فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

تحلیل خمش صفحات ساندویچی کامپوزیتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک

مصطفی یزدانی[۱]، اعظم قاسمی[۲*]، محمد هدایتی[۳]

* ایمیل نویسنده مسئول: a_ghassemi@pmc.iaun.ac.ir

چکیده

هدف از این تحقیق، بکارگیری روش‌های مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و هارمونیک به‌عنوان روش‌های دقیق و سریع در تحلیل خمش صفحات ساندویچی می‌باشد. تحلیل خمش صفحات ساندویچی تحت شرایط مرزی و بارگذاری‌های جانبی مختلف و با استفاده از دو روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و مربعات دیفرانسیلی هارمونیک بر اساس دو تئوری کلاسیک و مرتبه اول برشی، انجام شده است. تأثیر ناهمسانگردی لایه‌ها، زاویه‌ی قرارگیری الیاف، نسبت ضخامت به طول صفحه، نسبت ضخامت هسته به پوسته بر مسئله خمش مورد مطالعه قرار گرفت. برای حل عددی از نرم‌افزار متلب استفاده شده است. مقایسه نتایج عددی بدست آمده ازدو روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و هارمونیک با نتایج موجود در تحقیقات گذشته نشان از دقت، توانایی و نرخ همگرایی خوب این دو روش دارد. سرعت بالا و دقت بسیارخوب این روش‌ها، اهمیت استفاده از آن‌ها را به ویژه در حل مسائل پیچیده نشان می‌دهد. با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته نشان داده شد که با افزایش نسبت ناهمسانگردی پوسته‌ها مقدار تغییر مکان ماکزیمم جانبی صفحه کاهش می‌یابد. در بررسی زاویه قرارگیری الیاف مشخص شد که مقدار تغییر مکان بدست آمده، به زاویه‌ی قرارگیری الیاف بستگی دارد. نسبت ضخامت هسته به پوسته مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که با افزایش نسبت ضخامت هسته به پوسته، تغییر مکان ماکزیمم صفحه کاهش می‌یابد. همچنین بارگذاری‌های مختلفی استفاده شده است که نشان می‌دهد استفاده از این روش محدود به نوع بارگذاری خاصی نیست.

واژه‌های کلیدی

صفحات ساندویچی، خمش ورق، روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته، روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، پردیس تحصیلات تکمیلی علوم و تحقیقات
۲- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف‌آباد.
۳- کارشناس ارشد ، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

۱- مقدمه

استفاده گسترده و روز افزون از مواد مرکب در چند دهه اخیر پیش‌بینی‌های قبلی را در مورد این مواد به عنوان رقیبی جدی برای مواد همگن[1] محقق کرد. خواص مناسب، که بطور عمده در نسبت‌های بالای مقاومت به وزن، سفتی به وزن و نیز خواص ویژه و ممتاز محیطی همچون مقاومت در مقابل خوردگی و دماهای بسیار بالا خلاصه می‌شوند از جمله علل محبوبیت این مواد است. صفحات ساندویچی به‌علت دارا بودن خواص عالی مانند نسبت استحکام به وزن بالا، قابلیت خوب جذب انرژی و صدا و هزینه غالباً پایین تولید، بازده ساختاری بالایی دارند [۱]. این صفحات در مواردی که پایین بودن وزن اهمیت زیادی دارد مانند خدمات شهری، صنایع هوافضا و صنایع دریایی و چند زمینه دیگر بکار برده می‌شوند. ساختارهای ساندویچی در حقیقت از دو بخش اصلی تشکیل شده است: نخست هسته میانی که سبک و معمولاً حجیم است و دیگری پوسته‌های واقع در دو طرف هسته که قوی و معمولاً نازک هستند. معمولاً هسته‌ی میانی از جنس فوم یا لانه زنبوری می‌باشد و پوسته‌های واقع در دو طرف هسته از مواد مرکب الیاف شیشه یا الیاف طبیعی، ساخته می‌شوند.

