

## تحلیل کمانش ورقهای مستطیلی FGM به روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده در معرض توزیع غیر یکنواخت بارهای درون صفحه‌ای

محمد مهدی نجفی زاده<sup>۱\*</sup> رضا کاظمی مهرآبادی<sup>۲</sup>

\* نویسنده مسئول M-najafizadeh@iau-arak.ac.ir

### چکیده

در این مقاله ضریب کمانش صفحات مستطیل شکلی که از مواد FGM ساخته شده‌اند، به کمک روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده، محاسبه می‌شود. ابتدا معادله حاکم بر کمانش ورق محاسبه و سپس بر اساس روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده، مشتقات موجود در معادله تبدیل به مقادیر تابع، در نقاط شبکه داخل ناحیه، حل می‌گردند. در ادامه، معادله تبدیل به یک مسئله مقدار ویژه خواهد شد که با محاسبه مقادیر ویژه، ضریب کمانش به دست می‌آید. در حل مسئله دو نوع حالت بارگذاری برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین اثر ثابت قانون توانی بر ضریب کمانش، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه، درحالی که جنس ورق ایزوتروپیک باشد، نتایج این روش با نتایج به دست آمده از راه‌های تفاضلات متناهی و المان محدود مقایسه و بررسی می‌شود. این حقیقت نشان می‌دهد که روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده برای به دست آوردن بارهای کمانش صفحات مستطیلی تحت نیروهای توزیع شده غیر یکنواخت برای شرایط مرزی مختلف روش بسیار مناسبی می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** کمانش، مواد FGM، ورق ایزوتروپیک، روش جدید دیفرانسیل اصلاح شده.

۱- استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک.

۲- کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک.

## ۱- مقدمه

در سالهای اخیر از روش مربعات دیفرانسیلی (DQ) برای بررسی کمانش ورقهای مستطیلی استفاده زیادی شده است. این روش برای اولین بار در سال ۱۹۷۱ توسط بلمن و کاستی [۱] به صورت یک روش عددی موثر و ساده برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی خطی و غیرخطی از مسائل مقدار مرزی مطرح شد. روش کلی مربعات دیفرانسیلی مبتنی بر تقریب و تخمین مشتقات جزئی از یک تابع نسبت به یک متغیر در هر نقطه مجزاست. در سال ۱۹۹۶، آقای وانگ [۲] با اختصاص دادن دو درجه آزادی برای هر نقطه انتهایی معادله دیفرانسیل مرتبه ۴، به طور مستقل، روشی را برای به کار بردن ترکیبات شرایط مرزی چندگانه پیشنهاد کرد. این روش، روش المانی مربعات دیفرانسیلی (DQEM) نامیده شد. به دنبال آن در سال ۲۰۰۱، آقای لی یو و همکارش [۳] روش جدیدی را با نام قانون مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته (GDQR) را که مبتنی بر تحلیل چند جمله‌ای تقریبی مرتبه بالا است را پیشنهاد کردند. این روش قابلیت تعیین تمامی بارهای کمانش را دارد. با استفاده از دو روش اخیر می‌توان تمام شرایط مرزی را به دست آورد.

در این مقاله با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده، ضریب کمانش صفحات مستطیل شکلی که از مواد FGM ساخته شده اند و تحت نیروهای درون صفحه‌ای قرار دارند محاسبه می‌شود. اخیراً توسط برت و دواراکندا [۴] راه حل تحلیلی برای تنشهای درون صفحه‌ای برای حالت توزیع بار گسترده کسینوسی، معرفی شده است. بارهای کمانش با استفاده از روش گالرکین حساب می‌شود. بارهای کمانش با دقت زیادی برای یک ورق مستطیلی که تمام لبه‌های آن تکیه‌گاهی ساده است، به دست آورده می‌شود. روشهای زیادی از قبیل ریلی ریتز، روش اجزای محدود، روش اختلاف محدود و روش سریهای فوریه برای حل این گونه مسائل وجود دارد، که ما در اینجا از روش مربعات دیفرانسیلی استفاده کرده‌ایم. هنگامی که از این روش برای حل مسائل کمانش ورقهای مستطیلی که تحت بارهای لبه‌ای یکنواخت قرار گرفته‌اند، استفاده می‌شود جوابها به نقاط شبکه بسیار حساس می‌باشند [۵]. با فضای شبکه غیر یکنواخت پیشنهاد شده [۶]، راهی جدید برای به کار بردن شرایط مرزی [۷-۸] ارائه شد که به کمک آن مسائل، کمانش ورق

غیرهمگن با موفقیت حل شده است [۹]. اخیراً برای استفاده از اعمال شرایط مرزی، روشی به کار برده شده است که آن را روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده می‌نامند [۱۰]. این روش با موفقیت برای به دست آوردن بارهای کمانش برای ورق غیرهمگن با بارگذاری درون صفحه‌ای یکنواخت استفاده می‌شود [۱۱].

در روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده به جای استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم در ترمهای جابه‌جایی، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه چهار در ترمهای تابع تنش ابری حل شده و توزیع تنش دقیق برای حالت توزیع غیر یکنواخت بارگذاری درون صفحه‌ای به دست آمده است. این روش تنها برای به دست آوردن بارهای کمانش برای بارگذاری با توزیع خطی یا یکنواخت با موفقیت به کار برده شده است. در این مقاله به بررسی روش عددی مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده به منظور محاسبه ضریب کمانش صفحات مستطیل شکلی که از مواد FGM ساخته شده‌اند، پرداخته می‌شود که نتایج آن با داده‌های المان محدود و حل تحلیلی، مطابق با مرجع [۱۲] مقایسه شده است.

