

خمش ورق گرافن قطاعی بروی پایه الاستیک وینکلر-پسترناک به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی بروش کانترووچ توسعه یافته

شهریار دستجردی^۱، مهرداد جبارزاده^{۲*}

* نویسنده مسئول: dastjerdi_shahriar@yahoo.com

چکیده

واژه‌های کلیدی

ورق گرافن قطاعی، مکانیک محیط‌های پیوسته غیرموضعی، روش کانترووچ توسعه یافته، پایه الاستیک وینکلر-پسترناک

در این تحقیق خمش صفحات قطاعی گرافن بر پایه الاستیک توسط تئوری مکانیک غیر موضعی ارینگن مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور معادلات تعادل حاکم بر ورق قطاعی گرافن بر حسب جابجائیها، با در نظر گرفتن روابط غیرموضعی تنش و تئوری مرتبه اول برشی و کرنش‌های خطی بدست آمده و با روش کانترووچ توسعه یافته حل شده است. در این روش دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی بدست آمده به دو دسته دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود که قابل حل بروشهای مختلف تحلیلی و عددی می‌باشد. حل کانترووچ توسعه یافته روشی با سرعت همگرایی بالا است که تنها پس از سه الی چهار مرحله تکرار همگرایی مورد انتظار بدست می‌آید. با توجه به اینکه تاکنون در این خصوص تحقیقی صورت نگرفته است نتایج با در نظر گرفتن ضریب غیرموضعی برابر با صفر با دیگر مقالات جهت اعتبار سنجی مقایسه شده است. در انتها اثر تغییرات ضریب غیرموضعی بر نتایج بر حسب تغییرات ضخامت، شرایط مرزی، مقدار سختی پایه الاستیک و اختلاف تحلیل الاستیسیته غیرموضعی و موضعی مورد بررسی قرار گرفته اند.

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

۱- مقدمه

ساختارهای نانو از زمان کشف آن‌ها به دلیل کاربرد وسیع و خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی منحصر بفرود خود، توجه بسیاری از محققین را در سراسر دنیا به خود جلب کرده است [۱]. این مواد به طور گسترده در نانو الکترونیک، نانودستگاه‌ها و نانوکامپوزیت‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲]. انواع گوناگونی از نانو ساختارهای کربن از قبیل فلورین‌ها [۳] نانولوله‌های کربنی [۴] و نانوحلقه‌ها [۵] وجود دارند که با شکل‌دهی ورقه‌های گرافن ایجاد می‌شوند. به همین دلیل، تحلیل صفحات گرافن موضوع اصلی مطالعه نانو مواد کربنی می‌باشد. صفحه گرافن دارای ضخامت به اندازه یک اتم کربن می‌باشد که در یک شبکه کریستالی شش وجهی کنار هم منظم گشته‌اند. این مواد خواص مکانیکی و فیزیکی منحصر بفرودی داشته که از آن جمله می‌توان به انعطاف پذیری بالا، استحکام زیاد در کشش، انبساط حرارتی کم، رسانایی گرمایی و الکتریکی بالا اشاره کرد، همچنین صفحات گرافن اغلب در کامپوزیت‌های پلیمری به عنوان تقویت کننده مورد استفاده قرار می‌گیرند [۶-۷].

امروزه تحقیقات بسیاری برای تحلیل رفتار مکانیکی ساختارهای نانو صورت گرفته است. علاوه بر روش‌های آزمایشگاهی از روش‌های مدل سازی مانند: مدل سازی اتمی، مدل سازی ترکیبی مکانیک محیط‌های پیوسته - اتمی و مدل سازی مکانیک محیط‌های پیوسته، برای بررسی رفتار مکانیکی نانو مواد استفاده می‌شود [۸]. از آنجایی که کنترل آزمایش‌ها در مقیاس نانو بسیار مشکل بوده و روش‌های شبیه سازی اتمی از نظر محاسباتی هزینه بر می‌باشند، از روش مکانیک محیط پیوسته به عنوان یک روش موثر، که فاقد مشکلات ذکر شده بوده و دارای فرمول بندی ساده تری می‌باشد، در تحلیل نانو ساختارها بسیار مورد استفاده قرار گرفته است [۹]. مدل سازی مکانیک محیط پیوسته نیز

شامل روش‌های مختلفی نظیر: تئوری تنش جفتی [۱۰]، تئوری الاستیسیته گرادین کرنشی اصلاح شده [۱۱]، تئوری تنش جفتی اصلاح شده [۱۲] و تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن [۱۳] است. از میان این روش‌ها تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن بیشتر از سایر روش‌ها برای بررسی رفتار مکانیکی ساختارهای نانو به کار گرفته شده است [۱۴]. بر اساس این تئوری تنش در یک نقطه در یک محیط الاستیک پیوسته، نه تنها به کرنش در آن نقطه، بلکه به تمامی کرنش‌ها در کل دامنه محیط پیوسته وابسته است. در واقع وقتی ابعاد ماده تا اندازه نانو کاهش پیدا می‌کند، دیگر از اثرات نیروهای درون اتمی و درون مولکولی بر روی ویژگی‌های دینامیکی و استاتیکی مواد نمی‌توان صرف نظر کرد. به همین دلیل تئوری‌های کلاسیک موضعی قادر به پیش بینی رفتار مکانیکی ساختارهای نانو نمی‌باشند [۱۴]. در سال ۱۹۶۲ هانس پیتر بوهم [۱۵] یک ورق کربن تک لایه با شبکه لانه زنبوری را با عنوان گرافن توصیف کرد. گرافیت از روی هم قرار گرفتن صفحات گرافن ایجاد می‌شود. همچنین نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۱ توسط سامیو ایچیمیا [۴]، در آزمایشگاه ان ای سی در تسوکوبا ژاپن کشف شد. تحقیقات بسیاری بر روی تحلیل صفحات گرافن انجام گرفته است که در منابع موجود می‌باشد. در سال ۲۰۰۵ بهفر و نقدآبادی [۱۶]، تحلیل ارتعاشات صفحات گرافن چند لایه در محیط الاستیک با استفاده از تئوری غیرموضعی کلاسیک صفحات و با در نظر گرفتن صفحه گرافن به صورت یک صفحه ارتوتروپیک را ارائه کرده و تغییرات فرکانس‌های طبیعی را نسبت به تغییر طول‌های مختلف صفحات گرافن محاسبه کردند. کیتی پورنچای و دیگران [۱۷]، در سال ۲۰۰۵ مدل پیوسته غیرموضعی برای

