

## تحلیل عملکرد یاتاقانهای کفگرد هیدرو دینامیکی با روش درونیابی مشتق

محمدرضا فاضل<sup>۳</sup>

اصغر دشتی رحمت آبادی<sup>۲\*</sup>

مهدی زارع مهرجردی<sup>۱</sup>

\* نویسنده مسئول : [dashti@yazduni.ac.ir](mailto:dashti@yazduni.ac.ir)

### چکیده

روش درونیابی مشتق تعمیم یافته<sup>۴</sup>، یک روش حل عددی مرتبه بالا است. در این روش، برخلاف سایر روشهای عددی از مقادیر تابع آزمایشی مورد استفاده بر روی تمامی نقاط دامنه مسئله برای حدس مقادیر مشتق تابع مجهول اصلی استفاده می شود. از مزایای این روش می توان به همگرایی سریعتر نسبت به سایر روشهای عددی موجود، نظیر روش اجزاء محدود<sup>۵</sup> و تفاضل محدود<sup>۶</sup> برای رسیدن به نتایج با دقت یکسان و نیز توانایی بالای این روش در حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر مسائل مختلف، اشاره نمود. در این مقاله از روش درونیابی مشتق تعمیم یافته برای تحلیل عملکرد گروهی از یاتاقانهای کفگرد هیدرو دینامیکی تحت عنوان یاتاقانهای کشویی با کفشک شیب ثابت استفاده شده است. در نهایت نتایج حاصل از این بررسی برای یاتاقانهای کف گرد مورد نظر در حالتی یک بعدی و دوبعدی با نتایج حل دقیق و نتایج حاصل از سایر روشهای عددی مقایسه شده است. مقایسه در حالات مختلف، نشان دهنده برقراری تطابق خوبی بین نتایج حاصل از روش درونیابی مشتق تعمیم یافته و سایر روشهای حل عددی می باشد.

**واژه های کلیدی:** حل عددی، روش درونیابی مشتق تعمیم یافته، روانکاری هیدرو دینامیکی، یاتاقان کشویی.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد.

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه یزد.

۳- مربی، دانشکده مکانیک دانشگاه یزد.

4- Generalized Differential Quadrature (GDQ) Method  
5- Finite Element Method (FEM)  
6- Finite Difference Method (FDM)

## ۱- مقدمه

اساس تمامی پژوهشها در حوزه روانکاری فیلم سیال را بررسی معادله رینولدز، در شرایط مربوط به مسائل گوناگون تشکیل می‌دهد. به همین علت حل این معادله در شرایط مختلف توانسته است موضوع بسیاری از مقالات تحقیقاتی ارائه شده در این زمینه را به خود اختصاص دهد. حل تحلیلی این معادله تنها در حالاتی که از تقریب یاتاقان بلند و یا بسیار کوتاه استفاده گردد (یک بعدی)، امکان پذیر است. بنابراین در حالت کلی حل معادله رینولدز تنها با استفاده از روشهای عددی امکان پذیر بوده و این عمل تاکنون با استفاده از روشهای عددی مختلف انجام گرفته است. ریموندی و بوید در سال ۱۹۵۸ تحلیل یاتاقانهای هیدرودینامیکی با روانکاری تراکم‌ناپذیر را با استفاده از روش تفاضل محدود انجام دادند [۱]. همچنین ریموندی در سال ۱۹۶۱ حل مسئله مربوط به روانکاری هیدرودینامیکی یاتاقانهای گازی را با استفاده از روش تفاضل محدود انجام داد [۲]. در ادامه ردی در سال ۱۹۶۹ و کاتو و هوری در سال ۱۹۸۸، تحلیل مسائل فوق را با استفاده از روش حل عددی اجزاء محدود انجام دادند [۳،۴]. شرما و پاندی در سال ۲۰۰۸ اثرات پروفیل سطح بر عملکرد یاتاقانهای کفگرد را با استفاده از روش تفاضل محدود مورد بررسی قرار دادند [۵]. با توجه به اهمیت سرعت در انجام محاسبات مورد نیاز در تحلیل اکثر مسائل مهندسی از جمله مسائل حوزه روانکاری، محققین همواره در پی یافتن روشهای حل عددی با کارایی بیشتر، ساده‌تر و با سرعت بالاتر جهت همگرایی به نتایج مورد نظر بوده‌اند. به همین علت استفاده از روش درونیابی مشتق تعمیم یافته به عنوان یک روش حل عددی مناسب در تحلیل مسائل مربوط به روانکاری مورد توجه قرار گرفته است. روش درونیابی مشتق، روشی ساده و کارا برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی و غیرخطی همراه با شرایط اولیه و مرزی می‌باشد. این روش اولین بار توسط بلمن در سال ۱۹۷۱ معرفی شد [۶]. در ادامه نیز پژوهشهای زیادی در راستای گسترش و تکامل این روش صورت گرفت. مینگل در سال ۱۹۷۷ از این روش برای حل غیرخطی مسئله هدایت گرمایی ناپایدار در فضای یک بعدی استفاده کرد [۷]. برت و جنگ نیز در سال ۱۹۸۸ از این

روش در تحلیل دینامیکی سازه‌ها بهره جستند [۸]. شو و ریچاردز در سال ۱۹۹۲ موفق به استخراج یک رابطه بازگشتی جدید برای استخراج ضرایب وزنی در روش درونیابی مشتق شدند و روش خود را روش درونیابی مشتق تعمیم یافته نامیدند [۹]. مالیک و برت در سال ۱۹۹۴ مسئله مربوط به روانکاری پایدار با استفاده از روانکار در حالات تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر را مورد بررسی قرار دادند [۱۰]. همچنین زانگ و همکارانش در سال ۲۰۰۲ نیز تحلیل دسته خاصی از یاتاقانهای ژورنال هیدرودینامیکی را با استفاده از این روش انجام دادند [۱۱].

در مقاله حاضر، پس از تشریح روش درونیابی مشتق تعمیم یافته، از این روش جهت تحلیل عملکرد یاتاقانهای کفگرد هیدرودینامیکی استفاده می‌شود. در ادامه طرح جایگزینی این روش در تحلیلها به جای سایر روشهای عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲- روش درونیابی مشتق تعمیم یافته

روش درونیابی مشتق، معمولاً برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل با ابعاد بیش از یک و نیز با دامنه‌های هندسی غیرمنظم استفاده می‌شود. اما با توجه به شرایط حاکم بر مسئله مورد نظر در کار اخیر، استفاده از این روش برای تحلیل معادله حاکم بر یک دامنه هندسی مربعی منظم  $0 < x < 1$  و  $0 < y < 1$  تشریح می‌شود.