اولین بررسی‌های چشمگیر در مورد رفتار ورق‌ها در قرن ۱۸ انجام گرفته است، که توسط افرادی چون ناویر، کیرشهف و لوی ارائه شد [۲]. لاگرانژ و ناویر در سال ۱۸۲۰ معادله خیز جانبی ورق تحت اثر بار گسترده عمود بر میان صفحه را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند و یک رابطه مستقیم برای خیز صفحه بدست آوردند [۳]. موریس لوی یک روش تحلیلی مستقیم برای حل مسئله خمش صفحات مستطیلی همگن ارائه داد که به روش لوی معروف می‌باشد [۴]. در بررسی رفتار صفحات معمولاً با تئوری‌های مختلفی روبرو هستیم. اولین تئوری، تئوری کلاسیک لایه‌ها (CLPT) می‌باشد که تنها برای صفحات نازک مناسب است و اولین بار توسط تسای برای تعیین سختی مواد لایه لایه مورد استفاده قرار گرفت. وادوپس و اشتون روش انرژی ریتز را برای تعیین تغییر مکان استاتیکی، فرکانس و بار کمانشی استاتیکی صفحات لایه‌لایه تحت بار جانبی و فشار محوری ارائه دادند[۵]. وایتنی و پاگانو[۶]، برت و چن[۷] و ردی و چاؤ[۸] بر اساس روش‌های عددی و تحلیلی و با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول، تحلیل‌های استاتیکی، فرکانسی و کمانشی بر روی صفحات لایه لایه را ارائه دادند. نتایج تحلیلی و عددی حاصل از تحلیل کمانش، ارتعاشات آزاد و تنش صفحات مرکب و ساندویچی بر اساس تئوری تغییرشکل برشی درجه‌های بالاتر توسط کانت [۹]، پاندیا و کانت[۱۰-۱۴]، کانت و مانجوناتا [۱۵] ارائه شده است. سوآمیناتان و همکارانش [۱۶] تحلیل خمش صفحات ساندویچی را بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر و با استفاده از روش فوریه انجام داد.

روش مربعات دیفرانسیلی، یک تکنیک عددی می‌باشد که در سال‌های اخیر جایگزین روش‌های عددی مانند المان محدود و تفاضل محدود برای حل مسائل شرایط مرزی شده است. این روش توسط بلمن وکستی [۱۷] و بلمن و همکارانش [۱۸] به عنوان یک روش دقیق و با محاسبات ساده برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای غیرخطی با شرایط مرزی ارائه شد. برت و همکارانش [۱۹] اولین بار از روش مربعات دیفرانسیلی برای مطالعه رفتار دینامیک و استاتیک ساختارها استفاده کردند، سپس توسط برت و مالیک[۲۰] توسعه و گسترش یافت. چن و همکارانش [۲۱] یک روش ضرب ماتریسی برای ساده سازی محاسبات و بهبود همگرایی روش مربعات دیفرانسیلی در حل مسائل غیرخطی پیشنهاد کردند. چن و تاناکا [۲۲] از این روش برای حل مسائل مقدار

1 - Isotropic materials

اولیه در تخمین مشتق‌های نسبت به زمان استفاده کردند. برت و همکارانش[۲۳] از روش مربعات دیفرانسیلی برای اولین بار برای تحلیل کمانش صفحات کامپوزیت مستطیلی استفاده کردند و فهمیدند که جواب‌های بدست آمده از این روش خیلی به نحوه انتخاب نقاط گره‌ای حساس می‌باشد، به همین دلیل گره‌بندی غیریکنواخت [۲۴] و روش‌های جدید برای بکارگیری شرایط مرزی پیشنهاد شد [۲۵ تا ۲۸]. در روش مربعات دیفرانسیلی برای بدست آوردن ضرایب وزنی نیاز به حل یک دستگاه معادلات جبری می‌باشد، از اینرو زمانی که تعداد نقاط گره‌ای زیاد باشد، جواب‌های دقیقی نخواهیم داشت [۲۹]. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته توسط شو ریچارد [۳۰] برای برطرف کردن این مشکل و ساده‌سازی محاسبات ضرایب وزنی پیشنهاد شد و توسط شو و وانگ [۳۱] با موفقیت برای حل مسائل با شرایط مرزی ترکیبی با نقاط گره‌ای زیاد استفاده شد. روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته هیچ محدودیتی در ارتباط با نحوه توزیع و تعداد نقاط گره‌ای ندارد و نیازی به حل دستگاه معادلات جبری برای بدست آوردن ضرایب وزنی نمی‌باشد، به همین دلیل از این روش برای حل بسیاری از مسائل مهندسی مکانیک استفاده شده است[۳۲ تا ۳۵]. در روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک که توسط استریز و همکارانش [۳۶] پیشنهاد شد، از توابع هارمونیک برای بدست‌آوردن ضرایب وزنی استفاده می‌شود. از این روش نیز برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی با شرایط مرزی دلخواه استفاده شده است [۳۷ تا ۴۰]. هدف این تحقیق مشاهده کاربرد روش‌های مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و هارمونیک به‌عنوان یک روش عددی کارا برای تحلیل خمش صفحات ساندویچی تحت بارگذاری جانبی می‌باشد. معادلات تعادل و شرایط مرزی حاکم بر مسئله خمش صفحات ساندویچی به شکل روش مربعات دیفرانسیلی تبدیل شد و در نتیجه جواب‌های دقیقی در مقایسه با تحقیقات گذشته حاصل شد. همچنین تاثیر پارامترهایی چون جهت‌گیری رشته‌ای، نسبت ضخامت به طول صفحه، نسبت ضخامت هسته به پوسته بر جابجایی جانبی، مورد مطالعه قرار گرفت.

