تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری استوانه‌هایی ازجنس مواد هدفمند به روش بدون المان

رسول مرادی دستجردی[1]　　مهرداد فروتن[2*]　　امین‌الله پوراصغر[3]

[*] نویسنده مسئول: Foroutan@razi.ac.ir

چکیده

در این تحقیق تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری در استوانه‌هایی از جنس مواد هدفمند به روش‌های بدون المان و المان محدود بررسی شده است. روش بدون المان استفاده شده مبتنی بر فرم ضعیف معادله حرکت است. در این روش بدون المان از توابع شکل حداقل مربعات متحرک برای تقریب میدان تغییر مکان و از روش تبدیل برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده شده است. برای حل مسئله وابسته به زمان نیز روش تفاضل محدود مرکزی به‌کار رفته است. تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی و طبق رابطه کسر حجمی در نظر گرفته شده است. در این مقاله اثر ضخامت استوانه، توان کسر حجمی توزیع مواد و همچنین اثر نوع بارگذاری بر مولفه‌های ارتعاشی این استوانه‌ها بررسی شد. نتایج حاصل از دو روش بدون المان و المان محدود با یکدیگر و با کارهای قبلی منتشر شده مقایسه و مطابقت بسیار خوبی مشاهده شد.

واژه‌های کلیدی: مواد هدفمند، روش بدون المان، حداقل مربعات متحرک، ارتعاشات، تابع تبدیل.

1- کارشناس ارشد، باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر.
2- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی - مهندسی، دانشگاه رازی کرمانشاه.
3- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی - مهندسی، دانشگاه رازی کرمانشاه.

1- مقدمه

مواد هدفمند (FGM[1]) نخستین بار در سال 1984 توسط دانشمندان علم مواد ژاپنی برای دست یافتن به موادی با مقاومت حرارتی بالا معرفی شد[۱]. این مواد ابتدا تنها در سفینه‌های فضایی و راکتورهای هسته‌ای کاربرد داشتند، ولی اکنون در تجهیزات پزشکی و دندان پزشکی، تجهیزات تبدیل انرژی، ژنراتورهای حرارتی و سنسورهای حرارتی نیز استفاده می‌شوند[۲]. این مواد اکثرا از ترکیب دو ماده مختلف که معمولا یکی فلز و دیگری سرامیک است ساخته می‌شوند، به طوری که خواص ترکیب حاصل به طور یکنواخت تغییر می‌کند. در نتیجه در این مواد جزء حجمی مواد تشکیل دهنده به صورت تابعی یکنواخت تغییر کرده و باعث ایجاد میکروساختار غیر یکنواخت و یک ماکروساختار با تغییرات پیوسته می‌شود.

بیشتر تحقیقات صورت گرفته بر روی FGMها در زمینه ترمو-الاستیک و آنالیز تنش‌های پسماند است. اما در بسیاری از کاربردهای این مواد، تحلیل رفتار دینامیکی آنها نیز اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند که برخی از این تحقیقات صورت گرفته در زمینه رفتار ارتعاشی و دینامیکی استوانه‌های FGM و استوانه‌های چند لایه به شرح ذیل است. لوی و همکارانش [۳] از تئوری تقریب مرتبه اول لاو و روش ریتز برای بررسی اثر ثابت کسر حجمی و اثر شرایط مرزی روی فرکانس‌های طبیعی استوانه‌های FGM استفاده کردند. پرادهان و همکارانش [٤] در تحقیقی مشابه با استفاده از تئوری لاو، ارتعاشات پوسته استوانه FGM را با شرایط تکیه‌گاهی مختلف تحلیل و ارتباط فرکانس‌های طبیعی به دست آمده با خواص مواد مورد نظر را بررسی کردند. در این تحقیق خواص ماده در راستای ضخامت و طبق تابع توانی مدرج شده بود. کادولی و گانسان [٥] کمانش حرارتی و آنالیز ارتعاشات آزاد استوانه FGM را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با بسط سری فوریه متغیرهای جابه‌جایی در جهت محیطی، ارائه کردند. حدادپور و همکارانش [٦] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای FGM با تکیه‌گاه‌های ساده را تحت چهار نوع شرایط مرزی صفحه‌ای مورد تحلیل قرار دادند. آنها مشخصه‌های مواد را وابسته به دما و متغیر در جهت ضخامت در نظر گرفتند و مسئله را به روش گالرکین حل کردند. انصاری و درویزه [۷] ارتعاشات آزاد پوسته استوانه FGM را تحت شرایط مرزی متنوع به روش تحلیلی (حل دقیق) بررسی کردند. فرمول‌های آنها بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها بود و تغییرات خواص مواد در راستای شعاع، طبق رابطه تابع توانی و وابسته به دما فرض شد. در این کار اثر تغییر شرایط مرزی، تغییرات توان کسر حجمی و تغییرات پارامترهای هندسی روی مشخصه‌های ارتعاشی بررسی شد.