بر اساس قوانین روش درونیابی مشتق، مشتقات جزئی یک تابع در هر نقطه ای از راستای خاص توسط مجموع وزن‌دار مقادیر تابع در تمامی نقاط گرهی انتخاب شده در آن راستای خاص به دست می‌آید. بنابراین برای مشتق مرتبه  $n$  ام تابع مفروض  $\psi = \psi(x, y)$  می‌توان نوشت:

$$\left. \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N_x} A_{ij}^{(n)} \psi(x_j, y) \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x \quad j = 1, 2, \dots, N_y$$

در این رابطه  $N_x$  و  $N_y$  به ترتیب تعداد نقاط گرهی انتخاب شده در راستای محور  $x$  و محور  $y$  می‌باشند و  $A_{ij}^{(n)}$  نیز ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه  $n$  ام تابع  $\psi(x, y)$  در راستای محور  $x$  و در نقطه  $x = x_i$  است.

## ۱-۲- تعیین ماتریسهای ضرایب وزنی

برای تعیین ماتریس ضرایب وزنی باید از یک تابع تقریب آزمایشی تعریف شده روی دامنه مسئله استفاده کرد. تابع تقریب باید شروط کامل بودن و نیز مشتق پذیری تا بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله را به صورت همزمان دارا باشد. برحسب نوع مسئله مورد بررسی، می توان از توابع آزمایشی مختلفی چون توابع تقریب چندجمله ای و یا هارمونیک استفاده نمود که در کار حاضر از توابع تقریب چندجمله ای استفاده شده است.

در گذشته از چند جمله ایهای توانی و نیز چند جمله ایهای لژاندر برای توابع تقریب استفاده می شد که با توجه به محدودیتهای این نوع از توابع در هنگام انجام محاسبات، از جمله منفرد شدن ماتریسهای واندروند موجود در محاسبات با بالارفتن تعداد نقاط گرهی انتخاب شده، استفاده از این نوع توابع تقریب به تدریج جای خود را به چندجمله ایهای درونیایی لاگرانژ داد.

چندجمله ایهای مورد استفاده در این حالت را می توان به شکل زیر نشان داد:

$$\Phi(X) = \frac{M(X)}{(X - X_k)M^{(0)}(X_k)} \quad \text{و} \quad k = 1, 2, \dots, N_x \quad (2)$$

در رابطه فوق؛

$$M(X) = \prod_{k=1}^{N_x} (X - X_k) \quad (3)$$

همچنین  $M^{(0)}(X)$  نیز مشتق مرتبه اول تابع  $M(X)$  می باشد که از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$M^{(0)}(X) = \prod_{k=1, k \neq i}^{N_x} (X_i - X_k) \quad (4)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در عبارت (۱) می توان به نتیجه زیر دست یافت:

$$A_{ik}^{(0)} = \frac{M^{(0)}(X_i)}{(X_i - X_k)M^{(0)}(X_k)} \quad i \neq k \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{و} \quad k = 1, 2, \dots, N_x$$

همچنین درایه های قطر اصلی از رابطه زیر محاسبه می شوند:

$$A_{ii}^{(0)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{N_x} A_{ik}^{(0)} \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (6)$$

شو و ریچاردز در مقالات خود روش بازگشتی زیر را برای محاسبه ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مراتب بالاتر یک تابع در راستای  $X$  پیشنهاد کردند [۱۲]:

$$A_{ik}^{(r)} = r \left( A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(0)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{X_i - X_k} \right) \quad i \neq k \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x \quad k = 1, 2, \dots, N_x \quad r = 1, 2, \dots, N_x - 1$$

و برای محاسبه درایه های قطر اصلی نیز رابطه زیر پیشنهاد شده بود:

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{N_x} A_{ik}^{(r)} \quad \text{و} \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (8)$$

مالیک و یرت نیز در بررسیهای خود نشان دادند که برای محاسبه ضرایب وزن مربوط به مشتقات مراتب بالاتر یک تابع، با مشخص بودن ماتریس ضرایب وزنی مربوط به مشتق مرتبه اول تابع، می توان از رابطه بازگشتی زیر استفاده نمود [۱۰]:

$$A^{(r)} = A^{(0)} A^{(r-1)} \quad (9)$$

در رابطه فوق  $A^{(r)}$  و  $A^{(r-1)}$  و  $A^{(0)}$  به ترتیب ماتریسهای ضرایب وزنی مربوط به مشتقات مرتبه  $r$  ام، مرتبه  $(r-1)$  ام و مرتبه اول تابع مورد نظر بر حسب متغیر  $X$  می باشند.

## ۲-۲- تعیین مکان نقاط شبکه

روشهای مختلفی برای تعیین مکان نقاط نمونه بر روی دامنه مسئله وجود دارد و در کار اخیر از صفرهای جابه جا شده چندجمله ای چیبشف برای این کار استفاده گردیده است:

$$x_i = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{(i-1)\pi}{2N_x} \right) \right) \quad \text{و} \quad \begin{matrix} i = 2, 3, \dots, N_x - 1 \\ 0 < x_i < 1 \end{matrix} \quad (10)$$

از آنجا که صفرهای این چندجمله ای مقادیر 0 و 1 را شامل نمی گردد، خواهیم داشت:

$$x_i = 1 \quad \text{for} \quad i = N_x \quad (11)$$

$$x_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1$$

با اندکی تغییر می توان دامنه نقاط نمونه فوق را به هر دامنه دیگری تعمیم داد.