³ Couple Stress Theory

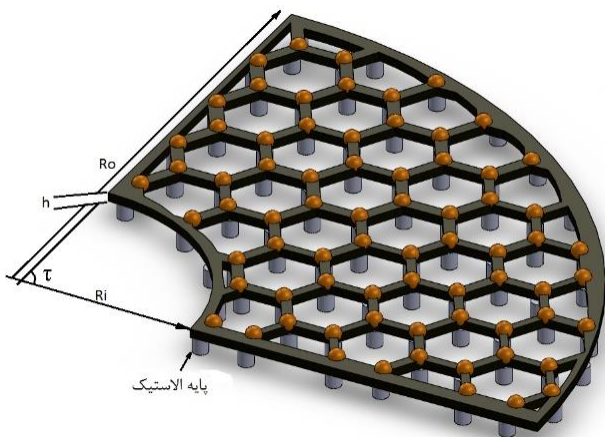
⁴ Modified Strain Gradient Elasticity

⁵ Eringen Nonlocal Elasticity Theory

صفحه گرافن و تعداد گره‌ها را بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار داده و نشان دادند نتایج بدست آمده، در تطابق با نتایج موجود در مراجع است. در این تحقیق با استفاده از تئوری مکانیک غیر موضعی، روابط حاکم بر خمش ورق قطاع گرافن استخراج گردیده، سپس با بهره گرفتن از روش کانتروویچ توسعه یافته روابط بدست آمده حل شده است. نتایج برای شرایط گوناگون تکیه گاهی و بارگذاری و سختی پایه الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- روابط حاکم

یک صفحه نازک قطاعی گرافن طبق شکل (۱) با شعاع داخلی $r_1 = r_i$ و شعاع خارجی $r_2 = r_o$ و ضخامت h ، $\theta_1 = 0$ ، $\theta_2 = \tau$ را در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل مرتبه اول برشی، میدان جابجایی بصورت روابط (۱) الی (۳) خواهد بود:



شکل (۱) ورق قطاعی بر پایه الاستیک

$$U(r, \theta, z) = u(r, \theta) + z\psi_1(r, \theta) \quad (1)$$

$$V(r, \theta, z) = v(r, \theta) + z\psi_2(r, \theta) \quad (2)$$

$$W(r, \theta, z) = w(r, \theta) \quad (3)$$

u و v و w مولفه‌های جابجایی صفحه میانی در جهت r ، θ و z و نیز ψ_1 و ψ_2 مولفه‌های چرخش حول محور میانی می-

ارتعاشات صفحات گرافن چندلایه با تکیه گاه‌های ساده در نظر گرفته و فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مود را بدست آوردند. آنها نشان دادند نیروهای واندوالس تاثیر مشخصی بر روی فرکانس و شکل‌های مود ارتعاشی صفحات گرافن دارند. لیو و همکاران [۱۸]، صفحه گرافن را به صورت یک ماده ایزوتروپیک در مدل پیوسته خود در نظر گرفته و ارتعاشات صفحات گرافن چند لایه بر روی پایه الاستیک را بررسی کرده و تاثیر نیروهای واندروالز بر روی فرکانس و شکل‌های مود را بدست آوردند. دان و وانگ [۱۹]، خمش یک صفحه گرافن دایره‌ای را با استفاده از مدل مکانیک پیوسته غیرموضعی و تئوری کلاسیک صفحات به صورت خطی مورد بررسی قرار داده و نشان دادند میزان خیز صفحه گرافن در این روش بیشتر از خیز در مدل پیوسته موضعی می‌باشد. پرادهان و فادیکار [۲۰]، تاثیر ضریب غیرموضعی در تحلیل ارتعاشی صفحات گرافن چند لایه را مورد بررسی قرار داده و ضمن حل معادلات تعادل به روش ناویر، اهمیت استفاده از ضریب غیر موضعی را در معادلات مدل محیط پیوسته بر دقت نتایج مورد بررسی و تاکید قرار دادند. شن و همکارانش [۲۱]، ارتعاشات غیرخطی صفحه گرافن تک لایه را با در نظر گرفتن اثر حرارتی و با استفاده از تئوری غیرموضعی کلاسیک صفحات ارائه کرده و نتایج را با تحقیقات موجود مقایسه کردند. جمعه زاده و سعیدی [۲۲]، ارتعاشات صفحات گرافن با تغییر شکل‌های بزرگ را ارائه کرده و اثر تعداد لایه‌ها، ضرایب هندسی و ضریب غیرموضعی را بر روی رفتار ارتعاشی صفحه بررسی کرده و نشان دادند نتایج بدست آمده در تطابق با نتایج تحلیل ارتعاش خطی می‌باشد. محمدی و همکاران [۲۳]، در سال ۲۰۱۳ ارتعاشات آزاد صفحه گرافن دایره‌ای را با استفاده از مدل مکانیک پیوسته غیرموضعی و تئوری کلاسیک صفحات ارائه دادند. آنها اثرات ضریب غیرموضعی، شعاع

$$N_r^{NL} - \mu \left(\nabla^2 N_r^{NL} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial N_{r\theta}^{NL}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (N_r^{NL} - N_\theta^{NL}) \right) = N_r^L \quad (11)$$

$$N_\theta^{NL} - \mu \left(\nabla^2 N_\theta^{NL} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial N_{r\theta}^{NL}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (N_r^{NL} - N_\theta^{NL}) \right) = N_\theta^L \quad (12)$$

$$N_{r\theta}^{NL} - \mu \left(\nabla^2 N_{r\theta}^{NL} - \frac{4}{r^2} N_{r\theta}^{NL} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_r^{NL} - N_\theta^{NL}) \right) = N_{r\theta}^L \quad (13)$$

$$Q_r^{NL} - \mu \left(\nabla^2 Q_r^{NL} - \frac{1}{r^2} Q_r^{NL} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial Q_\theta^{NL}}{\partial \theta} \right) = Q_r^L \quad (14)$$

$$Q_\theta^{NL} - \mu \left(\nabla^2 Q_\theta^{NL} - \frac{1}{r^2} Q_\theta^{NL} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial Q_r^{NL}}{\partial \theta} \right) = Q_\theta^L \quad (15)$$

$$M_r^{NL} - \mu \left(\nabla^2 M_r^{NL} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial M_{r\theta}^{NL}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (M_r^{NL} - M_\theta^{NL}) \right) = M_r^L \quad (16)$$

$$M_\theta^{NL} - \mu \left(\nabla^2 M_\theta^{NL} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial M_{r\theta}^{NL}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (M_r^{NL} - M_\theta^{NL}) \right) = M_\theta^L \quad (17)$$

$$M_{r\theta}^{NL} - \mu \left(\nabla^2 M_{r\theta}^{NL} - \frac{4}{r^2} M_{r\theta}^{NL} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (M_r^{NL} - M_\theta^{NL}) \right) = M_{r\theta}^L \quad (18)$$