تحلیل دینامیکی و تحلیل مشخصه‌های انتشار موج نیز تاکنون به چندین روش مختلف انجام شده است که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. شاکری و همکارانش [۸] مسئله ارتعاشات و سرعت انتشار موج شعاعی یک استوانه FGM با طول بی‌نهایت را به کمک روش‌های المان محدود گالرکین و روش نیومارک تحلیل کردند. آنها استوانه را به چند زیر استوانه که خواص مکانیکی در آنها ثابت فرض شده، تبدیل کردند و تحلیل خود را انجام دادند. حسینی و همکارانش [۹] مسئله فوق را با روش مشابهی حل کردند ولی در هر لایه خواص مواد را متغیر در نظر گرفتند. عسگری و همکارانش [۱۰] آنالیز دینامیکی استوانه‌ای که خواص مکانیکی در آن در دو راستای شعاعی و محوری تغییر می‌کرد (۲D FGM) و طول محدودی داشت را با روش اجزا محدود گالرکین و قسمت وابسته به زمان آن را با استفاده از روش نیومارک تحلیل کردند. اما از معدود کارهای انجام شده در زمینه انتشار موج در FGMها نیز می‌توان به کار ژانگ و باترا [۱۱] اشاره کرد. آنها با استفاده از روش MSPH[2] انتشار موج الاستیک را در یک صفحه FGM بررسی کردند.

در این مقاله، در کاری جدید ارتعاشات آزاد و اجباری استوانه‌ای FGM به روش بدون المان (و همچنین المان

1- Functionally graded material

2- Modify Smoothed Particle Hydrodynamics

محدود) بررسی شده است. به این منظور خواص مکانیکی ماده در راستای شعاع متناسب با تغییرات کسر حجمی مواد متغیر در نظر گرفته شده است. در این تحقیق، اثر ابعاد هندسی استوانه، تاثیر نوع بارگذاری (تغییر دامنه، تغییر تعداد سیکل و تغییر نرخ بارگذاری) و از همه مهمتر، نوع تغییرات خواص مکانیکی ماده بر مشخصه‌های ارتعاشی استوانه FGM بررسی شده است. برای حل مسئله وابسته به زمان نیز از روش تفاضل محدود مرکزی استفاده شده است.

از آنجایی که روش‌های بدون المانی که بر پایه فرم ضعیف[1] هستند، نسبت به روش‌هایی که فاقد انتگرال‌گیری هستند، مانند روش کالوکیشن[2]، از پایداری و دقت بهتری برخوردار می‌باشند، لذا از روش بدون المانی استفاده شده که مبتنی بر فرم ضعیف معادله حرکت است. برای انتگرال‌گیری از فرم ضعیف، از شبکه پس‌زمینه و روش انتگرال‌گیری عددی گوس استفاده شده است. این روش بدون المان بر پایه توابع شکل MLS[3] است و چون توابع شکل MLS خاصیت دلتای کرونیکر را ارضاء نمی‌کنند، برای اعمال شرایط مرزی اساسی ابتدا از روش تبدیل و با تصحیح مقادیر توابع شکل در گره‌ها، به گونه‌ای که خاصیت دلتای کرونیکر ارضا شود، استفاده شده و شرایط مرزی اساسی اعمال می‌شود. لازم به ذکر است که روش بدون المان به کار گرفته شده در این مقاله تا حد زیادی به روش بدون المان گالرکین (EFG) شباهت دارد. با این تفاوت که برای اعمال شرایط مرزی اساسی از روش تبدیل استفاده شده است. استفاده از تابع تبدیل در این روش بدون المان موجب کاهش ابعاد دستگاه معادلات و متعاقب آن کاهش حجم محاسبات نسبت به روش EFG می‌شود. در روش المان محدود به کار گرفته شده نیز از حالت المان محدود سازگار، به علت دقت بالاتر، و المانهای مربعی دو خطی استفاده شده است. با توجه به اینکه روش‌های عددی قابلیت انعطاف زیادی روی حل این‌گونه مسایل دارند، لذا این تحقیق و نتایج آن برای طراحی مخازن و یا لوله‌های تحت فشار از جنس مواد هدفمند بسیار مناسب است.

1- weak form

2- Collocation Method

3- Moving Least Square

2- معادلات حاکم

با توجه به اینکه روش بدون المان به کار گرفته شده بر پایه فرم ضعیف معادله تعادل می‌باشد، لذا فرم ضعیف معادله تعادل در قالب قانون کار مجازی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega}\sigma.\delta(\varepsilon)dv-\int_{\Gamma}\mathbf{F}.\delta\,\mathbf{u}\,ds=-\int_{\Omega}\rho(r)\ddot{\mathbf{u}}.\delta\,\mathbf{u}\,dv \qquad (1)$$

در این معادله σ، ε، $\mathbf{F}$ ، $\mathbf{u}$ و $\ddot{\mathbf{u}}$ به‌ترتیب بردار تنش، بردار کرنش، بردار نیروی خارجی، بردار جابه‌جایی و بردار شتاب می‌باشند. Γ قسمتی از مرز ناحیه Ω است که نیروی سطحی $\mathbf{F}$ بر آن اثر می‌کند. مؤلفه های بردارهای تنش و کرنش در مسائل متقارن محوری بشکل زیر هستند.

$$\sigma=[\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z,\sigma_{rz}]^T,\varepsilon=[\varepsilon_r,\varepsilon_\theta,\varepsilon_z,\varepsilon_{rz}]^T \qquad (2)$$

همچنین مؤلفه های کرنش برحسب مؤلفه های جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_r&=\frac{\partial u_r}{\partial r} \quad , \quad \varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}\\ \varepsilon_z&=\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad , \quad \varepsilon_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\end{aligned} \qquad (3)$$

بردار تنش با بردار کرنش به شکل زیر در ارتباط است:

$$\sigma=\mathbf{D}\varepsilon \qquad (4)$$

که در مسائل متقارن محوری ماتریس D طبق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{D}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & \circ\\ \nu & 1-\nu & \nu & \circ\\ \nu & \nu & 1-\nu & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \frac{(1-2\nu)}{2}\end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$E=E(r),\nu=\nu(r)$$