۲- معادلات دیفرانسیل حاکم بر خمش

شکل کلی مدل جابجایی یک صفحه مستطیلی براساس دو تئوری کلاسیک و تغییرشکل برشی درجه اول به صورت زیر بیان می‌شود[۴۱]:

$$\begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x,y) + z(r\alpha(x,y) + k\dfrac{\partial w}{\partial x}) \\ v_0(x,y) + z(r\beta(x,y) + k\dfrac{\partial w}{\partial y}) \\ w(x,y) \end{bmatrix} \quad (۱)$$

که:

در تئوری کلاسیک: $k = -1, \mathrm{r} = 0$ و در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول: $k = 0, \mathrm{r} = 1$ می‌باشند.

u_0 ، v_0 و w جابجایی صفحه میانی ($z = 0$) در راستای محورهای x، y و z و β,α چرخش عمود بر صفحه میانی حول محورهای x و y هستند.

روابط تنش-کرنش در حالت کلی به شکل زیر قابل بیان است [۴۳-۴۲]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{21} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} \\ \overline{Q}_{31} & \overline{Q}_{32} & \overline{Q}_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x_0} - z\kappa_x \\ \varepsilon_{y_0} - z\kappa_y \\ \gamma_{xy_0} - z\kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} r\beta + \dfrac{\partial w}{\partial y}(k+1) \\ r\alpha + \dfrac{\partial w}{\partial x}(k+1) \end{Bmatrix} \quad (۲)$$

که κ_i و ε_{i_0} به‌ترتیب چرخش حول محور i و کرنش صفحه میانی در راستای i و $\left[\overline{Q}_{ij}\right]_k$ ماتریس صلبیت کاهش یافته لایه k ام می‌باشد.

بیان ماتریسی مولفه‌های انحنا و کرنش صفحه میانی در روابط (۳)و (۴) نشان داده شده است:

$$\begin{bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\\ \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}+\dfrac{\partial\beta}{\partial x})\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\ \varepsilon_{y_0}\\ \varepsilon_{xy_0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y}\\ \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_0}{\partial y}+\dfrac{\partial v_0}{\partial x})\end{bmatrix} \qquad (۴)$$

نیروهای محوری درون صفحه‌ای N_x، N_y و N_{xy} گشتاورهای خمشی M_X، M_y و M_{xy} و نیروهای برشی عرضی Q_x و Q_y از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\\ Q_y\\ Q_x\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\end{bmatrix}dz \qquad (۱-۵)$$

$$\begin{bmatrix}M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}zdz \qquad (۲-۵)$$

با جایگذاری معادلات (۲) در معادلات فوق به روابط زیر برای نیروی محوری درون صفحه‌ای، نیروی برشی جانبی و گشتاور خمشی خواهیم رسید.