در روابط (۱۱) الی (۱۸) ∇^2 عملگر لاپلاس در مختصات قطبی می‌باشد که بصورت رابطه (۱۹) نوشته می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (19)$$

به کمک اصل حداقل انرژی پتانسیل خواهیم داشت:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta \Omega = 0 \quad (20)$$

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij}^{NL} \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (21)$$

$$\delta \Omega = - \int_{r_i}^{r_o} \int_0^{2\pi} (q - k_w w + k_p \nabla^2 w) \delta w r dr d\theta \quad (22)$$

باشند. مولفه‌های کرنش صفحه بصورت روابط (۴) الی (۸) خواهد بود:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \quad (4)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) + \frac{z}{r} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \psi_1 \right) \quad (5)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \psi_1 \quad (6)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_2 \quad (7)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + z \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - v - z \psi_2 \right) + \frac{\partial v}{\partial r} + z \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \quad (8)$$

با توجه به تئوری الاستیسیته غیر موضعی، تنش در نقطه مرجع x تابعی از میدان کرنش در هر نقطه x از صفحه خواهد بود. تانسور تنش غیرموضعی در نقطه x بصورت رابطه (۹) بیان می‌شود:

$$\sigma = \int_V K (|X' - X|, \tau) \sigma'(X') dX' \quad (9)$$

ارینگن [۱۳] نشان داد که انتگرال فوق می‌تواند به صورت رابطه دیفرانسیلی (۱۰) بیان شود:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma^{NL} = \sigma^L = C : \varepsilon \quad (10)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

که $\mu = (e_0 a_0)^2$ ضریب غیرموضعی، σ^L تنش موضعی و σ^{NL} تنش غیرموضعی است.

روابط مربوط به نیروها و گشتاورهای منتجه با توجه به رابطه (۱۰) در دستگاه مختصات قطبی بصورت روابط (۱۱) الی

(۱۸) خواهند بود:

$$M_{\theta}^L = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\nu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \psi_1 \right) \right) \quad (36)$$

$$M_{r\theta}^L = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{\psi_2}{r} \right) \quad (37)$$

κ_s در روابط فوق ضریب تصحیح برشی و برابر 5/6 است.

با جایگذاری روابط (۳۰) الی (۳۷) در روابط (۲۳) الی (۲۷)

پنج معادله تعادل بر حسب جابجایی‌ها بصورت روابط (۳۸)

الی (۴۲) معرفی می‌شوند:

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left[r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right] + \right. \quad (38)$$

$$\left. \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \right] = 0$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left[\frac{(1-\nu)}{2} \left(r \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) + \right. \quad (39)$$

$$\left. + \left[\nu \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right] \right] = 0$$

$$\frac{\kappa_s Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) \right) \quad (40)$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + (1-\mu \nabla^2) (q - k_w w + k_p \nabla^2 w) = 0$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left[r \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \frac{\psi_1}{r} + \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial \theta} \right] + \right. \quad (41)$$

$$\left. \frac{(1-\nu)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right] \right] - \frac{\kappa_s Eh}{2(1+\nu)} \left[r \psi_1 + \right.$$

$$\left. r \frac{\partial w}{\partial r} \right] = 0$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{(1-\nu)}{2} \left[r \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} - \frac{\psi_2}{r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} \right] + \right. \quad (42)$$

$$\left. \left[\nu \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta^2} \right] \right] -$$

$$\frac{\kappa_s^2 Eh}{2(1+\nu)} \left[r \psi_2 + \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] = 0$$

برای بی‌بعد کردن معادلات حاکم از روابط زیر استفاده می‌-

شود:

در رابطه (۲۲) k_{wv} سختی وینکلر و k_p سختی پسترناک پایه

الاستیک می‌باشند. معادلات تعادل با در نظر گرفتن روابط

(۱۱) الی (۱۸) در روابط (۲۰) الی (۲۲) بر حسب تنش‌های

موضعی بدست آمده که بصورت روابط (۲۳) الی (۲۷)

خواهند بود:

$$N_{r,r}^L + \frac{1}{r} (N_{r\theta,\theta}^L + N_r^L - N_{\theta}^L) = 0 \quad (23)$$

$$N_{r\theta,r}^L + \frac{1}{r} (N_{\theta,\theta}^L + 2N_{r\theta}^L) = 0 \quad (24)$$

$$Q_{r,r}^L + \frac{1}{r} (Q_{\theta,\theta}^L + Q_r^L) + (1-\mu \nabla^2) \quad (25)$$

$$(q - k_w w + k_p \nabla^2 w) = 0$$

$$M_{r,r}^L + \frac{1}{r} (M_{r\theta,\theta}^L + M_r^L - M_{\theta}^L) - Q_r^L = 0 \quad (26)$$

$$M_{r\theta,r}^L + \frac{1}{r} (M_{\theta,\theta}^L + 2M_{r\theta}^L) - Q_{\theta}^L = 0 \quad (27)$$

در روابط (۲۳) الی (۲۷) نیروها و گشتاورهای منتجه

بصورت روابط (۲۸) الی (۳۷) بیان می‌شوند:

$$(N_r^L, N_{r\theta}^L, N_{\theta}^L, Q_r^L, Q_{\theta}^L) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r^L, \sigma_{r\theta}^L, \sigma_{\theta}^L, \kappa_s \sigma_{rz}^L, \kappa_s \sigma_{\theta z}^L) dz \quad (28)$$

$$(M_r^L, M_{r\theta}^L, M_{\theta}^L) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r^L, \sigma_{r\theta}^L, \sigma_{\theta}^L) z dz \quad (29)$$

$$N_r^L = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) \quad (30)$$

$$N_{\theta}^L = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (31)$$

$$N_{r\theta}^L = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (32)$$

$$Q_r^L = \frac{\kappa_s Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \psi_1 \right) \quad (33)$$

$$Q_{\theta}^L = \frac{\kappa_s Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \psi_2 \right) \quad (34)$$

$$M_r^L = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \psi_1 \right) \right) \quad (35)$$

۳- روش حل

۳-۱- روش حل کانتروویچ توسعه یافته

این روش برای اولین بار توسط آرنولد کر [۲۴] برای حل نیمه تحلیلی مسایل دو بعدی مکانیک جامدات ارائه شد. در این روش معادلات حاکم که از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند و معمولاً فاقد جواب تحلیلی هستند به دو دسته معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شوند. این روش، بطور گسترده ای برای حل مسائل مکانیک جامدات از جمله مسائل مقدار ویژه، کماتش، خمش، و ارتعاشات آزاد ورقها، مورد استفاده قرار گرفته است.