## ۲- خواص ماده

یک ورق مستطیلی ساخته شده از مواد FGM مطابق شکل (۱) مفروض است. ماده در سطح بالایی و پایینی به ترتیب از جنس فلز و سرامیک می‌باشد. مدول الاستیسیته E و ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳].

$$E(z) = E_c V_c + E_m (1 - V_c),$$

$$\alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m (1 - V_c), \quad (1)$$

$$v(z) = v_0.$$

زیر نویسهای c و m به ترتیب، معرف خواص سرامیک و فلز می‌باشند. نسبت حجمی سرامیک  $V_c$  به فلز  $V_m$  با استفاده از قانون توانی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$V_c = \left(\frac{z+h}{2h}\right)^p \quad (2)$$

$$V_m = 1 - V_c$$

به طوری که Z مختصه در راستای ضخامت ورق و  $\left(-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}\right)$  و  $h$  ضخامت ورق و  $p$  ثابت قانون توانی می‌باشد که مقدار آن

به طوری که  $w, v, u$  مؤلفه‌های جابه‌جایی به ترتیب در جهات مختصات  $z, y, x$  می‌باشد. زیر نویس ( $\cdot$ ) نشانگر مشتق جزئی است. روابط تنش کرنش بدون در نظر گرفتن اثرات حرارت برای ورق فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{E}{1-\nu^2} [\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y] \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{E}{1-\nu^2} [\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x] \end{aligned} \quad (7)$$

بطوریکه  $E$  مدول الاستیسیته،  $\nu$  ضریب پواسون برای مواد FGM می‌باشند، که توسط روابط (۳) بیان شد.  $\bar{\sigma}_x$  و  $\bar{\sigma}_y$  تنشهای نرمال و  $\bar{\sigma}_{xy}$  تنش برشی در هر نقطه از ضخامت ورق به فاصله  $z$  از صفحه میانی می‌باشد. نیروها و ممانها در واحد طول ورق مطابق روابط زیر بر حسب مؤلفه‌های تنش بیان می‌گردد.

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{ij} dz, \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{ij} z dz \quad (8)$$

$$i, j = x, y, xy$$

با جایگذاری روابط (۳)، (۵) و (۷) در روابط (۸) و اعمال انتگرالها، معادلات ساختاری ورق FGM به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_x + \nu_0 \varepsilon_y) + \frac{E_2}{1-\nu_0^2} (k_x + \nu_0 k_y) \\ N_y &= \frac{E_1}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_y + \nu_0 \varepsilon_x) + \frac{E_2}{1-\nu_0^2} (k_y + \nu_0 k_x) \\ N_{xy} &= \frac{E_1}{2(1+\nu_0)} \varepsilon_{xy} + \frac{E_2}{1+\nu_0} k_{xy} \end{aligned} \quad (9)$$

$$M_x = \frac{E_2}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_x + \nu_0 \varepsilon_y) + \frac{E_3}{1-\nu_0^2} (k_x + \nu_0 k_y)$$

$$M_y = \frac{E_2}{1-\nu_0^2} (\varepsilon_y + \nu_0 \varepsilon_x) + \frac{E_3}{1-\nu_0^2} (k_y + \nu_0 k_x)$$

$$M_{xy} = \frac{E_2}{2(1+\nu_0)} \varepsilon_{xy} + \frac{E_3}{1+\nu_0} k_{xy}$$

که در رابطه فوق  $N_{yx}, N_{xy}, N_y, N_x$  نیروهای برشی و قائم در صفحه و  $M_{yx}, M_{xy}, M_y, M_x$  گشتاورهای خمشی و پیچشی هستند. و همچنین از رابطه (۳) و (۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_m h + \frac{E_{cm} h}{p+1} \\ E_2 &= E_{cm} h^2 \left( \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p+2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$E_3 = \frac{E_m h^3}{12} + E_{cm} h^3 \left( \frac{1}{p+3} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{4(p+1)} \right)$$

بزرگتر یا مساوی صفر است. خواص ورق FGM با توجه به معادلات پیشنهاد شده توسط ردی [۱۴] به صورت زیر می‌باشد:

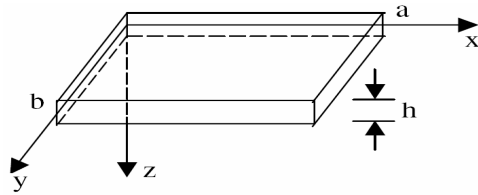
$$\begin{aligned} E(z) &= E_m + E_{cm} \left( \frac{z+h}{2h} \right)^p \\ \alpha(z) &= \alpha_m + \alpha_{cm} \left( \frac{z+h}{2h} \right)^p \end{aligned} \quad (3)$$

$$\nu(z) = \nu_0$$

که داریم:

$$E_{cm} = E_c - E_m, \quad \alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m$$

$$(E_1, E_2, E_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) E(z) dz \quad (4)$$



شکل (۱) شکل و سیستم مختصات یک ورق مستطیلی

### ۳- معادلات پایداری

یک ورق مستطیل شکل از جنس ماده FGM به طول  $a$  و عرض  $b$  و ضخامت  $h$  مفروض است. ورق، تحت بارگذاری مکانیکی می‌باشد. با در نظر گرفتن تئوری کلاسیک صفحات، مؤلفه‌های کرنش نرمال  $\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y$  و کرنش برشی  $\bar{\varepsilon}_{xy}$  در هر نقطه از ضخامت ورق به فاصله  $z$  از صفحه میانی مطابق روابط زیر تعریف می‌شوند [۱۵].

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z k_x \\ \bar{\varepsilon}_y &= \varepsilon_y + z k_y \end{aligned} \quad (5)$$

$$\bar{\varepsilon}_{xy} = \varepsilon_{xy} + 2z k_{xy}$$

به طوری که  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  کرنشهای نرمال و  $\varepsilon_{xy}$  کرنش برشی در صفحه میانی ورق می‌باشد.  $k_x, k_y$  معرف انحناها و  $k_{xy}$  پیچش می‌باشد. روابط سینماتیک صفحه میانی ورق (روابط کرنش-تغییر مکان) که به روابط غیر خطی ساندرز [۱۵] معروف است، عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} \beta_x^2, \quad \varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2} \beta_y^2 \\ \varepsilon_{xy} &= (u_{,y} + v_{,x}) + \beta_x \beta_y \\ k_x &= \beta_{x,x}, \quad k_y = \beta_{y,y} \end{aligned} \quad (6)$$

$$k_{xy} = \frac{1}{2} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})$$

$$\beta_x = -w_{,x}, \quad \beta_y = -w$$

$$\frac{E_T^{\nu} - E_1 E_T}{E_1 (1 - \nu_o^{\nu})} \nabla^4 w + N_{x_o} w_{,xx} + \quad (16)$$

$$N_{y_o} w_{,yy} + 2N_{xy_o} w_{,xy} = 0$$

به طوری که طبق تعریف:

$$\nabla^4 w = w_{,xxxx} + w_{,yyyy} + 2w_{,xxyy}$$

بر اساس تئوری کلاسیک، صفحات میدان جابه‌جایی  $(u, v, w)$  در دستگاه مختصات  $(x, y, z)$  در نظر گرفته می‌شود. فرض شود که حالت تعادل برای یک ورق بارگذاری شده در حالت کلی توسط مؤلفه‌های جابه‌جایی  $(u_o, v_o, w_o)$  تعریف می‌شود. جهت مطالعه امکان پایداری حالت تعادل، تغییرات کوچکی بر مؤلفه‌های جابه‌جایی اولیه به صورت  $(u_1, v_1, w_1)$  اعمال می‌شود.

