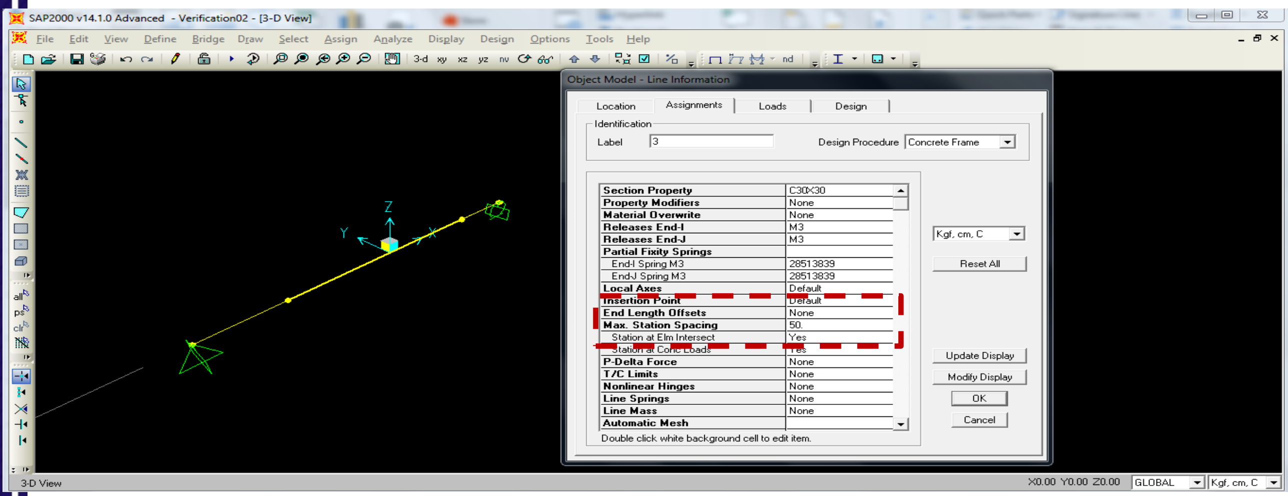
۳-۱- صحت سنجی در حالت دو ترکه

در این بخش نیز به منظور کنترل درستی روابط تحلیلی به دست آمده برای ستون دو ترکه به مدل سازی ستونی ترک خورده با شرایط تکیه گاهی دو سر ساده در نرم افزار SAP2000 پرداخته و نتیجه به دست آمده از آن با نتیجه تحلیلی این پژوهش مقایسه می‌شود. بدین منظور ستونی بتنی مشابه بخش ۳- ۱در نظر گرفته می‌شود. با این تفاوت که موقعیت قرارگیری دو ترک در $\frac{1}{5}$ از تکیه‌گاه‌ها فرض شده و پارامتر سختی ترک‌ها $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ در نظر گرفته می‌شود. سختی فنرهای پیچشی معادل پارمترهای سختی ترک‌ها مطابق رابطه (۵)، k=285.1 ton.m به دست می‌آید. جزئیات مربوط به مدل سازی و اعمال سختی پیچشی فنرها در شکل ۷ نشان