در این روش تابع دو متغیره به حاصلضرب دو تابع تک متغیره طبق رابطه (۴۸) تبدیل می شود:

$$f(r, \theta) = f_1(r) \times g_1(\theta) \quad (48)$$

با این تعریف توابع جابجایی و چرخش بصورت روابط (۴۱) الی (۴۵) نوشته می شوند:

$$u(r, \theta) = f_1(r) \times g_1(\theta) \quad (49)$$

$$v(r, \theta) = f_2(r) \times g_2(\theta) \quad (50)$$

$$w(r, \theta) = f_3(r) \times g_3(\theta) \quad (51)$$

$$\psi_1(r, \theta) = f_4(r) \times g_4(\theta) \quad (52)$$

$$\psi_2(r, \theta) = f_5(r) \times g_5(\theta) \quad (53)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادلات تعادل، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی می شوند. با انتخاب اولیه دلخواه توابع $g_i, i=1...5$ ، معادلات تعادل تنها تابعی از $f_i, i=1...5$ خواهند بود. حال با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و در نظر گرفتن شرایط مرزی، توابع f_i بدست خواهند آمد. بطور مثال شرایط مرزی برای ورق قطاعی با شرایط گیردار در مرزها بصورت روابط (۵۴) و (۵۵) است:

$$r^* = \frac{r}{r_o}; z^* = \frac{z}{h}; u^* = \frac{u}{h}; v^* = \frac{v}{h}; w^* = \frac{w}{r_o}$$

$$\eta = \frac{h}{r_o}; \mu^* = \frac{\mu}{r_o^2}; q^* = \frac{q}{E}; k_w^* = \frac{k_w r_o}{E}; k_p^* = \frac{k_p}{Eh}$$

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

بنابراین معادلات تعادل (۳۸) الی (۴۲) بصورت روابط (۴۳) الی (۴۷) در حالت بی بعد بازنویسی خواهند شد:

$$\left[r^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} - \frac{u^*}{r^*} + \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} + v \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^* \partial \theta} \right] + \frac{1-v}{2} \left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^* \partial \theta} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (43)$$

$$\frac{(1-v)}{2} \left[r^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} - \frac{v^*}{r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^* \partial \theta} \right] + \left[v \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^* \partial \theta} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\kappa_s}{2(1+v)} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}} + r \frac{\partial \psi_1^*}{\partial r^*} + \psi_1^* + \frac{1}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi_2^*}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\eta} (1 - \mu^* \nabla^{*2}) (q^* - k_w^* w^* + k_p^* \nabla^2 w^*) = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\eta^2}{12(1-v^2)} \left[r^* \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial r^{*2}} - \frac{\psi_1^*}{r^*} + \frac{\partial \psi_1^*}{\partial r^*} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi_2^*}{\partial \theta} + v \frac{\partial^2 \psi_2^*}{\partial r^* \partial \theta} \right] + \frac{(1-v)}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi_2^*}{\partial r^* \partial \theta} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi_2^*}{\partial \theta} \right] - \frac{\kappa_s}{2(1+v)} \left[r^* \psi_1^* + r^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} \right] = 0 \quad (46)$$

$$\frac{\eta^2}{12(1-v^2)} \left[\frac{(1-v)}{2} \left[r^* \frac{\partial^2 \psi_2^*}{\partial r^{*2}} - \frac{\psi_2^*}{r^*} + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial r^* \partial \theta} \right] + \left[v \frac{\partial^2 \psi_1^*}{\partial r^* \partial \theta} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi_1^*}{\partial \theta} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 \psi_2^*}{\partial \theta^2} \right] - \frac{\kappa_s}{2(1+v)} \left[r^* \psi_2^* + \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right] \right] = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r_i, \theta_j) = \sum_{k=1}^M A_{jk}^{(1)\theta} f(r_i, \theta_k) \quad j=1, \dots, M \quad (57)$$

در رابطه (۵۶) و (۵۷) $A_{ij}^{(1)\theta}$ و $A_{ij}^{(1)r}$ ضرایب وزنی مشتق مرتبه اول در جهت r و θ بوده و N و M تعداد کل گره ها در راستای شعاع و زاویه قطاع از ۰ الی τ می-باشد. ضرایب وزنی برای مشتق مرتبه اول بصورت روابط (۵۸) و (۵۹) بدست می آیند:

$$A_{ij}^{(1)r} = \frac{\pi(r_i)}{(r_i - r_j)\pi(r_j)} \quad (58)$$

$$\pi(r_i) = \prod_{j=1}^N (r_i - r_j) \quad i \neq j$$

$$A_{ii}^{(1)r} = -\sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)r} \quad i \neq k$$

$$A_{ij}^{(1)\theta} = \frac{\pi(\theta_i)}{(\theta_i - \theta_j)\pi(\theta_j)} \quad (59)$$

$$\pi(\theta_i) = \prod_{j=1}^M (\theta_i - \theta_j) \quad i \neq j$$

$$A_{ii}^{(1)\theta} = -\sum_{k=1}^M A_{ik}^{(1)\theta} \quad i \neq k$$

مشتقات مراتب بالاتر بصورت روابط (۶۰) الی (۶۲) خواهند بود:

$$\frac{\partial^{(n)} f(r_i, \theta_j)}{\partial r^{(n)}} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(n)r} f(r_k, \theta_j) \quad (60)$$

$$\frac{\partial^{(n)} f(r_i, \theta_j)}{\partial \theta^{(n)}} = \sum_{k=1}^M A_{jk}^{(n)\theta} f(r_i, \theta_k) \quad (61)$$

$$\frac{\partial^{(m+n)} f(r_i, \theta_j)}{\partial r^{(m)} \partial \theta^{(n)}} = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M A_{ik}^{(m)r} A_{js}^{(n)\theta} f(r_k, \theta_s) \quad (62)$$