3- فرمول‌بندی روش بدون المان

توابع شکل MLS (حداقل مربعات متحرک) توسط لانکستر و سالکاوسکاس [۱۲] معرفی شده‌اند. بر اساس این تقریب متغیر میدان $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ داخل ناحیه Ω، در نقطه $\mathbf{X}=[r,z]^T$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$\mathrm{u}(\mathrm{X})=\sum\Phi_i\hat{\mathrm{u}}_i \qquad (6)$$

$\hat{\mathrm{u}}_i$ بردار مقادیر مجازی گره‌ها است و طبق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{\mathrm{u}}=[\hat{u}_1,\hat{u}_2,\ldots\ldots\ldots,\hat{u}_n]^T \qquad (7)$$

و $\Phi_i(\mathbf{X})$ تابع شکل MLS گره X_i در نقطه $\mathbf{X}$ است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Phi_i(\mathbf{X}) = \underbrace{\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X})\,[\mathbf{M}(\mathbf{X})]^{-1} w(\mathbf{X}-\mathbf{X}_i)\mathbf{P}(\mathbf{X}_i)}_{(1\times 1)} \tag{8}$$

در رابطه فوق $\mathbf{P(X)}$ بردار پایه و $\mathbf{M(X)}$ ماتریس ممان‌اند که طبق رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{P(X)}=[\text{١}\ r\ z]^T \qquad \text{(9- الف)}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{X}) = \left[\sum_{i=1}^{n} w(\mathbf{X}-\mathbf{X}_i)\,\mathbf{P}(\mathbf{X}_i)\,\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}_i)\right] \qquad \text{(9- ب)}$$

برای ایجاد تابع شکل در این مقاله از تابع وزن اسپیلاین مرتبه سوم طبق رابطه زیر استفاده شده است.

$$w(q)=\begin{cases} 2/3-4q^2+4q^3 & q\le 0/5 \\ 4/3-4q+4q^2+\dfrac{4}{3}q^3 & 0/5<q\le 1 \\ 0 & q>1 \end{cases}$$

$$q=\frac{\|\mathrm{x}-\mathrm{x}_i\|}{\rho} \tag{10}$$

بردار جابه‌جایی، $\mathbf{u}$، در رابطه (1) برای مسائل متقارن محوری و به‌وسیله توابع شکل MLS طبق رابطه زیر تقریب زده می‌شود.

$$\mathbf{u}=[u_r,u_z]^T=\Phi\,\hat{\mathbf{u}} \tag{11}$$

بطوریکه:

$$\hat{\mathbf{u}}=\left[(\hat{u}_r)_1,(\hat{u}_z)_1,..........(\hat{u}_r)_n,(\hat{u}_z)_n\right]^T \tag{12}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & . & . & . & . & \Phi_n & 0\\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & . & . & . & . & 0 & \Phi_n\end{bmatrix} \tag{13}$$

با استفاده از رابطه (11) برای تقریب بردار جابه‌جایی، بردار کرنش بوسیله ترم‌های مقادیر مجازی گره‌ها، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \tag{14}$$

به طوری که ماتریس $\mathbf{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} & 0 & . & .. & . & . & \frac{\partial\Phi_n}{\partial r} & 0\\ \frac{\Phi_1}{r} & 0 & \frac{\Phi_2}{r} & 0 & . & .. & . & . & \frac{\Phi n}{r} & 0\\ 0 & \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & . & .. & . & . & 0 & \frac{\partial\Phi_n}{\partial z}\\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} & . & .. & . & . & \frac{\partial\Phi_n}{\partial z} & \frac{\partial\Phi_n}{\partial r}\end{bmatrix} \tag{15}$$

که در رابطه فوق n تعداد گره‌های موثر است. با جایگذاری روابط (4)، (11) و (14) در رابطه (1) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\delta(\hat{\mathbf{u}})^T\left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,dv\right)\hat{\mathbf{u}}-\delta(\hat{\mathbf{u}})^T\int_\Gamma \Phi^T\mathbf{F}\,ds\\ &\quad=-\delta(\hat{\mathbf{u}})^T\left(\int_\Omega \rho\,\Phi^T\Phi\,dv\right)\ddot{\hat{\mathbf{u}}}\end{aligned} \tag{16}$$

معادله (16) به‌ازای هر بردار $\delta(\hat{\mathbf{u}})$ دلخواه برقرار است. بنابراین معادله (16) را می‌توان به این صورت نوشت و سپس دستگاه معادلات را دسته‌بندی نمود.

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}}+\mathbf{k}\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{f} \tag{17}$$

که در آن:

$$\mathbf{M}=\int_\Omega \rho\,\Phi^T\Phi dv \quad , \quad \mathbf{k}=\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,dv \qquad \mathbf{f}=\int_\Gamma \Phi^T\mathbf{F}\,ds \tag{18}$$

از آنجایی که توابع شکل MLS فاقد خاصیت دلتای کرونیکر هستند، لذا معادله (17) برحسب میدان جابه‌جایی تعمیم یافته ارائه شده است. پس به منظور اعمال شرایط مرزی اساسی، باید ماتریس سختی و بردار نیرو در معادله (17) به صورت مناسب تغییر یابند. روش تبدیل یکی از مهمترین روش‌های اعمال شرایط مرزی اساسی است. در این روش بعد از تصحیح توابع شکل (ایجاد خاصیت دلتای کرونیکر برای تابع شکل) می‌توان با منطقی شبیه منطق اجزاء محدود شرایط مرزی اساسی را اعمال نمود[۱۳]. به این منظور بردار جابه‌جایی مجازی در معادله (17) برحسب میدان جابه‌جایی واقعی گره‌ها این چنین بیان می‌شود.