مؤلفه‌های جابه‌جایی در همسایگی حالت تعادل عبارت است از:

$$u = u_o + u_1$$

$$v = v_o + v_1$$

$$w = w_o + w_1$$

با جایگذاری روابط (17) در رابطه (16) معادله پایداری ورق مستطیل شکل FGM بر اساس تئوری کلاسیک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{E_T^{\nu} - E_1 E_T}{E_1 (1 - \nu_o^{\nu})} \nabla^4 w_1 + N_{x_o} w_{1,xx} + \quad (18)$$

$$N_{y_o} w_{1,yy} + 2N_{xy_o} w_{1,xy} = 0$$

در روابط فوق عبارات  $N_{x_o}, N_{y_o}, N_{xy_o}$  نیروهای پیش کمانش بوده و از حل معادلات تعادل به دست می‌آید.

#### ۴- روش جدید دیفرانسیلی اصلاح شده

ضریب وزنی  $C_{ij}^{(k)}$ ، ضریب وزنی مشتق مرتبه  $k$ ام روش معمولی  $DQ$  تابع راه حل، در نقطه شبکه  $ij$  می‌باشد [۱۶]. حال برای محاسبه ضرایب وزنی روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده، از آنها استفاده می‌کنیم:

$$Q_i^k = \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(k)} Q_j \quad (19)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

در رابطه فوق  $C_{ij}^{(k)}$  ضرایب وزنی مشتق مرتبه  $k$ ام است و  $n$  تعداد کامل نقاط شبکه در مرز که شامل نقاط انتهایی نیز می‌باشد و  $Q_j$  مقدار حل در نقطه شبکه  $j$ می‌باشد.

در نهایت معادلات تعادل ورق مستطیلی FGM بر اساس تئوری کلاسیک صفحات عبارت‌اند از:

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$N_{y,y} + N_{xy,x} = 0$$

$$M_{x,xx} + M_{y,yy} + 2M_{xy,xy} \quad (11)$$

$$- N_x \beta_{x,x} - N_y \beta_{y,y}$$

$$- 2N_{xy} \beta_{x,y} + P_n = 0$$

با جایگذاری نیروها و ممانها از روابط (۹) در معادلات تعادل (۱۱) بر حسب جابه‌جایی خواهیم داشت:

$$\frac{E_1}{1 - \nu_o^{\nu}} (u_{,xx} + \nu_o v_{,yx}) - \frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (w_{,xxx} + \nu_o w_{,yyx})$$

$$+ \frac{E_1}{2(1 + \nu_o)} (u_{,yy} + v_{,xy}) - \frac{E_T}{1 + \nu_o} w_{,xyy} = 0 \quad (12-الف)$$

$$\frac{E_1}{1 - \nu_o^{\nu}} (v_{,yy} + \nu_o u_{,xy}) - \frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (w_{,yyy} + \nu_o w_{,xxy})$$

$$+ \frac{E_1}{2(1 + \nu_o)} (u_{,yx} + v_{,xx}) - \frac{E_T}{1 + \nu_o} w_{,xyx} = 0 \quad (12-ب)$$

$$\frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (u_{,xxx} + \nu_o v_{,yxx}) - \frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (w_{,xxx} + \nu_o w_{,yyx})$$

$$+ \frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (v_{,yyy} + \nu_o u_{,xyy}) - \frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (w_{,yyy} + \nu_o w_{,xxy})$$

$$+ \frac{E_T}{(1 + \nu_o)} (u_{,xyy} + v_{,xyx}) - \frac{2E_T}{1 + \nu_o} w_{,xyxy} + N_{x_o} w_{,xx}$$

$$+ N_{y_o} w_{,yy} + 2N_{xy_o} w_{,xy} = 0 \quad (13)$$

حال از معادله (۱۲-الف) نسبت به  $x$  و از معادله (۱۲-ب) نسبت به  $y$  مشتق گرفته و پس از جمع کردن آنها خواهیم داشت:

$$\frac{E_1}{1 - \nu_o^{\nu}} (u_{,xxx} + \nu_o v_{,yxx}) - \frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (w_{,xxxx} + \nu_o w_{,yyxx}) +$$

$$\frac{E_1}{1 - \nu_o^{\nu}} (v_{,yyy} + \nu_o u_{,xyy}) - \frac{E_T}{1 - \nu_o^{\nu}} (w_{,yyy} + \nu_o w_{,xxy}) + \quad (14)$$

$$\frac{E_1}{(1 + \nu_o)} (u_{,xyy} + v_{,xyx}) - \frac{2E_T}{1 + \nu_o} w_{,xyxy} = 0$$

حال معادله (۱۴) را در  $E_T$  ضرب کرده و آن را در معادله (۱۳) قرار داده که با فاکتورگیری و ساده سازی به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{E_T^{\nu}}{E_1 (1 - \nu_o^{\nu})} (w_{,xxxx} + \nu_o w_{,yyxx}) + \frac{E_T^{\nu}}{E_1 (1 - \nu_o^{\nu})} \quad (15)$$

$$(w_{,yyy} + \nu_o w_{,xxy}) + \frac{2E_T^{\nu}}{E_1 (1 + \nu_o)} w_{,xyxy} - \frac{E_1 E_T}{E_1 (1 - \nu_o^{\nu})}$$

$$(w_{,xxx} + \nu_o w_{,yyx}) - \frac{E_1 E_T}{E_1 (1 - \nu_o^{\nu})} (w_{,yyy} + \nu_o w_{,xxy})$$

$$- \frac{2E_1 E_T}{E_1 (1 + \nu_o)} w_{,xyxy} + N_{x_o} w_{,xx} + N_{y_o} w_{,yy} + 2N_{xy_o} w_{,xy} = 0$$

با استفاده از تعریف عملگر  $(\nabla^4)$ ، معادله فوق به شکل زیر خواهد شد.