$$\begin{bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\\ M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{16}&B_{11}&B_{12}&B_{16}\\ A_{12}&A_{22}&A_{26}&B_{12}&B_{22}&B_{26}\\ A_{16}&A_{26}&A_{66}&B_{16}&B_{26}&B_{66}\\ B_{11}&B_{12}&B_{16}&D_{11}&D_{12}&D_{16}\\ B_{12}&B_{22}&B_{26}&D_{12}&D_{22}&D_{26}\\ B_{16}&B_{26}&B_{66}&D_{16}&D_{26}&D_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{x_0}\\ \varepsilon_{y_0}\\ 2\varepsilon_{xy_0}\\ \kappa_x\\ \kappa_y\\ 2\kappa_{xy}\end{bmatrix} \qquad (۱-۶)$$

$$\begin{Bmatrix}Q_y\\ Q_x\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{s44}&A_{s45}\\ A_{s45}&A_{s55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}r\beta+\dfrac{\partial w}{\partial y}(k+1)\\ r\alpha+\dfrac{\partial w}{\partial x}(k+1)\end{Bmatrix} \qquad (۲-۶)$$

یک صفحه مستطیلی با طول a در راستای x و عرض b در راستای y و ضخامت h در راستای z را در نظر می‌گیریم. روابط تعادل حاکم بر خمش این صفحه برای دو تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول به شکل زیر می باشد[۴۱].

تئوری کلاسیک [۴۴]:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+P(x,y)=0 \qquad (۷)$$

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[۴۵]:

$$A_{44}(\beta+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2})+A_{55}(\alpha+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})+A_{45}(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})+P(x,y)=0 \qquad (۸)$$

$$D_{11}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+2D_{16}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}+(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}+D_{16}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+D_{26}\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}+A_{55}(\alpha+\frac{\partial w}{\partial x})-A_{45}(\beta+\frac{\partial w}{\partial y})=0 \qquad (۹)$$

$$D_{66}\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+2D_{26}\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y}+(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}+D_{16}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+D_{26}\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}-A_{44}(\beta+\frac{\partial w}{\partial y})-A_{45}(\alpha+\frac{\partial w}{\partial x})=0 \qquad (۱۰)$$

۳- شرایط مرزی

دو نوع تکیه‌گاه ساده و گیردار در لبه‌های ورق استفاده شده است که شرایط مرزی این دو نوع تکیه‌گاه بر اساس دو تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول در جدول (۱) آورده شده است.

٤- روش‌های مربعات دیفرانسیلی هارمونیک و تعمیم‌یافته

با در نظر گرفتن تابع تک بعدی $u(x)$، تقریب روش مربعات دیفرانسیلی برای به مشتق اول u در i امین نقطه گره‌ای صورت زیر می باشد[۴۶]:

$$u_x(x_i)=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^{(1)}u(x_j) \qquad for\;\; i=1,2,.....n \qquad (۱۱)$$

که $u_x(x_i)$ مشتق اول $u(x)$ نسبت به x در x_i و n تعداد نقاط گره‌ای است. $c_{ij}^{(1)}$ ضرایب وزنی برای مشتق اول می باشد. در روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته ضرایب وزنی بر اساس روش میان‌یابی لاگرانژ پایه‌ریزی می‌شوند و تابع تست چند جمله‌ای $g(x)$ در نقطه x_i بر اساس رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود[۴۶].

$$g_i(x)=\frac{M(x)}{(x-x_i)M^{(1)}(x_i)} \qquad i=1,2,.....n \qquad (۱۲)$$

که:

$$M(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-x_j) \qquad (۱۳)$$

$$M^{(1)}(x_i)=\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n}(x_i-x_j) \qquad (۱۴)$$

در نتیجه، عناصر غیر قطری ماتریس ضرایب وزنی مشتق اول از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c_{ij}^{(1)}=\frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i-x_j)M^{(1)}(x_j)} \qquad for \quad i\neq j, \qquad (۱۵)$$

عناصر غیر قطری ماتریس ضرایب وزنی برای مشتق‌های بالاتر را می توان از رابطه برگشتی زیر بدست آورد:

$$c_{ij}^{(m)}=m\left(c_{ii}^{(m-1)}c_{ij}^{(1)}-\frac{c_{ij}^{(m-1)}}{x_i-x_j}\right) \quad , \qquad (۱۶)$$

$$i\neq j \quad m=2,....n-1 \quad i,\, j=1,2....n$$

عناصر قطری ماتریس ضرایب وزنی نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$c_{ii}^{(m)}=-\sum_{j=1,\, j\neq 1}^{n}c_{ij}^{(m)} \quad i=1,2,....n, \quad m=1,2,...n-1 \qquad (۱۷)$$

برخلاف روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته که از توابع چندجمله‌ای استفاده می‌شود، در روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک از توابع تست هارمونیک برای تخمین ماتریس ضرایب وزنی بهره گرفته می‌شود و ضرایب وزنی مشتق اول در این روش با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید[۴۷].