$$\mathbf{U}=\mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \tag{19}$$

$$\mathbf{U}=\left[(u_r)_1,(u_z)_1,........,(u_r)_N,(u_z)_N\right]^T \tag{20}$$

ماتریس $\mathbf{T}$ ماتریس انتقال نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\Phi_1(\mathbf{x}_1) & 0 & \Phi_2(\mathbf{x}_1) & . & . & \Phi_N(\mathbf{x}_1) & 0\\ 0 & \Phi_1(\mathbf{x}_1) & 0 & \Phi_2(\mathbf{x}_1) & . & 0 & \Phi_N(\mathbf{x}_1)\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ \Phi_1(\mathbf{x}_N) & 0 & \Phi_2(\mathbf{x}_N) & 0 & . & \Phi_N(\mathbf{x}_N) & 0\\ 0 & \Phi_1(\mathbf{x}_N) & 0 & \Phi_2(\mathbf{x}_N) & . & 0 & \Phi_N(\mathbf{x}_N)\end{bmatrix} \tag{21}$$

با جایگذاری رابطه (19) در رابطه (17) خواهیم داشت.

$$\mathbf{T}^{-\mathbf{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{T}^{-1}\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{T}^{-\mathbf{T}}\mathbf{k}\,\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}=\mathbf{T}^{-\mathbf{T}}\mathbf{f} \qquad (22)$$

که به راحتی می‌توان شرایط مرزی اساسی را با منطقی مشابه منطق روش اجزا محدود در رابطه (22) اعمال کرد.

از حل مسئله مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم حاصل می‌شود. لازم به تذکر است که با توجه به اینکه مسئله به صورت دو بعدی (متقارن محوری) تحلیل می‌شود و برای هر گره دو درجه آزادی در نظر گرفته شده است، لذا فرکانس‌های حاصله نیز متناظر با شکل مودهای حالت متقارن محوری هستند.

اگر نیروی وابسته به زمانی در معادله (22) اعمال شود، با فرض اینکه میدان جابه‌جایی و میدان سرعت در لحظه اولیه برابر با صفر در نظر گرفته شود، معادله حاصل به یک مسئله مقدار اولیه تبدیل می‌شود. در این مقاله، برای حل این مسئله مقدار اولیه روش تفاضل محدود مرکزی (که حالت خاصی از روش نیومارک است) به علت دقت بسیار بالا، سادگی در روابط و مهمتر از همه صریح بودن دستگاه معادلات حاصله به کار گرفته شده است. در این روش، برای حل سیستم معادلات در هر استپ زمانی ابتدا بردار شتاب طبق رابطه (23- الف) و سپس میدان جابه‌جایی طبق رابطه (23- ب) به دست می‌آید.

$$\ddot{\mathbf{u}}^{t}=\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{f}^{t}-\mathbf{k}\,\mathbf{u}^{t}] \qquad \text{(23- الف)}$$

$$\mathbf{u}^{t+dt}=dt^{2}\,\ddot{\mathbf{u}}^{t}+2\mathbf{u}^{t}-\mathbf{u}^{t-dt} \qquad \text{(23- ب)}$$

بدین ترتیب میدان جابه‌جایی، سرعت و شتاب در هر لحظه به دست می‌آید [۱۴].

4- مثال‌های حل شده و نتایج آن

برای تحلیل ارتعاشات استوانه‌های FGM، استوانه‌ای با شعاع داخلی r_i، شعاع خارجی r_o و طول L در نظر گرفته شده است. این استوانه از ترکیب سرامیک (سیلیکون کاربید) (SiC) یا سیلیکون نیترید (Si_3N_4) در لایه داخلی و فلز فولاد ضدزنگ (SUS۳۰۴) در لایه خارجی تشکیل شده است، که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول (1) آمده است.

جدول (1) خواص اجزا FGM .

ماده	خواص		
	E(GPa)	ν	ρ(kg/m³)
(SiC)	۴۲۷	0/17	۳۲۱۰
(Si_3N_4)	322/27	0/24	۲۳۷۰
(SUS۳۰۴)	207/78	0/3177	۸۱۶۶

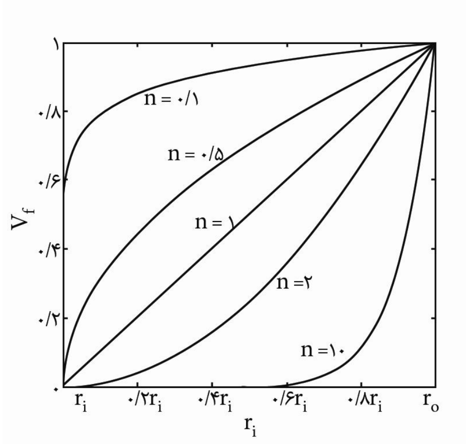
در این استوانه خواص مکانیکی از لایه داخلی تا لایه خارجی طبق رابطه (24-ب) تغییر می‌کند.

$$V_f(r)=\left(\frac{r-r_i}{r_o-r_i}\right)^{n} \qquad \text{(24-الف)}$$

$$P=P_i+V_f(r)(P_o-P_i) \qquad \text{(24-ب)}$$

در روابط فوق V_f بیانگر کسر حجمی ماده (جنس لایه خارجی)، n یک عدد ثابت بزرگتر از صفر (ثابت کسر حجمی)، P بیانگر خواص مکانیکی ماده (مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب پواسون) و اندیس‌های i و o به ترتیب بیانگر لایه‌های داخلی و خارجی جسم‌اند.

شکل (1) تغییرات کسر حجمی ماده به کار رفته در شعاع خارجی استوانه را به ازای توان‌های مختلف کسر حجمی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار توان کسر حجمی، درصد ماده به کار رفته در لایه خارجی کاهش می‌یابد.