در نتیجه خواهیم داشت :

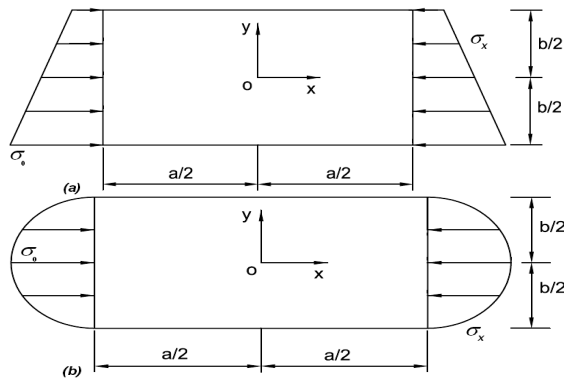
$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(1)} B_{kj}^* (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n+2) \quad (25)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} B_{kj}^* (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n+2)$$

با جایگذاری ضرایب وزنی روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده در معادلات می توان آنها را به فرم جدید  $DQ$  تبدیل کرد.

### ۵- بررسی کمانش ورق مستطیل شکل FGM به روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده

در ابتدا مسئله الاستیسته درون صفحه‌ای یک ورق مستطیل شکل FGM به طول  $a$  و عرض  $b$  که در معرض یک بار لبه‌ای درون صفحه‌ای که به‌طور یکنواخت توزیع شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل (۲) ورق مستطیلی تحت نیروهای درون صفحه‌ای

وقتی شرایط مرزی مسئله، از نوع تنش باشد، روش استفاده از توابع تنش برای حل، روش بسیار مناسبی است. توابع تنش ایری برای حل مسائل صفحه‌ای تئوری ارتجاعی به کار می‌روند. این توابع در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \quad (26)$$

توابع تنش ایری ( $Q$ )، معادلات دیفرانسیل حاکم را ارضا می‌کنند. همچنین این توابع باید معادله سازگاری زیر را نیز ارضا کنند.

$$\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 Q}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 Q}{\partial y^4} = 0 \quad (27)$$

ضرایب  $(i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n)$   $C_{ij}^{(4)}, C_{ij}^{(3)}, C_{ij}^{(2)}, C_{ij}^{(1)}$  وزنی مشتق مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم برای روش مربعات دیفرانسیلی معمولی می باشند. در روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده، مشتق مرتبه اول  $Q$  در دو نقطه پایانی  $Q_n^{(1)}, Q_1^{(1)}$  به عنوان متغیرهای مستقل اضافی معرفی می‌شوند.

$$\{u\}^T = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n, Q_1^{(1)}, Q_n^{(1)}\} \quad (20)$$

ضرایب وزنی  $(i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,n+2)$   $D_{ij}, C_{ij}, B_{ij}, A_{ij}$  مشتقات مرتبه اول، دوم، سوم و چهارم در روش جدید  $DQ$  می‌باشند [۱۶]، که برای محاسبه آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A_{ij} = C_{ij}^{(1)} (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (21-f)$$

$$A_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, n; j = n+1, n+2)$$

$$B_{ij} = C_{ij}^{(2)} (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (21-b)$$

$$B_{ij} = 0 (i = 1, 2, \dots, n; j = n+1, n+2)$$

ضرایب وزنی مشتقات مرتبه سوم و چهارم به صورت متفاوت محاسبه می‌شوند:

$$Q_i^{(2)} = \sum_{j=k=2}^n \sum_{k=2}^{n-1} C_{ik}^{(1)} C_{kj}^{(1)} Q_j + C_{i1}^{(1)} Q_1^{(1)} + C_{in}^{(1)} Q_n^{(1)} \\ = \sum_{j=1}^{n+2} B_{ij}^* u_j (i=1, n) \quad (22)$$

$$Q_i^{(3)} = \sum_{j=1}^{n+2} C_{ij}^{(2)} u_j = \sum_{j=1}^{n+2} B_{ij}^* u_j (i=2, 3, \dots, n-1)$$

$$Q_i^{(3)} = \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(1)} \sum_{j=1}^{n+2} B_{kj}^* u_j = \sum_{j=1}^{n+2} C_{ij} u_j \quad (23)$$

$$Q_i^{(4)} = \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(2)} \sum_{j=1}^{n+2} B_{kj}^* u_j = \sum_{j=1}^{n+2} D_{ij} u_j$$

برای به دست آوردن ضرایب وزنی  $D_{ij}, C_{ij}$  مقدار  $B_{ij}^*$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_{ij}^* = C_{ij}^{(2)} \\ B_{i, n+1}^* = 0; B_{i, n+2}^* = 0 \quad (24-f)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n-1) \\ (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$B_{ij}^* = \sum_{k=2}^{n-1} C_{ik}^{(1)} C_{kj}^{(1)} \\ B_{i, n+1}^* = A_{i, 1}; B_{i, n+2}^* = A_{i, n} \quad (24-b)$$

$$(i = 1, n) \\ (j = 1, 2, \dots, n)$$

محور  $y$  و  $(Q_y, Q_x)$  یا  $(w_y, w_x)$  برای نقاط در لبه‌های موازی با محور  $x$  و هر نقطه داخلی تنها یک درجه آزادی  $Q$  یا  $w$  دارد. در ترمهای جدید، روش دیفرانسیل کوادراچر معادلات دیفرانسیل (۲۷) و (۱۸) به صورت زیر می‌باشند:

$$\sum_{k=1}^{n_x} D_{ik}^x Q_{kl} + \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_y} B_{ij}^x B_{lk}^y Q_{jk} + \sum_{k=1}^{n_y} D_{lk}^y Q_{ik} + D_{i(n_x+1)}^x (Q_x)_l + D_{i(n_x+2)}^x (Q_x)_{n_x l} + \quad (32)$$

$$D_{l(n_y+1)}^y (Q_y)_i + D_{l(n_y+2)}^y (Q_y)_{in_y} = 0$$

$(i = 2, 3, \dots, n_x - 1; l = 2, 3, \dots, n_y - 1)$

$$\sum_{k=1}^{n_x} D_{ik}^x w_{kl} + \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_y} B_{ij}^x B_{lk}^y w_{jk} + \sum_{k=1}^{n_y} D_{lk}^y w_{ik} + D_{i(n_x+1)}^x (w_x)_l + D_{i(n_x+2)}^x (w_x)_{n_x l} + \quad (33)$$

$$D_{l(n_y+1)}^y (w_y)_i + D_{l(n_y+2)}^y (w_y)_{in_y} = \frac{\sigma_0 h}{D}$$

$\times \left\{ \sum_{k=1}^{n_x} B_{ik}^x w_{kl} (\alpha_x)_{il} + \sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_y} A_{ij}^x A_{lk}^y w_{jk} (\alpha_{xy})_{il} \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n_y} B_{lk}^y w_{ik} (\alpha_y)_{il} \right\}$$