جدول(۱): شرایط مرزی صفحه برای لبه‌های ساده و گیردار بر اساس تئوری‌های کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول

	تئوری کلاسیک		تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول	
	x= 0 , a	y= 0 , b	x= 0 , a	y= 0 , b
لبه‌ی ساده (S)	$w=0$ $M_x=0$	$w=0$ $M_y=0$	$w=0$ $M_x=0$ $\beta=0$	$w=0$ $M_y=0$ $\alpha=0$
لبه‌ی گیردار (C)	$w=0$ $\frac{\partial w}{\partial x}=0$	$w=0$ $\frac{\partial w}{\partial y}=0$	$w=0$ $\alpha=0$ $\beta=0$	$w=0$ $\alpha=0$ $\beta=0$

$$c_{ij}^{(1)}=\begin{cases}\dfrac{(\pi/2)P(x_i)}{P(x_j)\sin\left[(x_i-x_j)/2\right]\pi} & i\neq j\\ -\sum\limits_{j=1,\, j\neq 1}^{n}c_{ij}^{(1)} & i=j\end{cases} \quad i,\, j=1,2...n \qquad (۱۸)$$

که:

$$\mathrm{P(x_i)}=\prod_{\mathrm{j=1, j\neq i}}^{\mathrm{N}}\sin\left(\frac{\mathrm{x_i-x_j}}{2}\pi\right) \quad \mathrm{for} \quad \mathrm{j=1,2,.....,n} \qquad (۱۹)$$

همچنین ماتریس ضرایب وزنی برای مشتق دوم، سوم و چهارم به صورت زیر می‌باشد.

(۲۰)

$$\mathrm{c_{ij}^{(2)}=c_{ij}^{(1)}}\left[2\mathrm{c_{ii}^{(1)}}-\pi\cot\mathrm{n}\left(\frac{\mathrm{x_i-x_j}}{2}\right)\pi\right], \qquad \mathrm{i,\, j=1,2,......n}$$

$$\mathrm{c_{ij}^{(3)}}=\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{c_{ik}^{(1)}c_{kj}^{(2)}} \;\; ; \quad \mathrm{c_{ij}^{(4)}}=\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}\mathrm{c_{ik}^{(2)}c_{kj}^{(2)}} \qquad (۲۱)$$

در این تحقیق از سه روش برای شبکه‌بندی استفاده شده است.

۱) در روش وانگ نقاط گره‌ای با فواصل مساوی از هم انتخاب می‌شوند و معمولاً این روش کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\mathrm{x_i}=\frac{\mathrm{(i-1)}}{\mathrm{n-1}} \quad \mathrm{for\;\; i=1,2,..,n} \qquad (۲۲)$$

۲) در این روش از ریشه‌های چند جمله‌ای جانگ به عنوان نقاط گره‌ای استفاده می‌شود. نقاط گره‌ای در نزدیکی مرزها با فاصله کمتری از هم قرار می‌گیرند[۴۸] .

$$\begin{gathered}x_1=0\;\; ,x_2=\delta\;\; ,x_{n_x-1}=1-\delta\;\; ,x_{n_x}=1\\ x_i=\frac{(i-1)}{n-1} \qquad for\; i=3,4,......,n-2\end{gathered} \qquad (۲۳)$$

۳) شبکه‌بندی چبیشف-گوس-لوباتو[۲۸و۴۹]

$$x_i = \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2i-1}{n-1}\right)\pi\right] \quad \text{for } i=1,2,\ldots\ldots n \qquad (۲۴)$$

بازنویسی معادلات و شرایط مرزی به فرم مربعات دیفرانسیلی در پیوست آورده شده است.