شکل (1) نمودار کسر حجمی ماده به کار رفته در سطح خارجی استوانه.

ارتعاشات آزاد استوانه **FGM**

برای یک روش حل عددی، چک کردن دقت، همگرایی و قدرت روش بسیار مهم است. لذا ابتدا همگرایی مسئله برای استوانه توپر با نسبت طول به شعاع $L/r_o=$ ۴ و از جنس یک ماده همگن با ضریب پواسون $\upsilon=$۰/۳ در حالی که استوانه کاملا آزاد است، بررسی شده است. به این منظور در جدول (2) چهار مقدار اول پارامتر فرکانس که به صورت $\Omega=\omega\, r_o\sqrt{\rho/G}$ (که G مدول برشی می‌باشد) تعریف می‌شود، دسته‌بندی شده و با مراجع مربوطه مقایسه شده است. جوابها برای سه حالت آرایش گره‌ای، 16×6،

11×31 و 21×61 (که به ترتیب بیانگر تعداد گره‌ها در راستاهای شعاعی و محوری می‌باشد) در روش بدون المان و المان محدود آورده شده است، در حالی که از فرکانس‌های صفر که بیانگر حرکت جسم صلب است، صرف‌نظر شده است. از جدول (2) مشخص می‌شود که هر دو روش بدون المان و المان محدود به سرعت همگرا می‌شوند، ضمن اینکه ملاحظه می‌شود همگرایی و دقت روش بدون المان نسبت به المان محدود، خصوصا در فرکانس‌های بالاتر، بیشتر است.

جدول (2) همگرایی و مقایسه چهار پارامتر فرکانس اول برای ارتعاشات تقارن محوری یک استوانه توپر همگن آزاد (L/r_o = ٤).

روش حل		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
٦×١٦	Meshless	1/24701	2/92044	3/02842	3/82432
	FEM	1/24937	2/89736	2/99490	3/84032
١١×٣١	Meshless	1/24700	2/92030	3/02823	3/82399
	FEM	1/24759	2/91703	3/01924	3/82911
٢١×٦١	Meshless	1/24699	2/92028	3/02821	3/82395
	FEM	1/24714	2/91960	3/02596	3/82530
مرجع [١٥]		1/24699	2/92028	3/02820	3/82394
مرجع [١٦]		1/24699	2/92019	3/02820	3/82394
مرجع [١٧]		1/24699	2/92028	3/02820	3/82394

در جدول‌های (3) و (4) پنج مقدار پارامتر فرکانس اول ($\Omega=\omega r_o\sqrt{\rho_c/G_c}$) برای استوانه FGM گیردار-گیردار، که لایه داخلی آن سیلیکون نیترید و لایه خارجی آن فولاد ضد زنگ است؛ به ازای مقادیر مختلف توان کسر حجمی ارائه شده است. در این جداول تاثیر پارامتر هندسی نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی بر فرکانس‌ها بررسی شده است. از نتایج استنباط می‌شود افزایش ضخامت باعث افزایش مقدار فرکانس طبیعی می شود. از طرفی، از مقادیر ارائه شده در جدول‌های (3) و (4) ملاحظه می‌شود مقادیر فرکانس‌ها برای استوانه FGM بین مقادیر متناظر، وقتی که استوانه از جنس سیلیکون کاربید خالص یا فولاد ضد زنگ خالص باشد، محدود شده است. از طرفی افزایش مقدار ثابت کسر حجمی باعث افزایش درصد حجمی سرامیک در استوانه، و همچنین افزایش مدول الاستیسیته سیستم می‌شود. در نتیجه سختی سیستم افزایش یافته و به دنبال آن مقدار، به پارامتر فرکانس نیز افزوده می‌شود؛ که مقادیر جداول (3و4) نیز چنین روندی را نشان می‌دهند.

جدول (3) پنج مقدار پارامتر فرکانس ($\Omega=\omega r_o\sqrt{\rho_c/G_c}$) اول برای استوانه FGM دو سر گیردار.

r_i/r_o= ۰/۵ , L/r_o =۳						
Si_3N_4	n=۱۰	n=۱	n=۰/۱	SUS۳۰٤		
1/6533	1/4373	0/9707	0/7537	0/7164	FEM	Ω_1
1/6533	1/4350	0/9708	0/7542	0/7166	Meshless	
2/2304	1/9790	1/3795	1/0433	0/9806	FEM	Ω_2
2/2309	1/9767	1/3798	1/0444	0/9808	Meshless	
2/4564	2/1549	1/5059	1/1537	1/0884	FEM	Ω_3
2/4570	2/1519	1/5062	1/1549	1/0887	Meshless	
2/8233	2/4962	1/7240	1/2950	1/2168	FEM	Ω_4
2/8225	2/4915	1/7236	1/2958	1/2166	Meshless	
3/4753	2/9397	1/9954	1/6116	1/5170	FEM	Ω_5
3/4741	2/9321	1/9945	1/6108	1/5150	Meshless	

جدول (4) پنج مقدار پارامتر فرکانس ($\Omega=\omega r_o\sqrt{\rho_c/G_c}$) اول برای استوانه FGM دو سر گیردار.