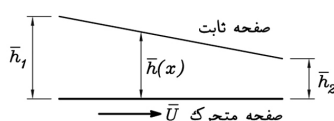
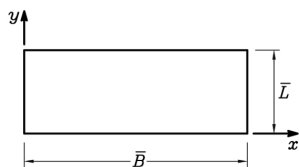
## ۲-۳- قوانین روش درونیایی مشتق برای محاسبه

### انتگرال تابع روی دامنه معین

همچنین برای محاسبه انتگرال از تابع تقریب مورد نظر بر روی دامنه نیز می توان از روابط درونیایی مشتق به صورت زیر استفاده نمود [۱۰]:

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{i=1}^{N_x} c_i^x \psi(x_i) \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(2)} \psi_{kj} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \sum_{k=1}^{N_x} B_{jk}^{(2)} \psi_{il} - \frac{\nu}{4h_i^2} \left[ \left(\frac{dl}{dx}\right)^2 + \nu h \frac{d^2 h}{dx^2} \right] \psi_{ij} = \frac{\rho}{h_i^3} \left(\frac{dl}{dx}\right)_i$$



شکل (۱) باتاقان کشویی با کفشک شیب ثابت

شرایط مرزی موجود نیز با توجه به نوع مسئله عبارتند از:

$$\psi(0, y) = \psi(1, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, 1) = 0 \quad (15)$$

با اعمال روش درونیابی مشتق روی معادله (۱۴) دستگاه

معادلات جبری زیر جهت یافتن مقادیر مجهول متغیر  $\psi$  روی

نقاط نمونه انتخاب شده در دامنه مسئله پدید می‌آید:

$$i = 1, 2, \dots, N_x \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (16)$$

در رابطه فوق  $A_{ij}^{(2)}$  و  $B_{ij}^{(2)}$  به ترتیب ماتریسهای ضرایب

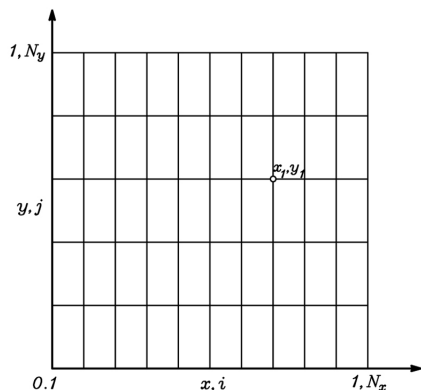
وزنی مربوط به مشتقات مرتبه دوم تابع  $\psi$  در جهت

محورهای  $x$  و  $y$  هستند. متغیرهای  $i$  و  $j$  نیز مکان نقاط

نمونه  $(x_i, y_j)$  را روی دامنه مسئله نشان می‌دهند. شکل (۲)

نمونه‌ای از نحوه قرارگیری نقاط نمونه را روی دامنه مسئله

مورد نظر در روش درونیابی مشتق تعمیم یافته نشان می‌دهد.



شکل (۲) نمونه مش بندی دامنه مسئله برای تحلیل با روش درونیابی

مشتق تعمیم یافته

که  $c_i^x$  نیز نشان دهنده ضرایب وزنی جهت محاسبه انتگرال

است. در صورت استفاده از چند جمله‌ایهای لژاندر برای

تقریب این ضرایب نیز از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{N_x} x_j^{k-1} c_j^x = \frac{1}{k} \quad \text{و} \quad k = 1, 2, \dots, N_x \quad (13)$$

در تحلیل مسائل دوبعدی می‌توان تمامی روابط فوق را در

راستای محور  $y$  نیز تعمیم داد.

### ۳- کاربرد

استفاده از روش درونیابی مشتق، امکان جایگزینی

معادلات دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی و مقادیر اولیه را

با یک دستگاه معادلات جبری خطی فراهم می‌آورد و در

ادامه، این امکان برای ما فراهم می‌شود که با حل این دستگاه

معادلات که شرایط مرزی مورد نظر روی آن اعمال شده،

مقادیر مجهول مورد نظر را بر روی نقاط نمونه انتخاب شده

روی دامنه مسئله به دست آوریم.

در تمامی حالات بررسی شده در ادامه مقاله معادله رینولدز

بر حسب متغیر  $\psi$  بازنویسی شده است که  $\psi = ph^2/\nu$  است.

علت این امر نیز تغییرات کمتر این متغیر بر روی دامنه نسبت به

تابع فشار  $p$  می‌باشد. این مطلب بدین معنا است که فشار ایجاد

شده فیلم روانکار با کاهش ضخامت فیلم افزایش و با افزایش

ضخامت آن کاهش می‌یابد. بنابراین برای تحلیل استفاده از این

متغیر به جای تابع فشار به ما کمک می‌کند تا بتوانیم نتایج

مشابه و با دقت یکسان را با استفاده از تعداد نقاط نمونه کمتری

نسبت به حالت استفاده از تابع فشار به دست آوریم.

### ۳-۱- باتاقان کشویی با کفشک شیب ثابت

شکل (۱) باتاقان کشویی مورد بررسی در کار اخیر را

نشان می‌دهد. در این باتاقان حرکت کفشک تحتانی سبب

ایجاد فشار در لایه روانکار قرار گرفته بین سطوح می‌گردد.

معادله رینولدز حاکم بر روانکاری هیدرودینامیکی یک

باتاقان کشویی در حالت بدون بعد عبارت است از [۱۰]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\nu}{4h^2} \left[ \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \nu h \frac{d^2 h}{dx^2} \right] \psi - \frac{\rho}{h^3} \frac{dh}{dx} = 0 \quad (14)$$

جدول (۱) نتایج حاصل برای توزیع فشار به دست آمده از روشهای حل دقیق (pexact) و درونیایی مشتق تعمیم یافته (PGDQ) یاتاقان کشویی با