۴- نتایج

در این بخش مثال‌هایی عددی از صفحات مرکب و ساندویچی برای تحلیل خمش ارائه شده است و نتایج به کمک یک برنامه کامپیوتری با نرم‌افزار متلب و بر اساس روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم‌یافته و هارمونیک بدست آمدند.

۴-۱- سرعت همگرایی

برای بررسی سرعت همگرایی و انتخاب بهترین شبکه‌بندی، تغییر مکان جانبی بدون بعد $(\overline{w}=100wh^3E_{22}/(p_0a^4))$ نقطه مرکزی(a/2,b/2) یک صفحه ساندویچی با خصوصیات هندسی و مکانیکی زیر بررسی خواهد شد.
خصوصیات پوسته‌ها (گرافیت اپکسی) و هسته در جدول (۲) ارائه شده است.

جدول (۲) خصوصیات پوسته‌ها و هسته‌ی انتخاب شده

کمیت	خصوصیات پوسته‌ها	خصوصیات هسته
E_{11}	19×10^6 psi $(131Gpa)$	1000 psi $(6.9\times10^{-3}Gpa)$
E_{22}	1.5×10^6 psi $(10.34Gpa)$	1000 psi $(6.9\times10^{-3}Gpa)$
E_{33}	1.5×10^6 psi $(10.34Gpa)$	1000 psi $(6.9\times10^{-3}Gpa)$
G_{12}	1×10^6 psi $(6.895Gpa)$	500 psi $(3.45\times10^{-3}Gpa)$
G_{13}	0.9×10^6 psi $(6.205Gpa)$	500 psi $(3.45\times10^{-3}Gpa)$
G_{23}	1×10^6 psi $(6.895Gpa)$	500 psi $(3.45\times10^{-3}Gpa)$
ν_{12}	0.22	0
ν_{13}	0.22	0
ν_{23}	0.49	0

همچنین $\frac{a}{h}=4$ و $\frac{t_c}{t_f}=4$ و بار اعمالی به صورت سینوسی $P(x,y)=p_0\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi y}{b})$ در نظر گرفته شده است.

آرایش زاویه قرارگیری الیاف در لایه‌ها نیز به صورت $(-30\ ,\ 30\ ,\ Core\ ,\ -30\ ,\ 30)$ می‌باشد.

نتایج مربوط به مطالعه همگرایی روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک برای شرط مرزی گیر دار(CCCC) در جدول (۳) آمده است . همانطور که از نتایج جدول مشخص می باشد سرعت همگرایی (چهار رقم اعشار) در هر دو روش برای شبکه ناهمگن شو وریچارد از دو شبکه دیگر سریعتر است و تقریباً با یک شبکه ۱۳*۱۳ همگرایی مورد نظر بدست می‌آید. با استفاده از این شبکه با تعداد گره‌های کم نتایج خوب و دقیقی نسبت به دو شبکه دیگر بدست می-آید. بدین ترتیب با توجه به سرعت همگرایی و دقت نتایج شبکه ناهمگن شو وریچارد در ادامه از این شبکه برای گره بندی صفحه در تحلیل خمش استفاده خواهد شد.

جدول(۳): مطالعه همگرایی روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک با استفاده از سه نوع شبکه با شرایط مرزی CCCC

روش شبکه بندی	تعداد گره ها	$\overline{w}$ GDQ FSDT	GDQ CLPT	HDQ FSDT	HDQ CLPT
شبکه یکنواخت	۵×۵	۲/۱۹۰۵	۰/۲۱۶۱	۲/۱۹۰۷	۰/۲۱۶۴
	۷×۷	۲/۲۲۳۸	۰/۲۶۱۳	۲/۲۲۳۹	۰/۲۶۱۴
	۹×۹	۲/۲۳۲۰	۰/۲۶۹۱	۲/۲۳۲۰	۰/۲۶۹۱
	۱۱×۱۱	۲/۲۲۷۸	۰/۲۶۹۹	۲/۲۲۷۸	۰/۲۶۹۹
	۱۳×۱۳	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱
	۱۵×۱۵	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱
شبکه جانگ	۵×۵	۲/۱۹۰۲	۰/۲۱۶۱	۲/۱۹۰۸	۰/۲۱۶۵
	۷×۷	۲/۲۱۸۰	۰/۲۶۱۳	۲/۲۱۸۱	۰/۲۶۱۴
	۹×۹	۲/۲۴۶۵	۰/۲۶۹۱	۲/۲۴۶۵	۰/۲۶۹۱
	۱۱×۱۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۶۹۹	۲/۲۲۶۴	۰/۲۶۹۹
	۱۳×۱۳	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱
	۱۵×۱۵	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱
شبکه شو وریچارد	۵×۵	۲/۱۹۰۲	۰/۲۱۶۱	۲/۱۹۰۵	۰/۲۱۶۴
	۷×۷	۲/۲۱۸۰	۰/۲۶۷۵	۲/۲۱۸۲	۰/۲۶۷۷
	۹×۹	۲/۲۴۶۵	۰/۲۶۹۵	۲/۲۴۶۵	۰/۲۶۹۵
	۱۱×۱۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱
	۱۳×۱۳	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱
	۱۵×۱۵	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱	۲/۲۲۶۴	۰/۲۷۰۱