ضرایب وزنی برای مشتقات مرتبه دو و بالاتر بصورت روابط (۶۳) و (۶۴) معرفی می شوند:

$$A_{ij}^{(n)r} = n \left[A_{ij}^{1r} A_{ii}^{(n-1)r} - \frac{A_{ij}^{(n-1)r}}{(r_i - r_j)} \right] \quad i \neq j \quad (63)$$

$$f_i = 0, i = 1 \dots 5 \quad r = r_i, r_o \quad (54)$$

$$g_i = 0, i = 1 \dots 5 \quad \theta = \tau_1, \tau_2 \quad (55)$$

با توجه به روش حل معادلات بر اساس باقیمانده وزنی، هر معادله از معادلات تعادل باید در تابع مناسب g_i ضرب و در بازه ۰ تا τ نسبت به θ انتگرال گرفته شود. توابع حدس زده شده اولیه g_i الزامی برای ارضا شرایط مرزی ندارد و این خود از مزیت های روش کانتروویچ توسعه یافته است. در این صورت معادلات تعادل که معادلات دیفرانسیل جزئی هستند به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب r تبدیل شده که با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۵۴) قابل حل می باشند. با بدست آمدن توابع f_i و جایگذاری آنها در معادلات تعادل مراحل توضیح داده شده تکرار شده و معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب θ بدست می آید که با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل، توابع g_i محاسبه شده و اولین حلقه تکرار به پایان می رسد. مزیت عمده حل کانتروویچ توسعه یافته، سرعت همگرایی بالای این روش می باشد که با حل مسائل مختلف، تنها پس از ۳ الی ۴ مرحله تکرار جواب قابل قبول بدست می آید. در بسیاری از مسائل برای معادلات دیفرانسیل معمولی بدست آمده حل تحلیلی وجود دارد که خود نقطه قوت این روش است.

۳-۲- روش حل مربعات دیفرانسیلی (DQM)

دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی بدست آمده بر اساس روشهای مختلف قابل حل می باشد که در این تحقیق از روش حل عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته به دلیل دقت بالای آن، استفاده شده است. در این روش مشتق متغیر ها در یک راستا از مقدار تابع در تمامی گره ها تاثیر می پذیرد.

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_i, \theta_j) = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)r} f(r_k, \theta_j) \quad i = 1, \dots, N \quad (56)$$

ابتدا بازای شرط مرزی گیردار و بار گسترده متغیر بی بعد
 $q^* = (10^5 / E) r^{*2} e^{\theta}$ با مرجع [۲۵] مقایسه شده که در
 جدول (۱) مشاهده می گردد:

جدول (۱) مقایسه خیز

$w_{max} \times 10^{-4}$		
تحقیق حاضر	ABAQUS [۲۵]	مرجع [۲۵]
۱/۵۶۳۴	۱/۵۷۷۷	۱/۵۷۵۴

حال بازای بار گسترده یکنواخت بی بعد $q^* = 5 \times 10^4 / E$
 و مشخصات زیر نتایج با چند مرجع دیگر مقایسه شده است
 که در جدول (۲) قابل مشاهده است:

$$\frac{r_i}{r_o} = 0.5, E = 207 \times 10^9 \text{ Pa}, \tau = \frac{\pi}{3}$$

جدول (۲) مقایسه خیز با مراجع

$w^* = \left(\frac{D}{qr_o^3}\right) w \times 10^{-5}$					$\frac{r_i}{r_o}$
تحقیق حاضر	[۲۶]	[۲۷]	[۲۸]	[۲۹]	ANSYS
۱/۴۲	۱/۴۲	۱/۷۴	۱/۵۵	۱/۵۴	۱/۴۲

اکنون صفحه با شرایط زیر در نظر گرفته می شود [۲۹]:

$$E = 1.06 \times 10^{12} \text{ Pa}; q^* = \frac{10^5}{E}; \frac{r_i}{r_o} = 0.1; \theta = \frac{\pi}{2}$$

با فرض شرایط تکیه گاهی گیردار در لبه ها و حدس اولیه

$$e_0 a_0 = 0 \text{ و } g_i = 1 - \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^3, i = 1 \dots 5 \text{ (۳)}$$

برای خیز ورق برای $r = 5 \text{ nm}, \theta = \frac{\pi}{4}$ می باشد.

همانطور که مشاهده می شود از مرحله سوم تکرار به بعد
 جوابها با سرعت زیادی همگرا شده و پاسخ قابل قبول با
 دقت بالا حاصل خواهد شد.

با در نظر گرفتن ضریب غیرموضعی برابر با
 $e_0 a_0 = 1, 1.5, 2 \text{ nm}$ حل معادلات را تکرار می شود.

$$A_{ii}^{(n)r} = - \sum_{j=1, \neq i}^N A_{ij}^{(n)r} \quad i, j = 1 \dots N$$

$$A_{ij}^{(n)\theta} = n \left[A_{ij}^{1\theta} A_{ii}^{(n-1)\theta} - \frac{A_{ij}^{(n-1)\theta}}{(\theta_i - \theta_j)} \right] \quad i \neq j \quad (۶۴)$$

$$A_{ii}^{(n)\theta} = - \sum_{j=1, \neq i}^M A_{ij}^{(n)\theta} \quad i, j = 1 \dots M$$

در این تحقیق از توزیع نقاط شبکه بر اساس نقاط
 چیشف- گاوس- لوباتو استفاده شده است که بصورت
 رابطه (۶۵) و (۶۶) هستند. انتخاب این شبکه بندی در مقایسه
 با توزیع نقاط با فواصل یکسان، منجر به دقت بالاتر جوابها
 خواهد شد.

$$r_i = \frac{(R_i + R_o)}{2} - \cos\left(\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\pi\right) \left(\frac{R_o - R_i}{2}\right), i = 1 \dots N \quad (۶۵)$$

$$\theta_i = \frac{(\tau_1 + \tau_2)}{2} - \cos\left(\left(\frac{i-1}{M-1}\right)\pi\right) \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}\right), i = 1 \dots M \quad (۶۶)$$

۴- شرایط مرزی

۱- تکیه گاه ساده

$$u = v = w = \psi_2 = M_r = 0 \quad r = r_i, r_o$$

$$u = v = w = \psi_1 = M_\theta = 0 \quad \theta = 0, \tau$$

۲- تکیه گاه گیردار

$$u = v = w = \psi_2 = \psi_1 = 0 \quad r = r_i, r_o$$

$$u = v = w = \psi_2 = \psi_1 = 0 \quad \theta = 0, \tau$$

۳- لبه آزاد

$$N_r = N_{r\theta} = Q_r = M_r = M_{r\theta} = 0 \quad r = r_i, r_o$$

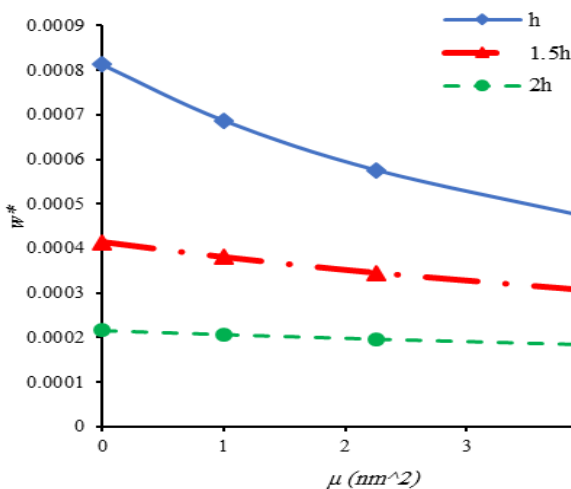
$$N_r = N_{r\theta} = Q_\theta = M_\theta = M_{r\theta} = 0 \quad \theta = 0, \tau$$

۵- نتایج عددی

جهت بررسی صحت نتایج، از آنجایی که تحقیقی در زمینه
 خمش قطاع گرافن در مراجع موجود نمی باشد نتایج بی بعد
 بازای $\mu = 0$ با مراجع [۲۵-۲۹] مقایسه شده است.