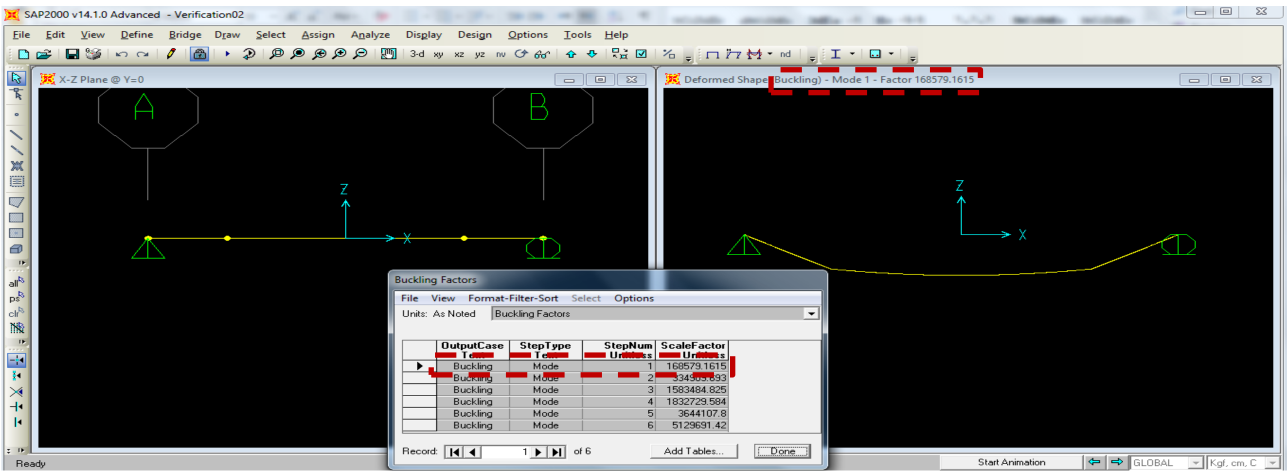
داده شده است. با مدل سازی ستون با مشخصات یاد شده در نرم‌افزار اجزاء محدود SAP2000، بار بحرانی کمانش ستون برابر با P_{cr}=168579.2 Kg گزارش می‌شود که متناظر با λ=1.88 می‌باشد (شکل ۸). با جای‌گذاری پارامتر سختی ترک‌ها در رابطه‌ی (۳۶) و حل عددی این رابطه، مقدار λ=1.8871 حاصل خواهد شد که تقریب خیلی خوبی برای λ به دست آمده از نرم افزار اجزاء محدود SAP2000 می‌باشد.

۴-۲- بررسی تغییرات γ

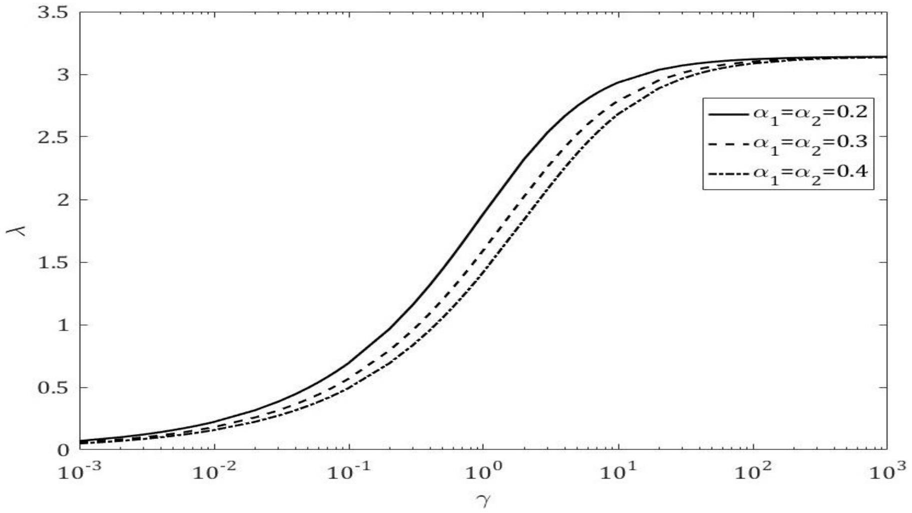
در این بخش اثرات پارامتر سختی ترک (γ) به ازای موقعیت‌های مختلف ترک روی بار کمانشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بار کمانشی مستقل از موقعیت ترک با افزایش پارامتر سختی ترک افزایش یافته و با میل کردن پارامتر سختی به بینهایت (ستون دو سر ساده ایده ال)، بار کمانشی مطابق رابطه (۳۶) به $\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ میل می‌کند (بار کمانش اولر). از سوی دیگر همان‌گونه که در شکل (۹) مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن موقعیت ترک‌ها به تکیه‌گاه ستون به ازای پارامتر سختی ترک ثابت (ثابت بودن عمق ترک)، بار کمانشی افزایش می‌یابد. شکل (۱۰) تغییرات بار کمانشی بر اساس نسبت‌های مختلف پارامتر سختی ترک‌ها را نشان می‌دهد. موقعیت هر دو ترک به فاصله 0.4 از هر تکیه گاه می‌باشد. در این حالت پارامتر سختی یکی از ترک‌ها ثابت (عمق ترک ثابت) و سختی ترک دیگر، ضریبی از اولی می‌باشد. همان گونه که ملاحظه می‌شود با افزایش پارامتر سختی مربوط به ترک دوم، مقدار بار بحرانی کمانش نیز افزایش می‌یابد. از سوی دیگر همان گونه که مشاهده می شود، برای نسبت های $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \geq 2$ تغییر قابل ملاحظه ای در بار بحرانی کمانش اتفاق نمی افتد.