کفشک شیب ثابت یک بعدی،  $N_x = 13$

X	$\frac{h_1}{h_r} = 1/2$		$\frac{h_1}{h_r} = 8$	
	Pexact	PGDQ	Pexact	PGDQ
۰/۰۳۲۴۹۱۸	۰/۰۱۲۰۳۸	۰/۰۱۲۰۳۸	۰/۰۰۲۴۲۸	۰/۰۰۲۴۲۸
۰/۰۸۸۵۰۸۰	۰/۰۳۱۴۸	۰/۰۳۱۴۸	۰/۰۰۶۹۱۱	۰/۰۰۶۹۱۱
۰/۱۶۸۴۳۸۶	۰/۰۵۶۱۶۵	۰/۰۵۶۱۶۵	۰/۰۱۴۰۴۹	۰/۰۱۴۰۴۹
۰/۲۶۷۶۳۸۴	۰/۰۸۱۳۴	۰/۰۸۱۳۴	۰/۰۲۴۳۶۹	۰/۰۲۴۳۶۹
۰/۳۸۰۳۴۲۱	۰/۱۰۱۷۶۷	۰/۱۰۱۷۶۷	۰/۰۳۸۶۰۴	۰/۰۳۸۶۰۴
۰/۵۰۰۰۰۰۰	۰/۱۱۲۶۹۷	۰/۱۱۲۶۹۷	۰/۰۵۷۶۱۱	۰/۰۵۷۶۱۱
۰/۶۱۹۶۵۷۸	۰/۱۱۱۰۲۱	۰/۱۱۱۰۲۱	۰/۰۸۱۹۹۴	۰/۰۸۱۹۹۴
۰/۷۳۲۳۶۱۵	۰/۰۹۶۳۲۵	۰/۰۹۶۳۲۵	۰/۱۱۰۷۷۴	۰/۱۱۰۷۷۴
۰/۸۳۱۵۶۱۳	۰/۰۷۱۵۰۲	۰/۰۷۱۵۰۲	۰/۱۳۷۶۴۳	۰/۱۳۷۶۴۳
۰/۹۱۱۴۹۱۹	۰/۰۴۲۴۸۷	۰/۰۴۲۴۸۷	۰/۱۴۳۵۰۹	۰/۱۴۳۵۰۹
۰/۹۶۷۵۰۸۱	۰/۰۱۶۹۲۶	۰/۰۱۶۹۲۶	۰/۰۹۷۳۱۹	۰/۰۹۷۳۱۹

\* فشار مطلق در نقاط ابتدایی و انتهایی برابر فشار محیط  $p(\epsilon) = p(0) = 0$  می باشد.

جدول (۲) نتایج حاصل برای قابلیت حمل بار یاتاقان به دست آمده از

روشهای حل دقیق ( $W_{exact}$ ) و درونیایی مشتق تعمیم یافته ( $W_{GDQ}$ )

یاتاقان کشویی با کفشک شیب ثابت یک بعدی،  $N_x = 13$

$\frac{h_1}{h_r}$	$W_{exact}$	$W_{GDQ}$	درصد خطا percent-error
۱/۲	۰/۰۷۵۵۰۶	۰/۰۷۵۵۰۶	۰/۰۰۰
۱/۵	۰/۱۳۱۱۶۳	۰/۱۳۱۱۶۳	۰/۰۰۰
۲/۰	۰/۱۵۸۸۸۳	۰/۱۵۸۸۸۳	۰/۰۰۰
۳/۰	۰/۱۴۷۹۱۸	۰/۱۴۷۹۱۸	۰/۰۰۰
۵/۰	۰/۱۰۳۵۳۸	۰/۱۰۳۵۳۸	۰/۰۰۱
۸/۰	۰/۰۶۴۱۳۷	۰/۰۶۴۱۳۷	۰/۰۱۳
۱۰/۰	۰/۰۴۹۳۳۳	۰/۰۴۹۳۳۳	۰/۰۳۲

\* درصد خطا در همه جداول از رابطه روبه رو به دست آمده است:

$$\text{percent-error} = \frac{W_{exact} - W_{GDQ}}{W_{exact}} * 100$$

جدول (۳) نتایج حاصل برای محل مرکز فشار به دست آمده از روشهای

حل دقیق ( $x_{c_{exact}}$ ) و درونیایی مشتق تعمیم یافته ( $x_{c_{GDQ}}$ ) یاتاقان

کشویی با کفشک شیب ثابت یک بعدی،  $N_x = 13$

$\frac{h_1}{h_r}$	$x_{c_{exact}}$	$x_{c_{GDQ}}$	درصد خطا
۱/۲	۰/۵۱۸۲۲۱	۰/۵۱۸۲۲۱	۰/۰۰۰
۱/۵	۰/۵۴۰۴۲۰	۰/۵۴۰۴۲۰	-۰/۰۰۰
۲/۰	۰/۵۶۸۶۸۸	۰/۵۶۸۶۸۸	۰/۰۰۰
۳/۰	۰/۶۰۷۴۰۹	۰/۶۰۷۴۰۹	۰/۰۰۰
۵/۰	۰/۶۵۳۴۸۱	۰/۶۵۳۴۸۱	۰/۰۰۰
۸/۰	۰/۶۹۲۴۳۲	۰/۶۹۲۴۳۲	۰/۰۰۷
۱۰/۰	۰/۷۰۹۵۸۴	۰/۷۰۹۵۸۴	۰/۰۱۹

### ۲-۳- پارامترهای عملکرد یاتاقان

با اعمال شرایط مرزی در معادله (۱۶) و حل آن می توان

مقادیر مجزای  $\psi$  را روی دامنه مسئله محاسبه نمود و از آنجا

مقادیر فشار  $p$  را بر روی دامنه مسئله به دست آورد. پارامترهای عملکرد

به صورت بی بعد شده بر اساس روابط ارائه شده در پیوست (۱)، در

جدول (۹)، به صورت زیر قابل محاسبه خواهند بود [۱۳]:

الف- قابلیت حمل بار توسط یاتاقان

$$W = \int_0^1 \int_0^1 p \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} c_i^x c_j^y \frac{\psi_{ij}}{h_i^{3/2}} \quad (17)$$

ب- محل قرار گیری مرکز فشار ( $x_c$ ) در راستای محور  $x$

$$x_c = \frac{1}{W} = \int_0^1 \int_0^1 x p \, dx \, dy = \left( \frac{1}{W} \right) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} c_i^x c_j^y \frac{x_i \psi_{ij}}{h_i^{3/2}} \quad (18)$$

ج- نرخ جریان حجمی عبوری از یاتاقان

$$Q_x = \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{h}{2} = -\frac{h_i^2}{12} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(1)} p_{kj} + \frac{h_i}{2} \quad (19)$$

د- آهنگ نشتی روانکار از یاتاقان

$$Q_y = -\frac{h^2}{12\lambda} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) = -\frac{h_i^2}{12\lambda} \sum_{k=1}^{N_y} B_{ik}^{(1)} p_{jk} \quad (20)$$

ه- نیروی اصطکاک تولید شده در یاتاقان

$$F = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{h}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{h} \right) dx \, dy \quad (21)$$

$$= -\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} c_i^x c_j^y \left( \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(1)} p_{kj} + \frac{1}{h_i} \right)$$

### ۴- نتایج و بررسی آنها

پارامترهای عملکرد مربوط به یاتاقان کشویی تحت روانکاری

هیدرودینامیک با روانکار تراکم ناپذیر بر اساس روابط بخش

قبل محاسبه و نتایج حاصل در ذیل ارائه شده است. مقایسه نتایج

حاصل از برنامه با نتایج حل دقیق در جداول (۱ تا ۴) برای

بررسی صحت عملکرد برنامه نویسی صورت پذیرفته است.