شکل (۲) همچنین تاثیر تغییر شرط مرزی به حالت آزاد را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود با تغییر شرط تکیه‌گاهی مفصلی به آزاد اثر افزایش ضریب غیرموضعی بر نتایج کمتر می‌گردد و همین اتفاق برای شرط مرزی گیردار هم می‌افتد اما تاثیر این تغییر بر شرط مرزی مفصلی بیشتر است. شکل‌های (۳) و (۴) تاثیر تغییرات ضریب غیرموضعی را در هنگام تغییر ضخامت در حالت شرایط مرزی گیردار و مفصلی نشان می‌دهد.

از شکل (۳) مشاهده می‌شود که با افزایش ضخامت در حالت شرط مرزی گیردار تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به شکل (۴) برای شرط مرزی مفصلی نیز نتیجه قبل حاصل می‌گردد با این تفاوت که تاثیر اثرات ضریب غیرموضعی با افزایش ضریب غیرموضعی در حالت شرایط تکیه‌گاهی مفصلی بیشتر است.



شکل (۳) تغییرات خیز بی‌بعد بر حسب ضخامت و ضریب غیر موضعی تکیه‌گاه گیردار

جدول (۳) همگرایی مراحل تکرار حل کانتروویچ

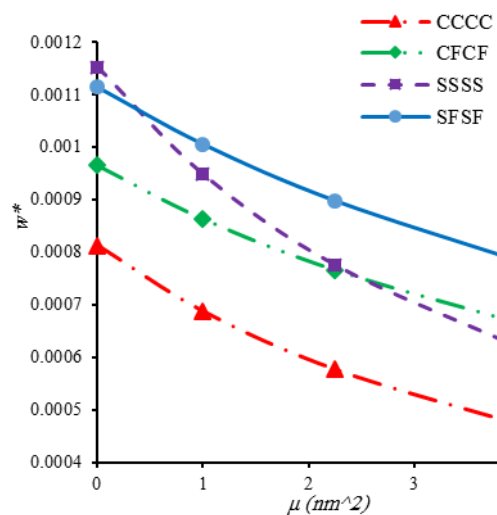
$$\mu = (e_0 a_0)^2 = 0$$

مرحله تکرار (Iteration)	خیز بیشینه
۱	$w \times 10^{-4} \text{ nm}$ ۰٫۸۹۵۲۰۹۴۵۳۰
۲	۱٫۷۵۲۲۲۵۹۸۰
۳	۱٫۷۷۲۷۶۸۴۶۴
۴	۱٫۷۷۳۳۳۸۳۲۳
۵	۱٫۷۷۳۳۴۰۲۹۱

نتایج برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف در شکل (۲) قابل مشاهده است. مشخصات ورق بصورت زیر می‌باشد.

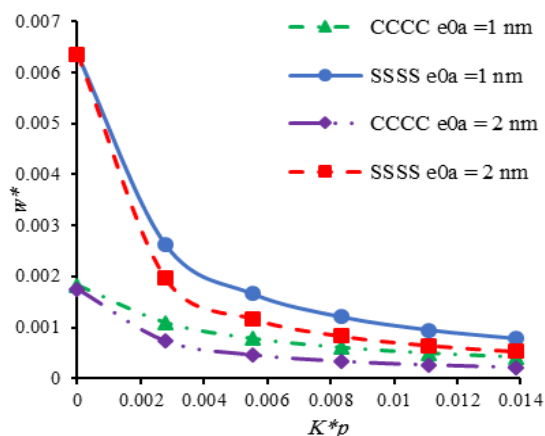
$$E = 1.06 \times 10^{12} \text{ Pa}; k_{**} = 0.009434; q^* = 10^7 / E$$

$$r_i / r_o = 0.1; \theta = \pi / 2; \nu = 0.19; h = 0.34 \text{ nm}$$



شکل (۲) تغییرات خیز بی‌بعد بر حسب ضریب غیر موضعی

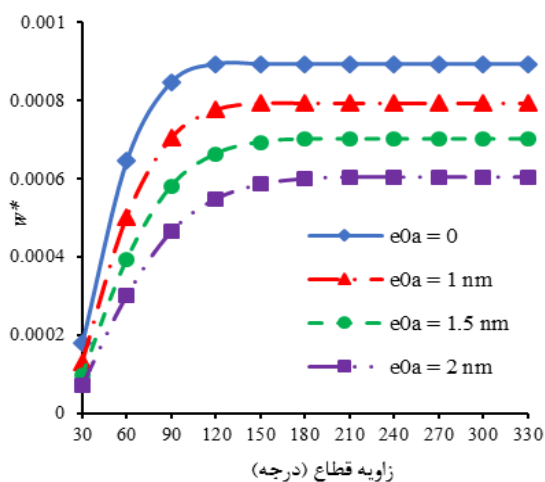
با توجه به نمودار (۲) ملاحظه می‌شود خیز در حالت شرایط تکیه‌گاهی گیردار کمتر از شرایط مرزی مفصلی می‌باشد و با افزایش ضریب غیرموضعی خیز کاهش می‌یابد. همچنین تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی بر نتایج در حالت مفصلی بیشتر از گیردار است. شرایطی در نظر گرفته می‌شود که مرزها در $r = r_i, r_o$ گیردار و در $\theta = 0, \tau$ بصورت آزاد باشد (CF CF) و نیز شرایطی که مرزها در $r = r_i, r_o$ مفصلی و در $\theta = 0, \tau$ آزاد باشد (SF SF).