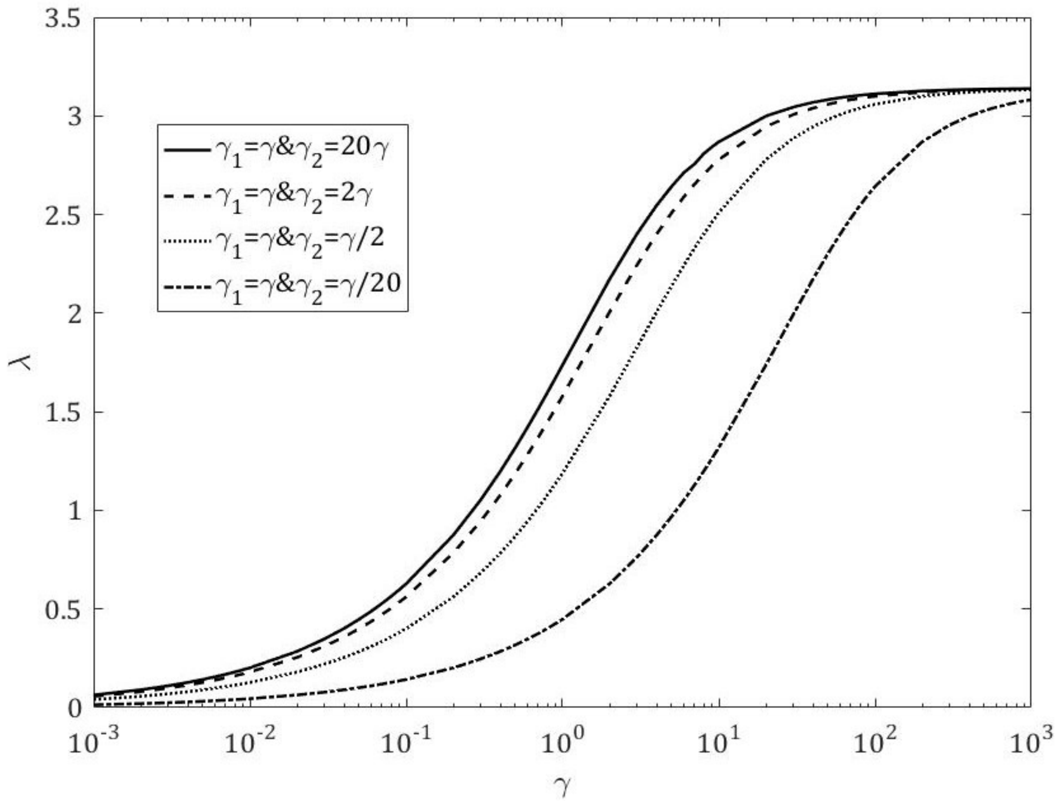
شکل ۷- مدل سازه ای ستون دو ترکه در SAP2000 و اعمال سختی پیچشی فنرها جهت شبیه سازی ترک



شکل ۸: بار بحرانی کمانش گزارش شده توسط SAP2000 بر حسب کیلوگرم در حالت دو ترکه

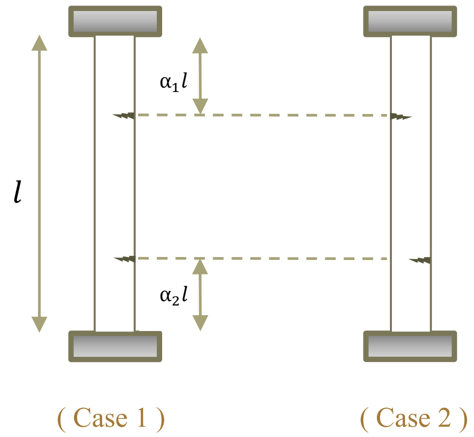


شکل ۹ : اثر پارامتر سختی ترک روی بار کمانشی ستون ترک خورده (دوترک)



شکل ۱۰ : اثر نسبت پارامتر سختی ترک‌ها روی بار کمانشی ستون دو ترکه با فرض ثابت بودن عمق یکی از ترک ها ($\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_1 = 0.4}$)

در گام بعد، به منظور بررسی اثرات بسته شدن ترک (بر اساس علامت لنگر خمشی $= \beta_1$) دو حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد. حالت اول: $\beta_1 = \gamma; \beta_2 = 0$ (یا برعکس، بدین معنی که ترک دو باز و ترک اول بسته باشد) و حالت دوم: $\beta_2 = \gamma$. به بیانی دیگردر حالت اول دو ترک روی یک وجه ستون قرار گرفته و در اثر اعمال لنگر خمشی هر دو باز می‌شوند، در حالی که در حالت دوم ترک‌ها رو به روی هم و در دو وجه مخالف قرار گرفته اند (شکل۱۱).