r_i/r_o= ۰/۷۵ , L/r_o = ۳						
Si_3N_4	n=۱۰	n=۱	n=۰/۱	SUS۳۰٤		
1/6137	1/4280	0/9700	0/7313	0/6902	FEM	Ω_1
1/6139	1/4262	0/9702	0/7320	0/6904	Meshless	
1/8532	1/6528	1/1433	0/8616	0/8119	FEM	Ω_2
1/8534	1/6510	1/1435	0/8624	0/8120	Meshless	
2/0158	1/7861	1/2428	0/9518	0/9004	FEM	Ω_3
2/0163	1/7840	1/2431	0/9526	0/9006	Meshless	
2/2045	1/9594	1/3584	0/9498	0/9536	FEM	Ω_4
2/2042	1/9565	1/3584	1/0185	0/9536	Meshless	
2/7094	2/3974	1/6644	1/2533	1/1780	FEM	Ω_5
2/7050	2/3898	1/6620	1/2526	1/1771	Meshless	

ارتعاشات اجباری استوانه FGM

برای تحلیل ارتعاشات اجباری، یک استوانه FGM با طول بلند (شرایط کرنش صفحه‌ای) در نظر گرفته شده است. برای اینکه این استوانه حرکت جسم صلب نداشته باشد، دو طرف استوانه در دو جهت مهار شده است. در این مقاله تاثیر پارامترهایی نظیر، توان کسر حجمی ماده FGM، ضخامت استوانه و نوع بارگذاری بر ارتعاشات اجباری بررسی شده است. برای بررسی این اثرات چهار مدل بارگذاری به صورت فشار به سطح داخلی استوانه اعمال می‌شود که به ترتیب در روابط (25) تا (28) ارائه شده است.

$$P_i = 10\sin\left(\frac{5\pi}{0/0015}t\right) \qquad (25)$$

$$P_i = 5\sin\left(\frac{5\pi}{0/0015}t\right) \qquad (26)$$

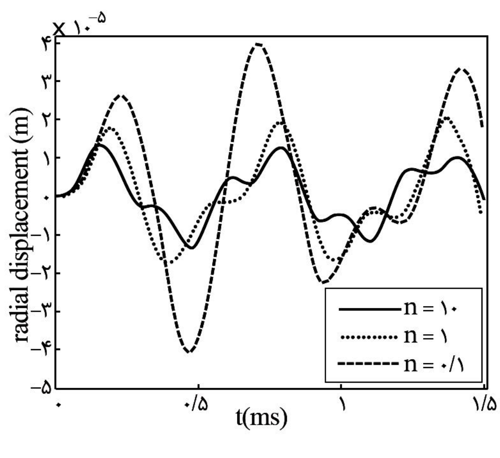
$$\begin{aligned} P_i &= 10\sin\left(\frac{5\pi}{0/0015}t\right) && t < 0/0006 \\ P_i &= \circ && t \geq 0/0006 \end{aligned} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned} P_i &= 10\sin\left(\frac{2\pi}{0/0015}t\right) && t < 0/0015 \\ P_i &= \circ && t \geq 0/0015 \end{aligned} \qquad (28)$$

در روابط فوق P_i فشار داخلی اعمالی به استوانه برحسب MPa و t زمان برحسب ثانیه است.

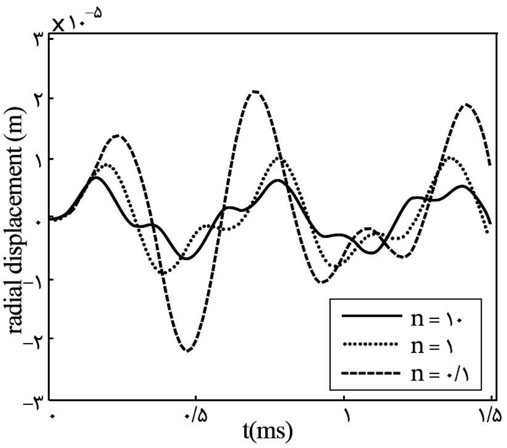
استوانه FGM با شعاع داخلی $r_i = ۰/۲۵\ m$ و شعاع خارجی $r_o = ۰/۵\ m$ که دارای طول بلند (شرایط کرنش صفحه‌ای) باشد را در نظر بگیرید. در این استوانه خواص مکانیکی مواد تشکیل دهنده از سطح داخلی که سیلیکون کاربید خالص است تا سطح خارجی که فولاد ضدزنگ است، طبق رابطه (24) تغییر می‌کند. توان کسر حجمی در این رابطه برابر $n = ۰/۱, ۱, ۱۰$ در نظر گرفته می‌شود.

این استوانه تحت فشار داخلی وابسته به زمان طبق رابطه (25) قرار می‌گیرد. تاریخچه زمانی جابه‌جایی (ارتعاشات) نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه $r = ۰/۳۷۵\ m$ در جهت شعاعی طبق شکل (2) است. با مشاهده این شکل، مشخص می‌شود که با افزایش توان کسر حجمی از 0/1 به 10، به‌دلیل اینکه میزان سرامیک که دارای مدول الاستیسیته بالاتری است بیشتر می‌شود، دامنه ارتعاشات کاهش می‌یابد.



شکل (2) ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری رابطه (25).