جدول (۶) الف- نتایج حاصل برای نرخ جریان حجمی عبوری از یاتاقان ( $Q_x$ )  
ب- آهنگ نشی روانکار از یاتاقان ( $Q_y$ ) روشهای تفاضل  
محدود (FDM) و درونیایی مشتق تعمیم یافته (GDQ)

$\lambda$	$\frac{h_1}{h_2}$	$N_x \times N_y$	$Q_x$	
			FDM	GDQ
۰/۲۵	۱/۲	۸×۹	۰/۵۹۴	۰/۵۹۳۷۲
	۱/۵	۸×۹	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴۲۹
	۲/۰	۸×۹	۰/۹۶۸	۰/۹۶۷۳۰
	۳/۰	۸×۹	۱/۴۳۳	۱/۴۳۲۰
	۵/۰	۱۴×۹	۲/۳۶۳	۲/۳۶۴۹۰
	۸/۰	۱۸×۹	۳/۷۵۸	۳/۷۶۷۲۷
	۱۰/۰	۲۰×۹	۴/۶۸۷	۴/۷۱۲۳۱
۰/۵۰	۱/۲	۸×۹	۰/۵۸۷	۰/۵۸۶۱۹
	۱/۵	۸×۹	۰/۷۱۵	۰/۷۱۴۰۹
	۲/۰	۸×۹	۰/۹۲۶	۰/۹۲۶۲۴
	۳/۰	۸×۹	۱/۳۴۳	۱/۳۴۱۱۸
	۵/۰	۱۴×۹	۲/۱۶۹	۲/۱۶۸۰
	۸/۰	۱۸×۹	۳/۴۰۲	۳/۳۸۵۱۳
	۱۰/۰	۲۰×۹	۴/۲۲۲	۴/۲۰۷۷۶
۱/۰	۱/۲	۸×۹	۰/۵۷۴	۰/۵۷۳۴۳
	۱/۵	۸×۹	۰/۶۷۹	۰/۶۷۸۲۸
	۲/۰	۸×۹	۰/۸۴۷	۰/۸۴۳۳۴
	۳/۰	۸×۹	۱/۱۶۳	۱/۱۷۱۹۲
	۵/۰	۱۴×۹	۱/۷۶۴	۱/۶۶۸۵۹
	۸/۰	۱۸×۹	۲/۶۳۵	۲/۳۴۳۰۰
	۱۰/۰	۲۰×۹	۳/۲۰۸	۳/۱۳۱۴۹
۲/۰	۱/۲	۸×۹	۰/۵۶۱	۰/۵۶۰۵۵
	۱/۵	۸×۹	۰/۶۴۳	۰/۶۴۱۲۲
	۲/۰	۸×۹	۰/۷۶۵	۰/۷۵۴۴۱
	۳/۰	۸×۹	۰/۹۷۵	۰/۹۴۴۳۴
	۵/۰	۱۴×۹	۱/۳۳۹	۱/۳۰۷۴۰
	۸/۰	۱۸×۹	۱/۸۳۷	۱/۵۹۸۵۴
	۱۰/۰	۲۰×۹	۲/۱۵۷	۱/۹۲۱۴۵

(الف)

جدول (۴) نتایج حاصل برای نیروی اصطکاک به دست آمده از روشهای  
حل دقیق ( $F_{exact}$ ) و درونیایی مشتق تعمیم یافته ( $F_{GDQ}$ )  
یاتاقان کشویی با کفشک شیب ثابت یک بعدی،  $N_x = 13$

$\frac{h_1}{h_2}$	$F_{exact}$	$F_{GDQ}$	درصد خطا
۱/۲	-۰/۹۱۹۱۵۸	-۰/۹۱۹۱۵۸	۰/۰۰۰
۱/۵	-۰/۸۴۲۷۲۱	-۰/۸۴۲۷۲۱	۰/۰۰۰
۲/۰	-۰/۷۷۲۵۸۹	-۰/۷۷۲۵۸۹	۰/۰۰۰
۳/۰	-۰/۶۹۷۲۲۵	-۰/۶۹۷۲۲۵	۰/۰۰۰
۵/۰	-۰/۶۰۹۴۳۵	-۰/۶۰۹۴۳۵	۰/۰۰۰
۸/۰	-۰/۵۲۱۵۴۳	-۰/۵۲۱۵۴۳	۰/۰۰۸
۱۰/۰	-۰/۴۷۷۸۰۲	-۰/۴۷۷۸۰۲	۰/۰۲۳

نتایج ارائه شده در جداول (۱ تا ۴) بیانگر صحت عملکرد  
برنامه‌نویسی انجام شده برای استفاده از روش درونیایی مشتق  
تعمیم یافته در حل مسئله مورد نظر می‌باشد. همچنین نتایج  
سرعت بالای همگرایی روش درونیایی مشتق تعمیم یافته برای  
حل مسئله در حالت یک بعدی را نشان می‌دهند. این موضوع از  
تعداد نقاط گرهی اندک مورد استفاده برای تحلیل در حالت  
یک بعدی مسئله ناشی می‌شود. در ادامه نتایج حاصل برای  
پارامترهای عملکرد یاتاقان در حالت دو بعدی ارائه شده است.