$(i = 2, 3, \dots, n_x - 1; l = 2, 3, \dots, n_y - 1)$

که در این روابط داریم:

$$D_{ij}^x, D_{ij}^y: \text{ضرایب وزنی مشتقات مرتبه چهار نسبت به متغیرهای } x, y$$

$$B_{ij}^x, B_{ij}^y: \text{ضرایب وزنی مشتقات مرتبه دوم نسبت به متغیرهای } x, y$$

$$A_{ij}^x, A_{ij}^y: \text{ضرایب وزنی مشتقات مرتبه اول نسبت به متغیرهای } x, y$$

$Q_{ij}$ : مقادیر تابع تنش ایری

$$\alpha_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_0}, \alpha_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0}, \alpha_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_0} \quad (34)$$

همانطور که گفته شد نمی‌توان به طور مستقیم مقادیر تنش را محاسبه کرد. مقدار تابع تنش از حل معادله که به فرم ماتریس زیر است، به دست می‌آید:

$$[k_{ib} \ k_{ii}] \begin{Bmatrix} Q_b \\ Q_i \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (35)$$

که اندیس‌های  $b$  و  $i$  در رابطه بالا مربوط به کمیت‌های نقاط مرزی و نقاط داخلی می‌باشند.

با حل معادله (۳۲) مقدار  $Q_{ij}$  به دست خواهد آمد. هنگامی که مقادیر  $Q_{ij}$  را به دست آوردیم، تنشهای داخلی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

با استفاده از  $(Q)$  به دست آمده از معادله (۲۷) می‌توان تنشهای درون صفحه‌ای،  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  در معادله (۲۶) را به دست آورد.

### ۶- شرایط مرزی

در حالت تکیه‌گاه ساده (Simply Supported) داریم:

$$x = -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \rightarrow w = M_x = 0 \quad (28)$$

$$y = -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \rightarrow w = M_y = 0$$

در حالت تکیه‌گاه گیردار (Clamped) داریم:

$$x = -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \rightarrow w = w_x = 0 \quad (29)$$

$$y = -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \rightarrow w = w_y = 0$$

در حالت تکیه‌گاه آزاد (Free) داریم:

$$x = -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \rightarrow N_x = M_x = 0 \quad (30)$$

$$y = -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \rightarrow N_y = M_y = 0$$

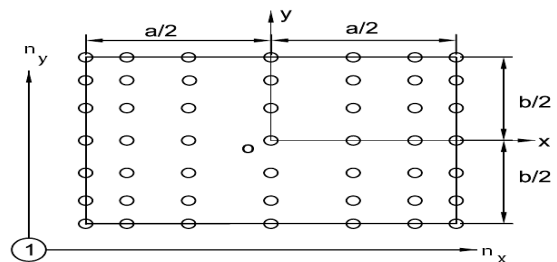
### ۷- معادلات به فرم روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده

$n_x, n_y$  تعداد کل نقاط شبکه در جهت  $x, y$  نشان داده شده در شکل (۳) می‌باشند. هر دو معادله (۱۸) و (۲۷)، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه چهار هستند. روش جدید دیفرانسیل کوادراچر برای حل هر دو معادله استفاده می‌شود. هر نقطه شبکه گوشه، دارای سه درجه آزادی،  $Q_y, Q_x, Q$  یا  $w_y, w_x, w$  می‌باشد که در آن:

$$Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y}, Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (31)$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial y}, w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$$

می‌باشد. نقاط مرزی باقیمانده هر کدام دو درجه آزادی دارند.  $(Q_x, Q)$  یا  $(w_x, w)$  برای نقاط در لبه‌های موازی با



شکل (۳) ورق مستطیلی با نقاط شبکه.

Aluminum (Metal Constituent)

$$E_c = ۳۸ \cdot \text{GPa}$$

Alumina (Ceramic Constituent)

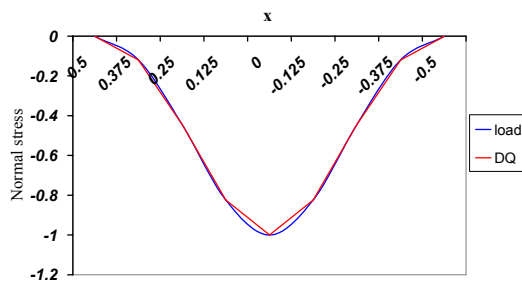
$$E_m = ۷۰ \cdot \text{GPa}$$

### ۹- بحث در مورد نتایج

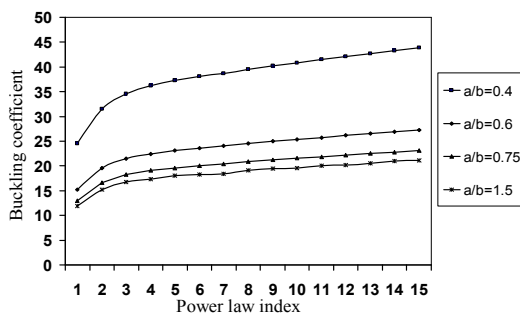
برای به دست آوردن ضریب کمانش، ابتدا تابع تنش ایری را با حل معادله (۲۷) به دست آورده، سپس با به دست آوردن مقادیر تنش از روابط (۳۶) و قرار دادن آنها در معادله (۳۳)، مقدار ویژه  $\sigma_0 h/D$  جهت دستیابی به ضریب کمانش را محاسبه نمودیم. برای حل معادلات بالا برنامه‌ای به کمک نرم افزار MAPLE و MATLAB نوشته و در نهایت ضریب کمانش محاسبه شده است.

ضریب کمانش برای نقاط شبکه متفاوت تحت دو نوع بار گذاری در حالت تکیه گاه ساده و گیردار محاسبه و از مساوی صفر قرار دادن ثابت قانون توانی، ماده FGM به یک ماده همگن تبدیل و نتایج به دست آمده با نتایج مرجع اصلی مقایسه شده است.

پس از رسیدن به دقت لازم، ضریب کمانش برای مقادیر مختلف ثابت قانون توانی برای ماده FGM نمونه محاسبه و نتایج به صورت نمودار و جدول آورده شده است.



شکل (۴) نمودار تنش نرمال در  $x = \pm a/2$  ( $n=9$ ).