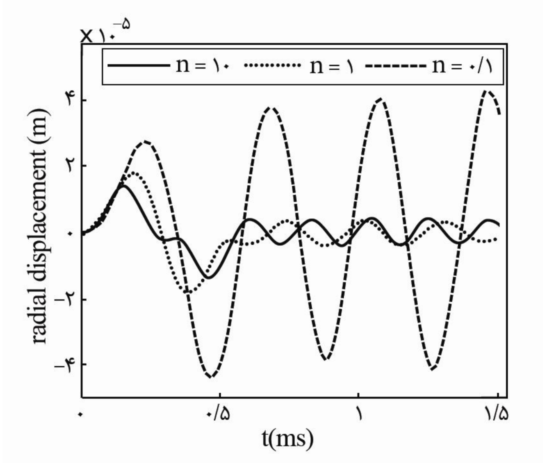
اگر فشار داخلی وابسته به زمان استوانه FGM ذکر شده طبق رابطه (26) تغییر داده شود، به طوری که دامنه تغییرات فشار داخلی نسبت به قبل تا نصف کاهش یابد، ارتعاشات نقطه‌ای در شعاع میانی استوانه $r = ۰/۳۷۵\ m$، با مقدار توان کسر حجمی $n = ۰/۱, ۱, ۱۰$، در شکل (3) ارائه شده است. از این شکل نیز کاهش دامنه ارتعاشات شعاعی بواسطه افزایش مقدار توان کسر حجمی قابل استنباط است. از طرفی، با مقایسه این شکل با شکل (2) ملاحظه می‌شود که با نصف شدن دامنه بارگذاری از $۱۰\ MPa$ به $۵\ MPa$ دامنه ارتعاشات نیز تقریبا نصف می‌شود.



شکل (3) ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری رابطه (26).

برای بررسی اثر تعداد سیکل بارگذاری بر ارتعاشات، فشار داخلی وابسته به زمان طبق رابطه (27) اعمال می‌شود. این مدل بارگذاری تا قبل از زمان $t = ۰/۶ (ms)$، دقیقا شبیه بارگذاری رابطه (25) است، ولی در زمان‌های بعد از آن بارگذاری حذف می‌شود. با مقایسه جواب‌های حاصل از این دو مدل بارگذاری می‌توان اثر تعداد سیکل را بر ارتعاشات این استوانه بررسی کرد. ارتعاشات نقطه‌ای واقع در شعاع میانی این استوانه FGM در شکل (4) نشان داده شده است. اثر افزایش توان کسر حجمی، n، مانند قبل، کاهش دامنه ارتعاشات است. در حالیکه برای اثر تعداد سیکل نیز می‌توان بیان کرد که، تا زمانی که نوع بارگذاری یکسان است ($t < ۰/۶\ (ms)$)، به دلیل اینکه نوع استوانه و شرایط آن یکسان است، دو استوانه ارتعاشات یکسانی از خود

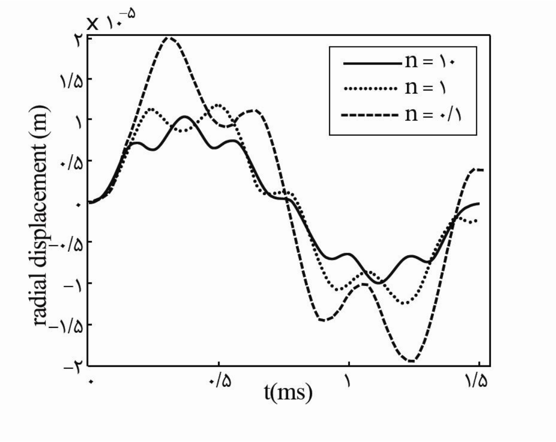
نشان می‌دهند. اما در لحظات پس از آن ($t > ۰/٦\ (ms)$)، برای مقدار توان کسر حجمی $n = ۱, ۱۰$، دامنه ارتعاشات استوانه‌ای که تحت بار سیکلیک قرار گرفته (شکل (2)) بزرگتر می‌شود، در حالی که برای $n = ۰/۱$، عکس این قضیه اتفاق می‌افتد. در نظر داشته باشید که این اتفاق می‌تواند به دلیل یکسان نبودن سرعت انتشار موج در این استوانه‌ها باشد.



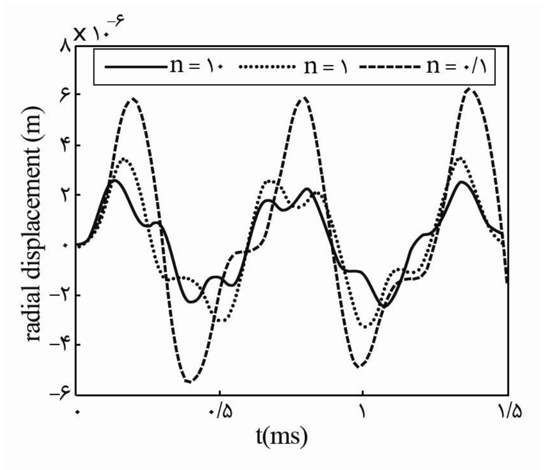
شکل (4) ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری رابطه (27).

برای بررسی اثر پریود بارگذاری (نرخ بارگذاری)، فشار داخلی طبق رابطه (28) به شعاع داخلی استوانه اعمال می‌شود. ارتعاشات شعاعی نقطه میانی این استوانه طبق شکل (5) خواهد بود. از مقایسه دو شکل (4) و (5) می‌توان اثر این پارامتر نرخ بارگذاری را مشاهده نمود. ملاحظه می‌شود که هر دو شکل در لحظاتی که بار به آنها اعمال می‌شود، ارتعاشاتی متناسب با بارگذاری دارند و از طرفی مقدار ماکزیمم جابه‌جایی در استوانه‌ای که تحت بارگذاری با نرخ بیشتری قرار دارد، بزرگتر از استوانه دیگر است. لذا هرچه نرخ بارگذاری بالاتر باشد، مقدار ماکزیمم جابه‌جایی نیز افزایش می‌یابد.