جدول (۵) نتایج حاصل برای عدد سامرفیلد ( $S$ ) و محل مرکز  
فشار ( $x_c$ ) روشهای حل عددی تفاضل محدود ( $FDM$ ) و درونیایی  
مشتق تعمیم یافته ( $GDQ$ )،  $N_y = 9$  و  $N_x = 8$

$\lambda$	$\frac{h_1}{h_2}$	$S$		$x_c$	
		$FDM$	$GDQ$	$FDM$	$GDQ$
۰/۲۵	۱/۲	۲۵۰/۶۳	۲۵۰/۲۸	۰/۵۳۴	۰/۵۳۳۷
	۱/۵	۱۴۰/۲۵	۱۳۹/۸۸	۰/۵۷۱	۰/۵۷۱۴
	۲/۰	۱۰۸/۳۴	۱۰۸/۲۷۸	۰/۶۲۴	۰/۶۲۳۲
	۳/۰	۱۰۰/۸۱	۱۰۰/۵۰	۰/۶۸۹	۰/۶۸۸۱
	۵/۰	۱۱۳/۲۵	۱۱۲/۹۶۲	۰/۷۵۶	۰/۷۵۴۲
	۸/۰	۱۴۲/۴۵	۱۴۴/۰۹	۰/۸۰۴	۰/۸۰۹۵
	۱۰/۰	۱۶۴/۴۷	۱۶۸/۷	۰/۸۲۲	۰/۸۱۶۲
۰/۵۰	۱/۲	۷۷/۰۴	۷۶/۸	۰/۵۲۷	۰/۵۲۷۱
	۱/۵	۴۳/۵۵	۴۳/۲۲	۰/۵۶	۰/۵۶
	۲/۰	۳۴/۴۲	۳۴/۷۲	۰/۶۰۱	۰/۶۰۱
	۳/۰	۳۳/۷۲	۳۳/۵۶	۰/۶۵۵	۰/۶۵۵۹
	۵/۰	۴۱/۳۶	۴۰/۴۷	۰/۷۱۵	۰/۷۱۶۳
	۸/۰	۵۷/۱۸	۵۵/۸۳	۰/۷۶۱	۰/۷۶۱۷
	۱۰/۰	۶۹/۱۶	۶۷/۱۶	۰/۷۸	۰/۷۷۹۶
۱/۰	۱/۲	۳۱/۴۲	۳۱/۲۵	۰/۵۲۲	۰/۵۲۱۸
	۱/۵	۱۷/۹۲	۱۷/۶۵	۰/۵۴۸	۰/۵۴۸۴
	۲/۰	۱۴/۴۸	۱۴/۰۸	۰/۵۸۲	۰/۵۸۲۱
	۳/۰	۱۴/۸۷	۱۴/۴۱	۰/۶۲۷	۰/۶۲۷۸
	۵/۰	۱۷/۷۳	۱۹/۶۸	۰/۶۸	۰/۶۸۱
	۸/۰	۲۹/۶۱	۲۹/۶۱	۰/۷۲۳	۰/۷۲۳۷
	۱۰/۰	۳۷/۲۹	۳۵/۲۱	۰/۷۴۱	۰/۷۴۱۴
۲/۰	۱/۲	۱۶/۲۲	۱۹/۲۱۳	۰/۵۲	۰/۵۱۵۹
	۱/۵	۱۱/۱	۱۰/۸۶	۰/۵۴۳	۰/۵۴۳۲
	۲/۰	۹/۰۸	۹/۰۴	۰/۵۷۳	۰/۵۷۳۵
	۳/۰	۹/۵۹	۹/۳۱	۰/۶۱۵	۰/۶۱۴۹
	۵/۰	۱۳/۳	۱۳/۵۳	۰/۶۶۳	۰/۶۶۳۶
	۸/۰	۲۰/۸۶	۲۱/۲۴	۰/۷۰۴	۰/۷۰۳۵
	۱۰/۰	۲۶/۷۸	۲۷/۵۳	۰/۷۲۲	۰/۷۲۰۵

\* حل تفاضل محدود از [۱۳]

جدول (۷) نتایج حاصله برای نیروی اصطکاک ( $F$ ) به دست آمده از روشهای حل عددی تفاضل محدود و درونیایی مشتق تعمیم یافته باتاقان کشویی با کفشک شیب ثابت دو بعدی،  $N_x = 8$  و  $N_y = 9$

$\lambda$	$\frac{h_1}{h_2}$	$F$	
		FDM	GDQ
۰/۲۵	۱/۲	۰/۹۱۲	۰/۹۱۲۴
	۱/۵	۰/۸۱۳	۰/۸۱۲۷
	۲/۱۰	۰/۶۹۸	۰/۶۹۷۷
	۳/۱۰	۰/۵۵۹	۰/۵۵۹۳
	۵/۱۰	۰/۴۲	۰/۴۲۰۵
	۸/۱۰	۰/۳۲۲	۰/۳۲۲۸
	۱۰/۱۰	۰/۲۸۳	۰/۲۸۵
۰/۵۰	۱/۲	۰/۹۱۳	۰/۹۱۹۲
	۱/۵	۰/۸۱۷	۰/۸۱۶۹
	۲/۱۰	۰/۷۰۸	۰/۷۰۷۴
	۳/۱۰	۰/۵۷۹	۰/۵۸۰۲
	۵/۱۰	۰/۴۵۱	۰/۴۵۵۸
	۸/۱۰	۰/۳۵۸	۰/۳۶۱۴
	۱۰/۱۰	۰/۳۲۱	۰/۳۳۲۷
۱/۱۰	۱/۲	۰/۹۱۴	۰/۹۱۴۸
	۱/۵	۰/۸۲۵	۰/۸۲۵۱
	۲/۱۰	۰/۷۲۸	۰/۷۲۹۳
	۳/۱۰	۰/۶۱۷	۰/۶۲۲۴
	۵/۱۰	۰/۵۰۴	۰/۵۲۴۸
	۸/۱۰	۰/۴۱۵	۰/۴۵۲۱
	۱۰/۱۰	۰/۳۷۷	۰/۳۸۲۶
۲/۱۰	۱/۲	۰/۹۱۷	۰/۹۱۶۸
	۱/۵	۰/۸۳۴	۰/۸۳۳۹
	۲/۱۰	۰/۷۴۸	۰/۷۵۱۴
	۳/۱۰	۰/۶۵۴	۰/۶۶۸۳
	۵/۱۰	۰/۵۵۳	۰/۵۷۴۱
	۸/۱۰	۰/۴۵۳	۰/۴۹۳۱
	۱۰/۱۰	۰/۴۲۴	۰/۴۶۹۲

\* حل تفاضل محدود از [۱۳]