۴-۲- اثر ناهمسانگردی پوسته‌ها

اثر ناهمسانگردی پوسته‌ها بر روی تغییر مکان بدون بعد نقطه مرکزی صفحه $(\overline{w}=100wh^3E_{22}/(p_0a^4))$ و تنش بدون بعد در نقطه مرکزی سطح بالایی و پایینی در راستای x $(\overline{\sigma}_x=\sigma_x h^2/(p_0a^2))$ برای سه نوع شرط مرزی ، ساده (SSSS) ، گیردار (CCCC) و ساده-گیردار (SCSC)مورد تحلیل و بررسی قرار داده شده است.

جدول(۴): مطالعه همگرایی اثر ناهمسانگردی پوسته ها بر روی تغییر مکان بدون بعد نقطه مرکزی صفحه $(\overline{w}=100wh^3E_{22}/(p_0a^4))$

شرایط مرزی	E1/E2	$\overline{w}$ هسته نوع اول		هسته نوع دوم	
		FSDT	CLPT	FSDT	CLPT
SSSS	۱	۵/۹۳۳۵	۵/۷۶۶۹	۲/۱۵۰۰	۲/۱۱۸۱
	۵	۵/۹۱۴۱	۳/۲۵۴۸	۱/۶۸۰۰	۱/۶۵۰۱
	۱۰	۲/۲۵۷۰	۲/۰۹۲۵	۱/۳۲۰۰	۱/۲۸۷۵
	۱۵	۱/۷۰۶۰	۱/۵۴۱۳	۱/۰۹۰۰	۱/۰۵۵۳
	۲۰	۱/۳۸۴۷	۱/۲۱۹۹	۰/۹۲۰۰	۰/۸۹۴۰
	۲۵	۱/۱۷۴۲	۱/۰۰۹۴	۰/۸۰۶۰	۰/۷۷۵۵
CCCC	۱	۲/۲۱۰۰	۲/۲۴۰۰	۰/۷۶۷۰	۰/۷۹۶۰
	۵	۱/۱۱۰۰	۰/۹۷۹۰	۰/۵۴۸۰	۰/۵۴۶۰
	۱۰	۷/۲۴۰۰	۰/۷۲۰۰	۰/۴۰۶۰	۰/۳۹۰۰
	۱۵	۵/۶۳۰۰	۴/۰۴۰	۰/۳۵۲۵	۰/۳۰۴۰
	۲۰	۴/۷۳۰۰	۳/۱۲۰۰	۰/۲۷۳۰	۰/۲۹۴۰
	۲۵	۴/۱۷۰۰	۲/۵۴۰۰	۰/۲۳۷۰	۰/۲۱۱۰
SCSC	۱	۳/۴۴۴۳	۳/۳۱۰۵	۳/۴۳۱۵	۳/۲۵۰۵
	۵	۱/۷۱۲۲	۱/۶۱۱۲	۰/۸۴۴۰	۰/۸۰۵۰
	۱۰	۱/۲۵۳۱	۰/۸۹۵۰	۰/۶۳۱۰	۰/۵۹۲۰
	۱۵	۰/۸۵۱۰	۰/۶۳۹۰	۰/۵۰۷۰	۰/۴۶۸۰
	۲۰	۰/۷۰۸۰	۰/۴۹۷۰	۰/۴۲۶۰	۰/۳۸۷۰
	۲۵	۰/۶۱۶۰	۰/۴۰۷۰	۰/۳۶۹۰	۰/۳۳۰۰