شکل (۶) تغییرات خیز بی بعد بر حسب سختی الاستیک پسترناک

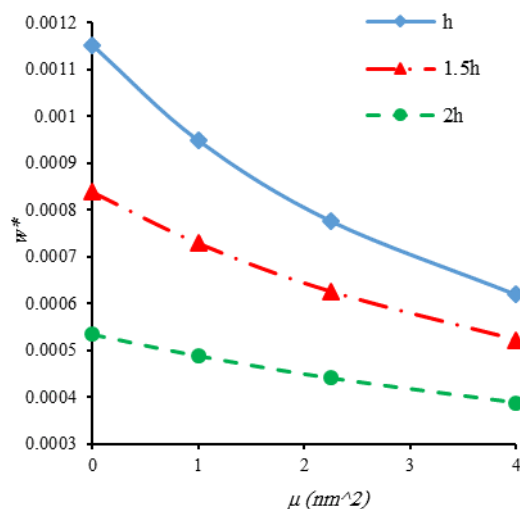
مطابق شکل (۶) مشابه این تغییرات در مورد سختی پسترناک نیز دیده می شود با این تفاوت که با افزایش سختی پسترناک خیز با شیب تقریباً یکنواخت کاهش می یابد. در کل مقدار سختی پایه الاستیک وینکلر تاثیر بیشتری بر کاهش خیز دارد.

تغییرات خیز بیشینه بر حسب افزایش زاویه قطاع در شکل (۷) مشاهده می شود. با افزایش زاویه قطاع، در ابتدا خیز با شیب زیاد تغییر کرده و در ادامه افزایش زاویه قطاع شیب به سمت صفر میل می کند. تغییرات فوق در هنگامی که ضریب غیرموضعی افزایش می یابد کاهش یافته و خیز ورق کاهش می یابد.



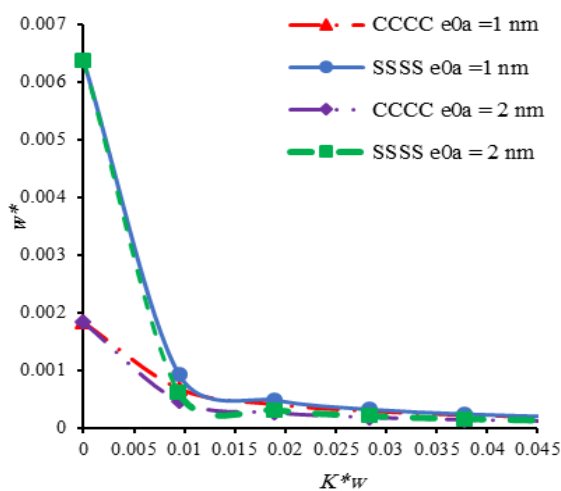
شکل (۷) تغییرات خیز بی بعد بر حسب زوایای مختلف قطاع و ضرایب

غیرموضعی مختلف در شرایط تکیه گاهی SSSS



شکل (۴) تغییرات خیز بی بعد بر حسب ضخامت و ضریب غیر موضعی تکیه گاه مفصلی

دو شکل (۵) و (۶) تغییرات خیز بی بعد بیشینه را بر اساس تغییرات سختی پایه الاستیک وینکلر و پسترناک، در شرایط مرزی مختلف را نشان می دهد. با توجه به شکل (۵) افزایش سختی وینکلر تا یک میزان مشخص موجب کاهش خیز شده و افزایش بیشتر از آن تاثیر ناچیزی در کاهش خیز دارد.



شکل (۵) تغییرات خیز بی بعد بر حسب سختی الاستیک وینکلر

۶- نتیجه گیری

در این تحقیق خمش ورق قطاعی نانو گرافن بر پایه الاستیک به روش کانترویچ توسعه یافته مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه تاکنون در زمینه تحلیل خمش نانو ورقهای قطاعی تحقیقی انجام نشده است، جهت بررسی دقت نتایج، با صفر قرار دادن ضریب غیرموضعی نتایج با مقاله‌های دیگر مقایسه شد. اثر تغییرات ضریب غیرموضعی بر نتایج بر حسب تغییرات ضخامت، شرایط مرزی، سختی پایه الاستیک و نسبت تحلیل غیرموضعی به موضعی مورد بررسی قرار گرفته که نتایج زیر را می‌توان بیان نمود:

- با هر نوع شرط مرزی با افزایش ضریب غیر موضعی، خیز کاهش می‌یابد.
- با افزایش سختی پایه الاستیک تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی در کاهش خیز، افزایش می‌یابد.
- تاثیر افزایش ضریب غیر موضعی بر نتایج در حالت تکیه گاهی مفصلی بیشتر از گیردار می‌باشد. به صورت کلی با افزایش انعطاف پذیری صفحه، تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی بیشتر می‌شود.
- با افزایش ضخامت صفحه، تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی بر خیز در هر نوع شرط مرزی کاهش می‌یابد.
- با افزایش زاویه قطاع تحلیل الاستیسیته غیرموضعی و موضعی کاهش می‌یابد.

شرایط در نظر گرفته شده برای ورق در شکل‌های (۷) و (۸) عبارت است از:

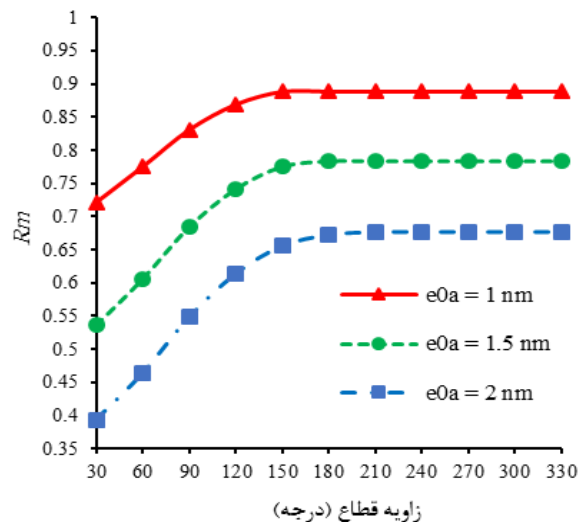
$$E = 1.06 \times 10^{12} \text{ Pa}; q^* = 10^7 / E; r_i / r_o = 0.1 \\ \nu = 0.19; h = 0.34 \text{ nm}; k_w = 1.13 \text{ GPa/nm} \\ k_p = 1.13 \text{ Pa.m}$$

برای مقایسه نتایج تئوری الاستیسیته موضعی و غیرموضعی، پارامتر R_m بصورت رابطه (۶۷) معرفی می‌شود [۳۰]:

$$R_m = \frac{W_{Nonlocal}}{W_{Local}} \quad (67)$$

شکل (۸) تغییرات نسبت خیز غیرموضعی به موضعی را بر حسب تغییرات زاویه قطاع نشان می‌دهد.