شکل (۵) ضریب کمانش برای ورق مستطیلی FGM نمونه، تحت بار محوری  $\sigma_x = -2\sigma_0/3(1-y/b)$  برای مقادیر مختلف ثابت قانون توانی ( $n=11$ ). تمام لبه‌ها شرایط تکیه گاه ساده دارند.

$$(\sigma_x)_{il} = \sum_{k=1}^{n_y} B_{lk}^y Q_{ik}$$

$$(\tau_{xy})_{il} = -\sum_{j=1}^{n_x} \sum_{k=1}^{n_y} A_{ij}^x A_{lk}^y Q_{jk} \quad (۳۶)$$

$$(\sigma_y)_{il} = \sum_{k=1}^{n_x} B_{lk}^x Q_{kl}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_x; l = 1, 2, \dots, n_y)$$

برای هر نقطه مرزی به جز نقاط گوشه در نقطه از  $(i = 1$  یا  $n_x$  و  $l = 2, 3, \dots, n_y - 1)$  روی لبه‌های موازی با محور  $y$  ممان خمش  $(M_x)_{il}$  داریم:

$$(M_x)_{il} = -\frac{E_T}{1-\nu_0} \left( \sum_{k=1}^{n_x} B_{ik}^x w_{kl} + \nu \sum_{k=1}^{n_y} B_{lk}^y w_{ik} \right) \quad (۳۷)$$

همچنین برای هر نقطه مرزی به جز نقاط گوشه در نقطه  $il$  ( $l = 1$  or  $n_y; i = 2, 3, \dots, n_x - 1$ ) روی لبه‌های موازی با محور  $x$  ممان خمش  $(M_y)_{il}$  داریم:

$$(M_y)_{il} = -\frac{E_T}{1-\nu_0} \left( \nu \sum_{k=1}^{n_x} B_{ik}^x w_{kl} + \sum_{k=1}^{n_y} B_{lk}^y w_{ik} \right) \quad (۳۸)$$

هدف ما در این مقاله به دست آوردن ضریب کمانش است، که به صورت زیر تعریف می شود:

$$k = \frac{\sigma_0 h b^2}{\pi^2 D} \quad (۳۹)$$

مقدار  $\sigma_0 h/D$  مقدار ویژه معادله (۳۳) می باشد، که با برنامه نویسی به کمک نرم افزار MAPLE و MATLAB این مقدار محاسبه شده و در جداول از آن استفاده شده است.

در محاسبات انجام شده برای اینکه زودتر به همگرایی برسیم،  $n_x = n_y = n$  قرار می دهیم و همچنین برای به دست آوردن

ضرایب وزنی،  $y_i, x_i$  به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$x_i = -a \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n-1}\right]$$

$$y_i = -b \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{n-1}\right] \quad (۴۰)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

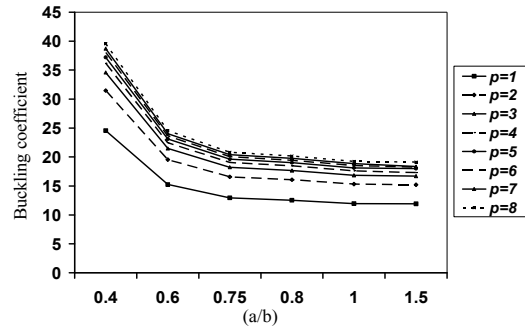
### ۸- مشخصات ورق FGM نمونه

ورق نمونه به صورت یک ورق مستطیلی شکل (Aluminum-Alumina) FGM در نظر گرفته می شود. خواص

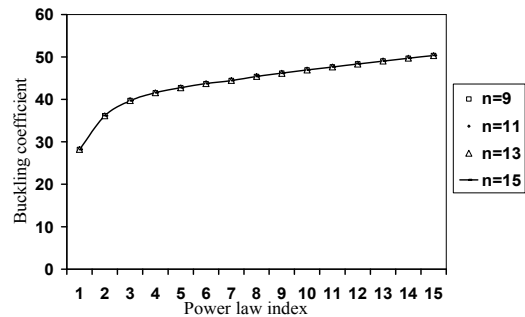
مادی ورق به صورت زیر تعریف می شود [۱۷]:

جدول (۳) ضریب کمانش برای ورق مستطیلی FGM نمونه تحت بار  $(\sigma_x = -\sigma_0 \cos(\pi y/b))$  با ضریب شکل  $a/b = 1$  به ازای مقادیر مختلف ثابت قانون توانی، برای تعداد نقاط شبکه متفاوت، تمام لبه‌ها شرایط تکیه‌گاه گیردار دارند.

p	n=9	n=11	n=13	n=15
۱	۲۸/۲۱	۲۸/۲۳	۲۸/۲۰	۲۸/۱۹
۲	۳۶/۱۵	۳۶/۱۷	۳۶/۱۵	۳۶/۱۴
۳	۳۹/۷۲	۳۹/۷۱	۳۹/۷۲	۳۹/۶۹
۴	۴۱/۵۵	۴۱/۵۵	۴۱/۵۷	۴۱/۵۷
۵	۴۲/۷۵	۴۲/۷۳	۴۲/۷۳	۴۲/۷۶
۶	۴۳/۷۱	۴۳/۷۰	۴۳/۷۱	۴۳/۷۴
۷	۴۴/۴۵	۴۴/۴۵	۴۴/۴۷	۴۴/۴۳
۸	۴۵/۳۹	۴۵/۳۷	۴۵/۴۰	۴۵/۴۰
۹	۴۶/۱۸	۴۶/۱۹	۴۶/۱۵	۴۶/۱۹
۱۰	۴۶/۹۳	۴۶/۹۱	۴۶/۹۱	۴۶/۹۳
۱۱	۴۷/۶۶	۴۷/۹۲	۴۷/۶۶	۴۷/۶۴
۱۲	۴۸/۳۷	۴۸/۳۷	۴۸/۳۴	۴۸/۳۶
۱۳	۴۹/۰۵	۴۹/۰۷	۴۹/۰۶	۴۹/۰۴
۱۴	۴۹/۷۰	۴۹/۶۹	۴۹/۷۲	۴۹/۷۱
۱۵	۵۰/۳۳	۵۰/۳۱	۵۰/۳۱	۵۰/۳۴



شکل (۶) ضریب کمانش برای ورق مستطیلی FGM نمونه، تحت بار محوری  $\sigma_x = -2\sigma_0/3(1-y/b)$  و ضریب شکلهای متفاوت، تمام لبه‌ها شرایط تکیه‌گاه ساده دارند. ( $n = 11$ ).