شکل ۱۱ –موقعیت‌های مختلف ترک به منظور بررسی اثر باز و بسته شدن ترک روی مود کمانش

نتایج ارائه شده در شکل (۱۲) به خوبی اثرات بسته شدن ترک روی بار کمانشی ستون را نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل(۱۲) مشاهده می‌شود، بار کمانشی حالت دوم نسبت به حالت اول بیشتر می‌باشد. در حالت اول تحت اثر کمانش هر دو ترک باز شده در حالی که در حالت دوم تنها یکی از ترک‌ها باز می‌شود.

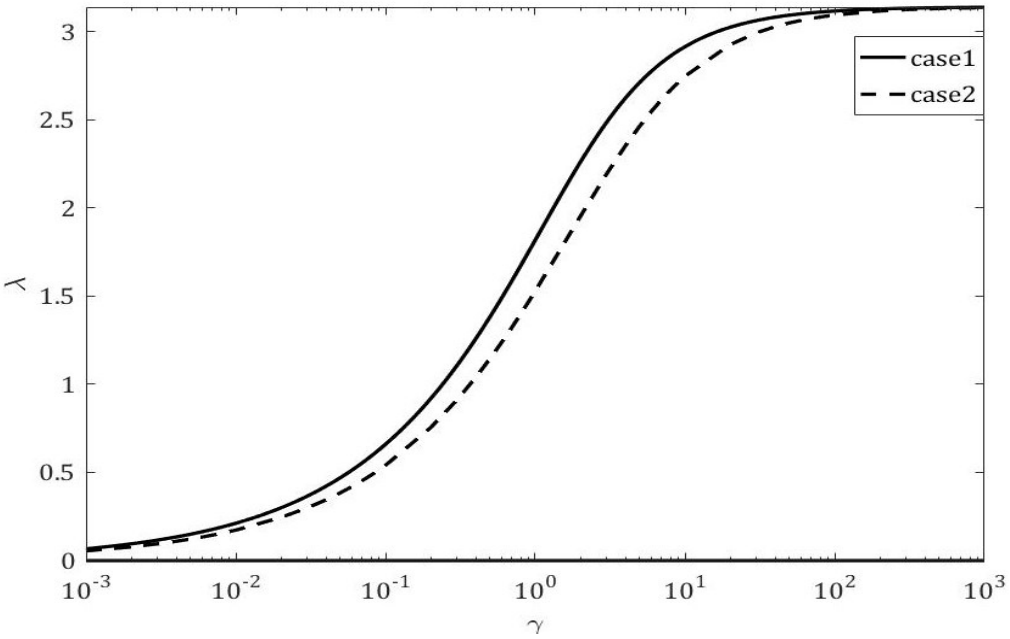
شکل (۱۳) تغییرات بار کمانشی دو حالت نسبت به هم را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بیشترین تغییرات در $\alpha = \frac{1}{3}$ حدود ۱۸٪ و برای $\alpha = 0.4$ حدود ۲۲٪ مربوط به خسارات شدید می باشد. با بررسی شکل (۱۳)، مشاهده می‌شود که به هر میزان، ترک از تکیه گاه فاصله بگیرد شاخص خسارت افزایش می‌یابد. با افزایش پارامتر سختی مربوط به ترک (کاهش عمق ترک)، تغییرات قابل چشم پوشی بوده و به سمت صفر میل می‌کند.