ملاحظه می‌شود در زوایای کم اختلاف دو تئوری موضعی و غیرموضعی بیشتر می‌باشد. با افزایش زاویه قطاع اختلاف دو تئوری الاستیسیته موضعی و غیرموضعی کاهش یافته و از اهمیت استفاده تئوری غیرموضعی کاسته می‌شود. افزایش پارامتر R_m با افزایش زاویه، شیب تندی داشته و در یک محدوده زاویه خاص، شیب کاهش یافته و به صفر میل می‌کند. این شرایط در زاویه ۱۲۰ الی ۱۵۰ درجه اتفاق می‌افتد.



شکل (۸) تغییرات پارامتر R_m بر حسب زاویه‌های مختلف در شرایط تکیه گاهی SSSS

- Computational materials science*, Vol. 47, 2009, pp. 268-274.
- [15] Boehm H.P., Clauss A., Fischer G. O and Hofmann U., Das Adsorptions Verhalten Sehr Dünner Kohlenstoff-folien, *Zeitschrift für anorganische und allgemeine chemie*, Vol. 316, 2004, pp. 119-127.
- [16] Behfar K., Naghdabadi R., Nanoscale Vibrational Analysis of Multi-Layered Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium, *Composites science and technology*, Vol. 65, 2005, pp. 1159-1164.
- [17] Kitipornchai S., He X. Q., Liew K. M., Continuum Model for the Vibration of Multilayered Graphene Sheets, *Physical Review B*, Vol. 72, 2005, pp. 1-7.
- [18] Liew K.M., He X.Q., Kitipornchai S., Predicting Nanovibration of Multi-Layered Graphene Sheets Embedded in an Elastic Matrix, *Acta materialia*, Vol. 54, 2006, pp. 4229-4236.
- [19] Duan W.H., Wang C.M., Exact Solutions for Axisymmetric Bending of Micro/Nanoscale Circular Plates Based on Nonlocal Plate Theory, *Nanotechnology*, Vol. 18, 2007, pp. 1-5.
- [20] Pradhan S.C., Phadikar J.K., Small Scale Effect on Vibration of Embedded Multilayered Graphene Sheets Based on Nonlocal Continuum Models, *Physics letters A*, Vol. 373, 2009, pp. 1062-1069.
- [21] Shen H., Shen L., Zhang, Chen-Li., Nonlocal Plate Model for Nonlinear Vibration of Single Layer Graphene Sheets in Thermal Environments, *Computational materials science*, Vol. 48, 2010, pp. 680-685.
- [22] Jomehzadeh E., Saidi A. R., A Study on Large Amplitude Vibration of Multilayered Graphene Sheets, *Computational materials science*, Vol. 50, 2011, pp. 1043-1051.
- [23] Mohammadi M., Ghayour M., Farajpour A., Free Transverse Vibration Analysis of Circular and Annular Graphene Sheets with Various Boundary Conditions Using the Nonlocal Continuum Plate Model, *Composites*, Vol. 45, 2013, pp. 32-42.
- [24] Kerr A.D., *An extension of the Kantorovich method*, Q Appl Math, 26, 1968, pp. 219.
- [25] Fereidoon A., Mohyeddin A., Sheikhi M., Rahmani H., Bending analysis of functionally graded annular sector plates by extended Kantorovich method, *Composites Part B*, Vol. 43, No.5, 2012, pp. 2172-2179.
- مراجع:
- [1] Gibson R.F., Ayorinde E.O., Wen Y.F., Vibrations of Carbon Nanotubes and their Composites: A Review, *Composites science and technology*, Vol. 67, 2007, pp. 1-28.
- [2] Geim A.K., Graphene: Status and Prospects, *Science*, Vol. 324, 2009, pp. 1530-1534.
- [3] Kroto H.W., Heath J.R., O'Brien S.C, Curl R.F., Buckminster Fullerene, *Nature*, Vol. 318, 1985, pp. 162-163.
- [4] Iijima S., Helical Microtubules of Graphitic Carbon, *Nature*, Vol. 8, 1991, pp. 354-356.
- [5] Kong X.Y., Ding Y., Single-Crystal Nano-rings Formed by Epitaxial Self-Coiling of Polar Nano-belts, *Science*, Vol. 303, 2004, pp. 1348-1351.
- [6] Chunyu Li, Atomistic Simulations on Multilayer Graphene Reinforced Epoxy Composites, *Composites: Part A*, Vol. 43, 2012, pp. 1293-1300.
- [7] Kuilla T., Bhadra S., Yao D., Kimc N.M., Bose S., Leea J.H., Recent Advances in Graphene Based Polymer Composites, *Progress in polymer science*, Vol. 35, 2010, pp. 1350-1375.
- [8] Arash B., Wang Q., A Review on the Application of Nonlocal Elastic Models in Modeling of Carbon Nanotubes and Graphene, *Computational materials science*, Vol. 51, 2012, pp. 303-313.
- [9] Pradhan S.C., Kumar A., Vibration Analysis of Orthotropic Graphene Sheets Using Nonlocal Elasticity Theory and Differential Quadrature Method, *Composite structures*, Vol. 93, 2004, pp. 774-779.
- [10] Haftbaradaran H, Shodja H., Elliptic Inhomogeneities and Inclusions in Anti-Plane Couple Stress Elasticity with Application to Nano-Composites, *International journal of solids and structures*, Vol. 46, 2009, pp. 2978-2987.
- [11] Fleck N.A, Hutchinson J.W., Strain Gradient Plasticity, *Advance applied mechanics*, Vol. 33, 1997, pp.295-361.
- [12] Yang F, Chong A. C. M, Lam D.C.C, Tong P., Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity, *International journal of solid structs*, Vol. 39, 2002, pp. 2731-2743.
- [13] Eringen A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, New york, Springer-Verlag, 2002.
- [14] Pradhan S.C., Murmu T., Small Scale Effect on the Buckling of Single-Layered Graphene Sheets under Biaxial Compression via Nonlocal Continuum Mechanics,

- [26] Aghdam M.M., Mohammadi M., Erfanian V., Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method, *Thin Walled Structures*, Vol. 45, No. 12, 2007, pp. 983-990.
- [27] Salehi M., Turvey G.J., Elastic large deflection response of annular sector plates—a comparison of DR finite difference, finite element and other numerical solutions. *composite structures*, Vol. 40, No. 5, 1991, pp. 1267–78.
- [28] Harik I.E., Analytical solution to orthotropic sector, *Journal of Engineering Mechanics*, 110, 1984, pp. 554-68.
- [29] Cheung M.S., Chan M.Y.T., Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method, *composite structures*, Vol. 14, No.1-2, 1981, pp. 79-88.
- [30] M. E. Golmakani, J. RezaTalab, Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoscale plates in an elastic matrix based on nonlocal continuum mechanics, *composite structures*, Vol. 111, 2014, pp. 85-97.