این بار ارتعاشات استوانه‌ای با شعاع داخلی $r_i = ۰/۱۲۵\ m$، شعاع خارجی $r_o = ۰/۵\ m$ و طول بلند، تحت فشار داخلی وابسته به زمان طبق رابطه (25) در نظر گرفته می‌شود. خواص مکانیکی این استوانه مانند قبل تغییر می‌کند. لذا از مقایسه ارتعاشات نقطه میانی این استوانه در شکل (6) با شکل (2) می‌توان اثر تغییر ضخامت استوانه را بررسی کرد. ملاحظه می‌شود که با افزایش ضخامت استوانه، دامنه ارتعاشات استوانه کاهش می‌یابد.



شکل (5) ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM، تحت بارگذاری رابطه (28).



شکل (6) ارتعاشات شعاعی نقطه‌ای واقع در شعاع میانی استوانه FGM ضخیم‌تر، تحت بارگذاری رابطه (24).

5- نتیجه‌گیری

ارتعاشات آزاد و اجباری در یک استوانه FGM، تحت فشار داخلی، تحلیل شد. تغییرات مواد در راستای شعاع و به صورت ضریبی از کسر حجمی مواد بود. برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی معادلات حاکم، روش‌های بدون المان و المان محدود به کار گرفته شد. روش بدون المان مبتنی بر فرم ضعیف معادله حرکت بود و میدان تغییر مکان توسط توابع شکل MLS تقریب زده شده و شرایط مرزی اساسی به روش تبدیل اعمال شد. در این تحقیق اثر توان کسر حجمی و شرایط هندسی و نوع بارگذاری بر پارامترهای ارتعاشی سیستم به دست آمد. از

مقایسه نتایج به دست آمده از دو روش اجزا محدود و بدون المان با مراجع مذکور مشخص شد هر دو روش استفاده شده در این مقاله از دقت مناسبی برخورداراند و همچنین دقت روش بدون المان به مراتب بالاتر از روش المان محدود است. همچنین نتایج به دست آمده پتانسیل بسیار خوبی برای طراحی و بهینه‌سازی چنین استوانه‌هایی را دارا است. فرکانس‌های طبیعی و مقادیر ماکزیمم دامنه جابه‌جایی‌ها می‌تواند با انتخاب صحیح پروفیل توزیع مواد اصلاح شوند، که از مهمترین نتایج در مواد FGM است.

6- مراجع

[١] Koizumi M. , The concept of FGM. Ceram., *Trans. Function Graded Material*, ٣٤, ١٩٩٣, pp. ٣–١٠.

[٢] Kashtalyan M., Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates, Eur. J. Mech. A–Solid, ٢٣, ٢٠٠٤, pp. ٨٥٣–٨٦٤.

[٣] Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N., Vibration of functionally graded cylindrical shells, Int. J. Mech. Sci., ٤١, ١٩٩٩, pp. ٣٠٩–٣٢٤.

[٤] Pradhan S.C., Loy C.T., Reddy J.N., Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions, Appl. Acoust., ٦١, ٢٠٠٠, pp. ١١١–١٢٩.

[٥] Kadoli R., Ganesan K., Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-speciefied boundary condition, J. Sound. Vib., ٢٨٩, ٢٠٠٦, pp. ٤٥٠–٤٨٠.

[٦] Haddadpour H., Mahmoudkhani S., Navazi H.M., Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects, Thin-Walled Structures., ٤٥, ٢٠٠٧, pp. ٥٩١-٥٩٩.

[٧] Ansari R., Darvizeh M., Prediction of dynamic behaviour of FGM shells under arbitrary boundary conditions, Compos. Struct., ٨٥, ٢٠٠٨, pp. ٢٨٤–٢٩٢.

[٨] Shakeri M., Akhlaghi M., Hoseini S.M., Vibration and radial wave propagation velocity in functionally graded thick hollow cylinder, Compos. Struct., ٧٦, ٢٠٠٦, pp. ١٧٤-١٨١.

[٩] Hosseini S.M., Akhlaghi M, Shakeri M., Dynamic response and radial wave propagation velocity in thick hollow cylinder made of functionally graded materials. Int. J. Comput. Aid. Eng. Software, ٢٤, ٢٠٠٧, pp. ٢٨٨-٣٠٣.

[١٠] Asgari M., Akhlaghi M., Hosseini S. M., Dynamic analysis of two-dimensional functionally graded thick hollow cylinder with finite length under impact loading, Acta. Mech., ٢٠٨, ٢٠٠٩, pp. ١٦٣-١٨٠.

[١١] Zhang G.M., Batra R.C., Wave propagation in functionally graded materials by modified smoothed particle hydrodynamics (MSPH) method, J. Comput. Phys., ٢٢٢, ٢٠٠٧, pp. ٣٧٤-٣٩٠.

[١٢] Lancaster P., Salkauskas K., Surface Generated by Moving Least Squares Methods, Math. Comput., ٣٧, ١٩٨١, pp. ١٤١-١٥٨.

[١٣] Li S., Liu W.K., Meshfree and particle methods and their applications, Appl. Mech. Rev., ٥٥, ٢٠٠٢, pp. ١-٣٤.

[١٤] Belytschko Liu W. K., Belytschko T., Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, John Wiley & Sons, ٢٠٠٠, p. ٣١٨

[١٥] Zhou D., Cheung Y.K., Lo S.H., Au FTK., ٣D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev–Ritz method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., ١٩٢, ٢٠٠٣, pp. ١٥٧٥-١٥٨٩.

[١٦] Hutchinson J.R., Comments on, Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis, J. Acoust. Soc. Am., ١٠٠, ١٩٩٦, pp. ١٨٩٤ –١٨٩٥.

[١٧] Leissa A.W., So J., Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three dimensional analysis, *J. Acoust. Soc. Am.*, ٩٨, ١٩٩٥, pp. ٢١٣٦–٢١٤١.