شکل (۷) ضریب کمانش برای ورق مستطیلی FGM نمونه، تحت بار  $(\sigma_x = -\sigma_0 \cos(\pi y/b))$  با ضریب شکل  $a/b = 1$ ، به ازای مقادیر مختلف ثابت قانون توانی متفاوت، برای تعداد نقاط شبکه تمام لبه‌ها شرایط تکیه‌گاه گیردار دارند.

دو نوع بارگذاری غیر یکنواخت بررسی شده است. در ابتدا ورق مستطیلی تحت بار تراکمی متغیر خطی زیر قرار گرفته است:

$$X = -2\sigma_0/3(1-y/b) \quad (۴۱-الف)$$

این بار در شکل (۲-الف) نشان داده شده، که خواهیم داشت:

$$\sigma_x = -2\sigma_0/3(1-y/b) \quad (۴۱-ب)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

برای آنالیز کمانش دو شرط مرزی بررسی شده است: (۱) تمام لبه‌ها تکیه‌گاه ساده باشد. (۲) تمام لبه‌ها گیردار باشد. همانطور که مشاهده می‌شود. نتایج روش دستی [۲۰] با نتایج روش مربعات دیفرانسیلی اختلاف زیادی دارد. از طرفی نتایج روش مربعات دیفرانسیلی با نتایج المان محدود بسیار به هم نزدیک می‌باشد. این بدان خاطر است که در روش دستی نمی‌توان تعداد نقاط شبکه را زیاد گرفت و همین باعث بروز خطا خواهد شد.

در ادامه یک ورق مستطیلی تحت بار تراکمی که به‌طور غیر یکنواخت توزیع شده است با توجه به شکل (۲) مورد بررسی قرار گرفته است:

$$X = -\sigma_0 \cos(\pi y/b) \quad (۴۲)$$

جدول (۱) همگرایی برای بار کمانش یک ورق مستطیلی با سه ضریب شکل متفاوت ( $a/b$ )، تحت بار  $(\sigma_x = -\sigma_0 \cos(\pi y/b))$ ، تمام لبه‌ها شرایط تکیه‌گاه ساده دارند ( $n=15$ ).

a/b	Present	Wanng[12]	FEM	Bert [4]	Benoy [19]	Van Der Neut [18]
۰/۵	۷/۴۲۱	۷/۴۵۲	۷/۴۰۹	۷/۸۴۱	۷/۰۸	۴/۶۸
۱/۰	۵/۴۰۸	۵/۴۱۹	۵/۳۸۳	۵/۱۴۶	۴/۵۹	۴/۶۸
۳/۰	۵/۸۴۷	۵/۸۴۹	۵/۸۱۸	۵/۷۴۸	۴/۵۳	۴/۶۸

جدول (۲) ضریب کمانش برای ورق مستطیلی FGM نمونه، تحت بار محوری  $\sigma_x = -2\sigma_0/3(1-y/b)$  و ضریب شکل های متفاوت برای مقادیر مختلف قانون توانی ( $n = 11$ ). تمام لبه‌ها شرایط تکیه‌گاه ساده دارند.

a/b	۰/۴	۰/۶	۰/۷۵	۰/۸	۱/۰	۱/۵
p=1	۲۴/۵۶	۱۵/۲۵	۱۲/۹۴	۱۲/۵۴	۱۱/۹۶	۱۱/۹۲
p=2	۳۱/۴۷	۱۹/۵۴	۱۶/۵۸	۱۶/۰۷	۱۵/۳۲	۱۵/۲
p=3	۳۴/۵۸	۲۱/۴۷	۱۸/۲۲	۱۷/۶۶	۱۶/۸۴	۱۶/۷
p=4	۳۶/۱۷	۲۲/۴۶	۱۹/۰۶	۱۸/۴۷	۱۷/۶۱	۱۷/۳
p=5	۳۷/۲۱	۲۳/۱۱	۱۹/۶۱	۱۹	۱۸/۱۲	۱۸
p=6	۳۸/۰۵	۲۳/۶۳	۲۰/۰۵	۱۹/۴۳	۱۸/۵۳	۱۸/۲۴
p=7	۳۸/۷۰	۲۴/۰۳	۲۰/۳۹	۱۹/۷۶	۱۸/۸۶	۱۸/۲۶
p=8	۳۹/۵۲	۲۴/۵۴	۲۰/۸۲	۲۰/۱۸	۱۹/۲۴	۱۹/۱۱
p=9	۴۰/۲۰	۲۴/۹۶	۲۱/۱۸	۲۰/۵۳	۱۹/۵۷	۱۹/۴۲
p=10	۴۰/۸۶	۲۵/۳۷	۲۱/۵۳	۲۰/۸۶	۱۹/۸۹	۱۹/۵۶
p=11	۴۱/۴۹	۲۵/۷۶	۲۱/۸۶	۲۱/۱۹	۲۰/۲۰	۲۰/۱
p=12	۴۲/۱۱	۲۶/۱۴	۲۲/۱۹	۲۱/۵۰	۲۰/۵۰	۲۰/۲
p=13	۴۲/۷۰	۲۶/۵۱	۲۲/۵۰	۲۱/۸۰	۲۰/۷۹	۲۰/۴۶
p=14	۴۳/۲۷	۲۶/۸۷	۲۲/۸۰	۲۲/۰۹	۲۱/۰۷	۲۱
p=15	۴۳/۸۱	۲۷/۲۰	۲۳/۰۹	۲۲/۳۷	۲۱/۳۳	۲۱/۱۲



روش دستی برای حل چنین مسائلی استفاده کرد. ثانیاً نتایج روش مربعات دیفرانسیلی به تعداد نقاط شبکه بسیار حساس می‌باشند. بنابراین نقاط شبکه غیر یکنواخت برای رسیدن به جواب دقیق باید انتخاب شوند. برای ورق مستطیلی FGM ضریب کمانش رابطه مستقیمی با ثابت قانون توانی دارد. این ضریب با افزایش آن افزایش و با کاهش آن کاهش می‌یابد. همچنین ضریب کمانش رابطه عکس با ضریب شکل دارد.

نتایج روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده به نتایج المان محدود بسیار نزدیک می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده می‌تواند برای به دست آوردن بارهای کمانش ورقهایی که تحت بارهای غیر یکنواخت قرار گرفته‌اند با هر نوع شرایط مرزی، به کار برده شود.