۵- نتیجه گیری

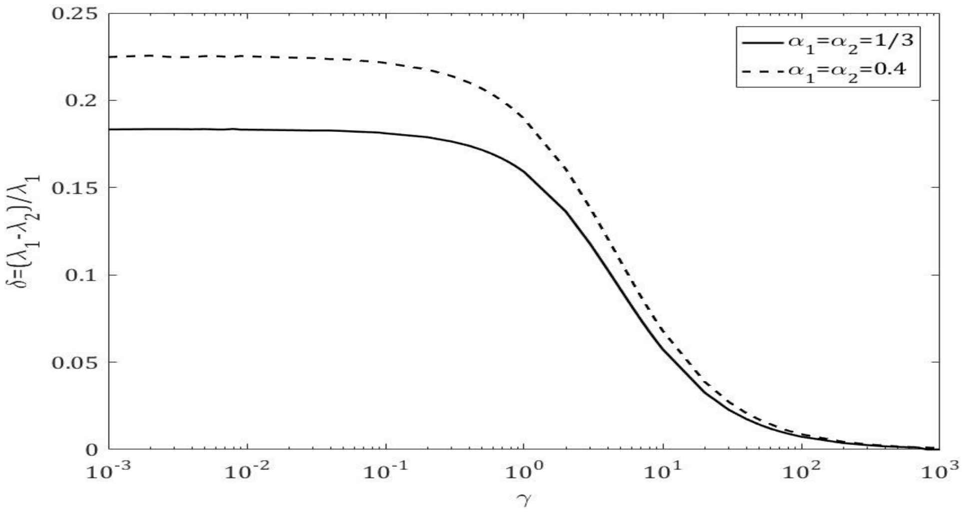
در این پژوهش، کمانش ستون دو سرساده با یک و دو ترک به صورت تحلیلی و با رویکردی جدید مورد بررسی قرار گرفت. معادله رفتاری حاکم بر مسأله با استفاده از تئوری تیر اویلر – برنولی و بهره گیری از خاصیت تابع دلتای دیراک برای ترک‌ها به دست آمد. روش‌های مورد بررسی در پژوهش های پیشین عمدتا با بار محاسباتی قابل توجهی در حل مساله همراه بوده و نیازمند اعمال شرایط سازگاری و پیوستگی خیز و نیروی برشی در محل ترک می‌باشد. همان گونه که روند محاسبات در این پژوهش نشان می‌دهد، درنظر گرفتن اثرات کاهش سختی و همچنین باز و بسته شدن مربوط به ترک‌ها ناشی از علامت لنگر خمشی در هر نقطه از ستون مورد بررسی، به راحتی با استفاده از تابع دلتای دیراک امکان پذیر است. روش پیشنهادی در نهایت منجر به چهار ضریب مجهول شده که تنها با اعمال شرایط مرزی دو انتهای ستون و یافتن ماتریس ضرایب، معادله مشخصه کمانش جهت یافتن بار کمانش ستون ترک خورده قابل محاسبه است. از روش پیشنهادی به منظور یافتن بار کمانشی، اثرات سختی ترک به ازای موقعیت های مختلف در دو حالت یک و دو ترکه و همچنین تاثیر باز و بسته شدن ترک روی بار کمانشی استفاده شد. به منظور صحت سنجی روابط تحلیلی به دست آمده از نرم افزار اجزای محدود SAP2000 بهره گرفته شد. نتایج عددی حاصل از تحلیل نشان می‌دهد:

- درحالت یک ترکه، بار کمانشی مستقل از موقعیت ترک با افزایش پارامتر سختی ترک افزایش یافته و با میل کردن پارامتر سختی ترک به بی نهایت (ستون دو سرساده ایده آل)، بار کمانشی به رابطه ارائه شده توسط اولر برای ستون‌های دوسر ساده میل می کند.
- از سوی دیگر، در حالت یک ترکه، با نزدیک شدن ترک به تکیه‌گاه ستون به ازای پارامتر سختی ترک ثابت (ثابت بودن عمق ترک) بار کمانشی افزایش می یابد.
- در حالت دو ترکه موقعیت ترک‌ها بسته به این که هر دو روی یک وجه و یا روی دو وجه مخالف ستون قرار گرفته باشند مورد بررسی قرار گرفت، نتایج حاصل از تحلیل ستون دوترکه نشان دهنده‌ی آن است که پدیده ی بسته شدن ترک بسته به علامت لنگرخمشی روی بار کمانشی ستون تأثیرگذار بوده و افزایش بار کمانشی را سبب خواهد شد. به طوری که با فرض خسارت شدید (عمق ترک زیاد) بسته شدن ترک افزایش ۲۲ درصدی بار کمانشی را در مقایسه با فرض باز بودن ترک، سبب خواهد شد.
- با افزایش پارامتر سختی ترک (کاهش عمق ترک) تغییرات قابل چشم پوشی است و به سمت صفر میل می کند.
- بررسی شاخص خسارت برای ترک‌های با عمق یکسان و در فواصل متفاوت از تکیه گاه نشان می دهد به هر میزان که ترک از تکیه‌گاه فاصله بگیرد شاخص خسارت نیز افزایش می‌یابد.