جدول (۸) مقایسه بین زمان لازم برای حصول نتایج

جدول نتایج مربوطه	روش حل	زمان اجرا	نوع باتاقان
۷ و ۶،۵	FDM	۰/۸۰ s	کشویی
۷ و ۶،۵	GDQ	۰/۵۵ s	با کفشک شیب ثابت

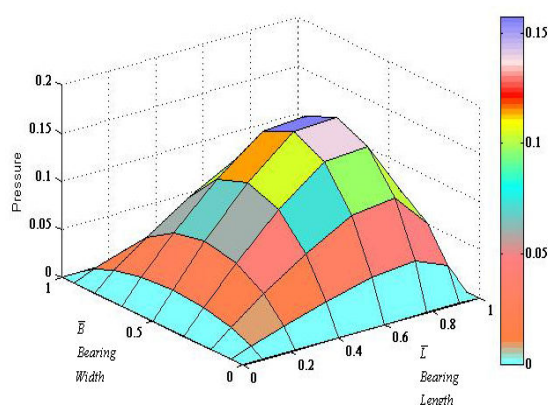
$\lambda$	$\frac{h_1}{h_2}$	$N_x \times N_y$	$Q_x$	
			FDM	GDQ
۰/۲۵	۱/۲	۸×۹	۰/۵۹۴	۰/۵۹۳۷۲
	۱/۵	۸×۹	۰/۷۳۴	۰/۷۳۴۲۹
	۲/۱۰	۸×۹	۰/۹۶۸	۰/۹۷۰۳۰
	۳/۱۰	۸×۹	۱/۴۳۳	۱/۴۶۵۲۰
	۵/۱۰	۱۴×۹	۲/۳۶۳	۲/۳۶۴۹۰
	۸/۱۰	۱۸×۹	۳/۷۵۸	۳/۷۶۷۲۷
۱۰/۱۰	۲۰×۹	۴/۶۸۷	۴/۷۱۲۳۱	
۰/۵۰	۱/۲	۸×۹	۰/۵۸۷	۰/۵۸۶۱۹
	۱/۵	۸×۹	۰/۷۱۵	۰/۷۱۴۰۹
	۲/۱۰	۸×۹	۰/۹۲۶	۰/۹۲۶۲۴
	۳/۱۰	۸×۹	۱/۳۴۳	۱/۳۷۱۱۸
	۵/۱۰	۱۴×۹	۲/۱۶۹	۲/۱۶۰۸۰
	۸/۱۰	۱۸×۹	۳/۴۰۲	۳/۳۸۵۱۳
۱۰/۱۰	۲۰×۹	۴/۲۲۲	۴/۲۰۷۷۶	
۱/۱۰	۱/۲	۸×۹	۰/۵۷۴	۰/۵۷۳۴۳
	۱/۵	۸×۹	۰/۶۷۹	۰/۶۷۸۲۸
	۲/۱۰	۸×۹	۰/۸۴۷	۰/۸۴۳۳۴
	۳/۱۰	۸×۹	۱/۱۶۳	۱/۱۷۱۹۲
	۵/۱۰	۱۴×۹	۱/۷۶۴	۱/۶۶۸۵۹
	۸/۱۰	۱۸×۹	۲/۶۳۵	۲/۳۴۳۰۰
۱۰/۱۰	۲۰×۹	۳/۲۰۸	۳/۱۳۱۴۹	
۲/۱۰	۱/۲	۸×۹	۰/۵۶۱	۰/۵۶۰۵۵
	۱/۵	۸×۹	۰/۶۴۳	۰/۶۴۱۲۲
	۲/۱۰	۸×۹	۰/۷۶۵	۰/۷۵۴۴۱
	۳/۱۰	۸×۹	۰/۹۷۵	۰/۹۴۴۳۴
	۵/۱۰	۱۴×۹	۱/۳۳۹	۱/۳۰۷۴۰
	۸/۱۰	۱۸×۹	۱/۸۳۷	۱/۵۹۸۵۴
۱۰/۱۰	۲۰×۹	۲/۱۵۷	۱/۹۲۱۴۵	

(ب)

\* حل تفاضل محدود ارائه شده در جداول (الف) و (ب) از [۱۳]

GDQ نشان داده شده است. برای دستیابی به این پروفیل فشاری در روش GDQ از شبکه‌ای با ابعاد  $8 \times 9$  استفاده شده است در حالی که برای حصول به حالت مشابه از روش FDM، نیازمند شبکه‌ای با ابعاد بزرگتر خواهیم بود.

۳- از نظر سادگی جملات ریاضی بیان کننده روشهای حل عددی مختلف، روش GDQ نسبت به سایر روشها برتری بیشتری دارد. همچنین به علت مجزا بودن نقاط روی دامنه مسئله از یکدیگر، این روش نسبت به سایر روشهای عددی که در آنها می‌بایست بررسی نقاط را به صورت همزمان انجام داد، برنامه نویسی ساده‌تری را نیاز دارد. برتری محاسباتی این روش به این علت است که در این حالت ماتریسهای ضرایب وزنی محاسبه شده، تنها تابعی از محل قرارگیری نقاط نمونه روی دامنه مسئله هستند.



شکل (۳) پروفیل فشاری حاصل از روش GDQ

$$h_1/h_2 = 2/0.4, L/B = 1/0$$

## ۵- نتیجه گیری

بررسی انجام شده نشان می‌دهد که روش درونیابی مشتق تعمیم یافته را می‌توان به عنوان روشی مناسب در حوزه تحلیل مسائل روانکاری یاتاقانهای کشویی برشمرد. نتایج حاصل از این روش در مقایسه با حل دقیق و نیز سایر روندهای حل عددی موجود از تطابق بسیار خوبی برخوردار است. پارامترهایی چون سرعت، دقت و سادگی که از ویژگیهای این روش به حساب می‌آیند، می‌توانند روش GDQ را به عنوان روش جایگزین مناسبی در حوزه مسائل روانکاری مطرح کنند.

برای بیان مزایای استفاده از روش درونیابی مشتق تعمیم یافته برای تحلیل مسائلی از این قبیل نسبت به سایر روشهای عددی نیازمند مقایسه بین نتایج به دست آمده هستیم. با توجه به معادله رینولدز برای استخراج نتایج از برنامه نویسی با نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. برنامه نهایی نیز بر روی رایانه‌ای با مشخصات CPU 2,4GHz و RAM 512Mb اجرا شده است.