#### ۱۱- فهرست علائم

$P$	ثابت قانون توانی
$E$	مدول الاستیسیته
$\alpha$	ضریب انبساط حرارتی
$\nu$	ضریب پواسون
$G$	مدول برشی
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$	مؤلفه‌های کرنش
$u, v, w$	مؤلفه‌های تغییر مکان
$n$	تعداد نقاط شبکه
$n_x, n_y$	تعداد نقاط شبکه در راستای محور $x, y$
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$	مؤلفه‌های تنش
$N_x, N_y, N_{xy}$	شدت نیروی برشی و قائم
$a$	طول ورق
$b$	عرض ورق
$Q$	تابع تنش ابری
$h$	ضخامت ورق
$w$	انحراف نرمال
$k$	ضریب کمانش

مشاهده می‌شود برای مسائل الاستیسیته درون صفحه‌ای که به روش مربعات دیفرانسیلی حل می‌شوند، نتایج به تعداد نقاط شبکه بسیار حساس می‌باشند.

در شکل (۴)، نمودار تابع تنش برای نقاط شبکه  $n=9$  روی لبه‌های  $x=\pm a/2$  با خود بار وارد شده، مقایسه شده و می‌توان دریافت که روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده برای حل اینگونه مسائل بسیار مناسب می‌باشد.

در جدول شماره (۱) ضریب کمانش برای سه ضریب شکل متفاوت محاسبه شده است. ( $n=15$ ) مشاهده می‌شود که نتایج روش مربعات دیفرانسیلی اصلاح شده با روش مراجع [۴ و ۱۹] اختلاف دارند. اما نتایج این روش بسیار به نتایج المان محدود نزدیک است. در جداول (۲) و (۳) و همچنین اشکال (۵) تا (۷)، ضریب کمانش برای شرایط مرزی متفاوت برای ماده FGM نمونه، به دست آمده است. در تمام این جداول مشاهده می‌شود که ضرایب کمانش برای هر ثابت قانون توانی، برای تعداد نقاط شبکه متفاوت تقریباً با هم برابر هستند و با افزایش ضریب شکل کاهش می‌یابند و همچنین با افزایش ثابت قانون توانی مقدار ضریب کمانش نیز افزایش خواهد یافت.

#### ۱۰- نتیجه گیری

در این مقاله از روش جدید DQ جهت به دست آوردن بارهای کمانش ورقهای مستطیلی نازک، تحت بارهای درون صفحه‌ای غیر یکنواخت استفاده شده است.

برای به دست آوردن بار کمانش، دو مرحله بررسی شده است:

- ۱) حل مسئله در حالت تنشهای درون صفحه‌ای جهت به دست آوردن توزیع تنشهای درون صفحه‌ای
- ۲) حل مسئله کمانش تحت بارهای به دست آمده در مرحله یک.

مشاهده شد که اولاً اگر تعداد نقاط شبکه خیلی پایین باشد، نتایج به دست آمده خطای زیادی خواهند داشت. بنابراین نمی‌توان از

مراجع

- [12] Wang. X., Xinfeng W., Differential quadrature buckling analyses of rectangular plates subjected to non-uniform distributed in-plane loadings, *Thin-walled structures*, Vol. 44, 2006, pp. 837-843.
- [13] Koizumi M., FGM activities in Japan, *Composites*, Vol. 28 (1-2), 1997, pp. 1-4.
- [14] Reddy J. N., Wang C. M., Kitipornachi, axisymmetric bending of functionally graded circular annular plates, *Eur. J. Mech A/Solid*, Vol. 20, 2001, pp. 841-855.
- [15] Brush D.O., Almroth B.O., Buckling of bars, plates and shells, McGraw Hill, New York, 1975.
- [16] Xinwei W., Feng L., Xinfeng W. and Lifei G., New approaches in application of differential quadrature method to fourth – order differential equations, *Communication In Methods In Engineering*, Vol. 21, 2005, pp. 61-71.
- [17] Praveen G.N., Reddy J.N., Nonlinear Transient thermoelastic analysis of functionally graded Ceramic-metal plates, *Int. J. solids and structures*, Vol. 35(33), 1998, pp. 4457-4476.
- [18] Van der Neut A., Buckling caused by thermal stresses, High temperature effects in aircraft structures, AGARDograph, Vol. 28, 1958, pp.215-47.
- [19] Benoy M.B., An energy solution for the buckling of rectangular plates under non-uniform in-plane loading, *Aeronaut J*, Vol. 73, 1969, pp. 974-7.
- [20] Young WC, Budynas RG., Roark ' s formulas for stress & strain, 7<sup>th</sup> ed., New York, USA, McGraw-Hill, 2002.
- [1] Bellman RE, Casti J., Differential quadrature and long-term integration, *J. Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, 1971, pp. 235-238.
- [2] Wang X, Gu H, Liu B., on buckling analysis of beam and frame structures by differential quadrature element method, *Proceedings of Engineering Mechanics*, Vol. 1, 1996, pp. 382-385.
- [3] Liu GR, Wu TY., Vibration analysis of beam using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition, *J. Sound and Vibration*, Vol. 246, 2001, pp. 461-481.
- [4] Bert CW, Devarakonda KK., Buckling of rectangular plates subjected to nonlinearly distributed in-plane loading, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 40, 2003, pp. 4097-4106.
- [5] Sherbourne AN, Pandey MD., differential quadrature method in the buckling analysis of beams and composite plates, *Computers and Structures*, Vol. 40, 1991, pp. 903-913.
- [6] Bert CW, Wang X, Striz AG., Differential quadrature for static and free vibration analyses of anisotropic plates. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30(13), 1993, pp. 1737-44.
- [7] Wang X, Bert CW., A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates, *J Sound & Vibration*, Vol. 162(3), 1993, pp. 566-72.
- [8] Wang X, Gu H, Liu B., On buckling analysis of beams and frame structures by the differential quadrature element method, *Proc Eng Mech*, Vol. 1, 1996, pp.382-5.
- [9] Wang X, Differential quadrature for buckling analysis of laminated Plates, *Comput Struct*, Vol. 57(4), 1995, pp.715-9.
- [10] Wang X, Tan M, Zhou Y., Buckling analyses of anisotropic plates and isotropic skew plates by the new version differential quadrature method, *Thin-Walled Structures*, Vol. 41, 2003, pp.15-29.
- [11] Wang X., Shi X., Applications of differential quadrature method for solutions of rectangular plates subjected to non-uniformly distributed in-plane loadings, (unpublished manuscript).