فصلنامه علمی
آنالیز سازه-زلزله
دوره ۲۰، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲



شکل ۱۲ - اثر پدیده بسته شدن ترک روی بار کمانشی ستون ترک خورده



شکل ۱۳- تاثیر ترک بسته نسبت به ترک باز

۶- مراجع

[1] Krauberger N, Bratina S, Saje M, Schnabl S, Planinc I. Inelastic buckling load of a locally weakened reinforced concrete column. Engineering Structures. 2012 Jan 1;34:278-88.

https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.09.006

[2] Vadillo G, Loya JA, Fernández-Sáez J. First order solutions for the buckling loads of weakened Timoshenko columns. Computers & Mathematics with Applications. 2012 Oct 1;64(8):2395-407.

https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.05.009

[3] Nikpour K. Buckling of cracked composite columns. International Journal of Solids and Structures. 1990 Jan 1;26(12):1371-86.

https://doi.org/10.1016/0020-7683(90)90084-9

[4] Dehghani Mahmoodabadi MA, Dehghan Manshadi S.H., Ranjbaran A, Esfandiari M.J., Dehghan Manshadi S.M. Analysis of localization in the buckling of a two-span column with elastic end connections. European Journal of Environmental and Civil Engineering. 2018 Jul 3;22(7):811-35. https://doi.org/10.1080/19648189.2016.1219879

[5] Kisa M. Vibration and stability of multi-cracked beams under compressive axial loading. International Journal of the Physical Sciences. 2011 Jun 4;6(11):2681-96. https://doi.org/10.5897/IJPS11.493

[6] Yazdchi K, Gowhari Anaraki AR. Carrying capacity of edge-cracked columns under concentric vertical loads. Acta mechanica. 2008 Jun;198(1-2):1-9. https://doi.org/10.1007/s00707-007-0523-z

[7] Toygar ME, Kıral Z, Sayman O, Arman Y, Özen M. Effect of interface crack on lateral buckling behavior and free vibration response of a sandwich composite beam. Journal of composite materials. 2013 Jul;47(15):1843-51. https://doi.org/10.1177/0021998312451611

[8] Okamura H, Liu HW, Chu CS, Liebowitz H. A cracked column under compression. Engineering Fracture Mechanics. 1969 Apr 1;1(3):547-64. https://doi.org/10.1016/0013-7944(69)90011-3

[9] Zhou L, Huang Y. Crack effect on the elastic buckling behavior of axially and eccentrically loaded columns. Structural engineering and mechanics: An international journal. 2006;22(2):169-84. https://doi.org/10.12989/sem.2006.22.2.169

[10] Challamel N, Lanos C, Casandjian C. Localization in the buckling or in the vibration of a two-span weakened column. Engineering Structures. 2006 Apr 1;28(5):776-82. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.10.005

[11] Fu C, Yang X. Bending of a Viscoelastic Timoshenko Cracked Beam Based on Equivalent Viscoelastic Spring Models. Advances in Civil Engineering. 2021 Oct 21;2021:1-6. https://doi.org/10.1155/2021/8663213

[12] Soliman ES. Investigation of modal and damage parameters of isotropic cantilever beam under double-sided crack. Journal of Failure Analysis and Prevention. 2020 Feb;20:120-36. https://doi.org/10.1007/s11668-020-00806-z

[۱۳] دهقان منشادی، هادی؛ علوی نسب، عماد؛ امیری، حمیدرضا. تاثیر ترک روی رفتار کمانشی ستون ضعیف شده. نشریه مهندسی سازه و ساخت;۱۴۰۰، ۸ (شماره ویژه ۱): ۴۹۳-۵۰۶.
doi: 10.22065/jsce.2020.208226.1998

[14] Zill DG. Advanced engineering mathematics. Jones & Bartlett Learning; 2020 Dec 1.