برای انجام محاسبات در هر دو راستای  $x$  و  $y$  از توابع چندجمله‌ای استفاده شده است. نقاط نمونه روی دامنه مسئله نیز با توجه به صفرهای جابه‌جا شده چند جمله‌ای چپیشف انتخاب شده‌اند.

نتایج حاصل شده به صورت زیر دسته‌بندی می‌شود:

۱- نتایج ارائه شده در جداول (۱) تا (۴) بیانگر همگرایی سریع روش GDQ به حل دقیق با انتخاب تعداد نقاط نمونه کمتر نسبت به سایر روشهای حل عددی می‌باشد. این جداول کارایی روش GDQ را در حل مسئله مورد بررسی در حالت یک بعدی نشان می‌دهند.

۲- کارایی روش درونیابی مشتق تعمیم یافته به نحو آشکارتری در نتایج حاصل برای تحلیل یاتاقان مزبور در حالت دو بعدی آشکار می‌شود. این نتایج نشان دهنده تطابق بسیار خوبی بین روش GDQ و FDM در دستیابی به نتایج است و نکته قابل تأمل در اینجا، رسیدن به نتایج با استفاده از تعداد نقاط نمونه و زمان کمتر در روش GDQ نسبت به روش FDM است. در جداول (۵) تا (۷)، نتایج حاصل از دو روش و در جدول (۸)، زمان حصول این نتایج برای دو روش با یکدیگر مقایسه شده است. در بررسی مسائل دو بعدی توجه به توانایی روش درونیابی مشتق تعمیم یافته در دستیابی به پروفیل فشاری دقیق با استفاده از تعداد اندکی از نقاط گرهی بسیار حائز اهمیت می‌باشد. برای دستیابی به پروفیل فشاری مشابه از سایر روشهای حل عددی نیاز به شبکه‌هایی با ابعاد گسترده‌تر بر روی دامنه مسئله است، که این امر سبب افزایش زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات خواهد شد. در شکل (۳)، نمونه‌ای از پروفیل فشاری به دست آمده از حل مسئله با روش



- [2] Raimondi A A., A numerical solution for the gas lubricated full journal bearing of finite length, *ASLE Trans*, Vol.4, 1961, pp.131-155
- [3] Reddi M M., Finite Element Solution for Incompressible Lubrication Problem, *ASME J. Lubrication Technology*, Vol. 91, 1969, pp. 524-533
- [4] Kato T. and Hori Y., A Fast Method for Calculating Dynamic Coefficients of a Finite Width Journal Bearing With Quasi Reynolds Boundary Condition, *ASME J. Tribology*, Vol.110, 1988, pp.387-393
- [5] Sharma R.K. and Pandey R.K., 2008, Influence of surface profile on slider bearing performance, *In. J. Surface Science and Engineering*, Vol. 2, No. 34, pp. 265 – 280.
- [6] Bellman R. and Casti J., 1971, Differential quadrature and long-term integration, *J. Math Anal Appl* 34, pp.235-238
- [7] Mingle J., The method of Differential Quadrature for transient non-linear diffusion, *J. Math Anal Appl* , Vol.60, 1977, pp.559-569
- [8] Bert CW., Jang SK., Striz AG., Two New Approximate Methods for Analyzing Free Vibration of Structural Components, *AIAA J.26*, 1988, , pp.612-618
- [9] Shu C., Richards B E., Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two-dimensional Incompressible Navier-stokes Equation, *Int. J. Numer Methods Fluids*, Vol. 15, 1992, pp.791-798
- [10] Malik M., Bert C W., Differential quadrature solution for steady-state incompressible and compressible lubrication problems, *J. Tribology*, Vol.116, 1994, pp.296-302
- [11] Zhang Q., Guo G., Winoto S H., *Analysis of Hydrodynamic Journal Bearing With GDQ Method*, Magnetic Recording Conference, TU06, 2002, pp.1-2
- [12] Shu C., Richards B E., Parallel Simulation of Incompressible Viscose Flows by Generalized Differential Quadrature, *Compute System in Eng.* Vol. 3, 1992,, pp.271-281
- [13] Constantinescu V.N., Sliding Bearing, New York: *Allerton Press*, 1985, Ch.2.

## فهرست علائم

پارامترهای بی بعد مسئله بدون علامت بار نمایش داده می شوند.

$\bar{B}$	پهنای یاتاقان کشویی، $m$
$\bar{h}$	ضخامت فیلم روانکار، $m$
$\bar{h}_1, \bar{h}_2$	ضخامت فیلم روانکار در ورودی و خروجی یاتاقان، $m$
$\bar{L}$	طول یاتاقان، $m$
$\bar{p}$	فشار فیلم روانکار نسبت به فشار هوای محیط، $N/m^2$
$S$	عدد سامرفلد
$\bar{U}$	سرعت خطی کشک در یاتاقان، $m/s$
$\bar{W}$	توانایی حمل بار توسط یاتاقان، $N$
$x_c$	مکان قرار گیری مرکز فشار
$\bar{q}_y$	آهننگ نشتی روانکار یاتاقان، $m^3/s$
$\bar{f}$	نیروی اصطکاک، $N$

$x, y$  محوره‌های مختصات در جهت لغزش کشک یاتاقان و عمود بر آن

## علائم یونانی

$\lambda = \frac{L}{B}$	نسبت طول به پهنای یاتاقان
$\mu$	ویسکوزیته مطلق روانکار، $\frac{N.s}{m^2}$

## پیوست (۱)

جدول (۹) پارامترهای بی بعد

پارامتر بدون بعد	یاتاقان کشویی، روانکاری تراکم ناپذیر
$h = h(x)$	$\bar{h}/\bar{h}_2$
$x$	$\bar{x}/\bar{B}$
$y$	$\bar{y}/\bar{L}$
$p$	$\bar{p}\bar{h}_2^3/(\mu\bar{U}\bar{B})$
$W$	$\bar{W}\bar{h}_2^3/(\mu\bar{U}\bar{L}\bar{B}^3)$
$S$	$\sqrt{W}$

## مراجع

- [1] Raimondi A A. and Boyd J., A solution for the finite journal bearing and its application to analysis and design, *ASLE Trans*, Vol.1, 1959, pp.159-209.