همانطور که درجداول (۴ و ۵) مشخص است انطباق خوبی بین نتایج تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول وجود دارد. این تطابق به دلیل ضخامت کم (نازک بودن) صفحه مورد بررسی می‌باشد و این نتایج بر مناسب بودن تئوری کلاسیک برای صفحات نازک صحه می گذارد . نکته قابل مشاهده دیگر از جداول مذکور این است که مشخصاً با افزایش نسبت ناهمسانگردی پوسته‌ها مقدار تغییر مکان ماکزیمم جانبی و تنش در راستای x صفحه کاهش می‌یابد که شیب تغییرات آن تا نسبت $E_{11}/E_{22}=20$ تند می-باشد و پس از آن شیب کمتری خواهد گرفت.

جدول(۵): مطالعه همگرایی اثر ناهمسانگردی پوسته ها بر روی تنش بدون بعد نقطه مرکزی صفحه در راستای x $(\overline{\sigma}_x=\sigma_x h^2/(p_0a^2))$

شرایط مرزی	E1/E2	$\overline{\sigma}_x$ هسته نوع اول		هسته نوع دوم	
		FSDT	CLPT	FSDT	CLPT
SSSS	۱	۰/۳۷۹۶	۰/۳۷۹۶	۰/۱۳۹۰	۰/۱۳۹۳
	۵	۰/۲۰۳۱	۰/۲۰۳۳	۰/۱۰۳۰	۰/۱۰۳۰
	۱۰	۰/۱۲۹۵	۰/۱۲۹۸	۰/۰۷۹۹	۰/۰۷۹۹
	۱۵	۰/۰۹۵۱	۰/۰۹۵۴	۰/۰۶۵۳	۰/۰۶۵۳
	۲۰	۰/۰۷۵۱	۰/۰۷۵۴	۰/۰۵۵۳	۰/۰۵۵۳
	۲۵	۰/۰۶۲۰	۰/۰۶۲۴	۰/۰۴۷۹	۰/۰۴۷۰
CCCC	۱	۰/۱۹۸۰	۰/۲۲۴۰	۰/۰۷۲۵	۰/۰۸۰۱
	۵	۰/۰۹۱۵	۰/۰۹۷۹	۰/۰۴۹۸	۰/۰۵۳۶
	۱۰	۰/۰۵۴۵	۰/۰۵۷۷	۰/۰۳۶۶	۰/۰۳۸۷
	۱۵	۰/۰۳۸۷	۰/۰۴۰۹	۰/۰۲۸۹	۰/۰۳۰۴
	۲۰	۰/۰۲۹۹	۰/۰۳۱۷	۰/۰۲۳۹	۰/۰۲۵۰
	۲۵	۰/۰۲۴۳	۰/۰۲۵۹	۰/۰۲۳۰	۰/۰۲۱۲
SCSC	۱	۰/۲۳۵۰	۰/۲۳۰۰	۰/۰۸۳۳	۰/۰۸۲۴
	۵	۰/۱۱۰۰	۰/۱۰۵۰	۰/۰۵۷۳	۰/۰۵۶۴
	۱۰	۰/۰۶۸۲	۰/۰۶۲۹	۰/۰۴۲۳	۰/۰۴۱۴
	۱۵	۰/۰۵۲۰	۰/۰۴۹۰	۰/۰۳۳۷	۰/۰۳۲۷
	۲۰	۰/۰۴۰۱	۰/۰۳۴۹	۰/۰۲۸۱	۰/۰۲۷۱
	۲۵	۰/۰۳۳۶	۰/۰۲۸۵	۰/۰۲۴۱	۰/۰۲۳۱

۴-۳- تأثیر زاویه قرارگیری الیاف

ازآنجائیکه زاویه قرارگیری الیاف و آرایش آنها بر روی درایه‌های ماتریس سختی خمشی (D)، ماتریس سختی کششی-فشاری (A) و ماتریس کوپلینگ کشش- خمش (B) تاثیر مستقیم دارد و درایه‌های این ماتریس‌ها نیز در معادلات حاکم بر خمش صفحات ساندویچی وجود دارند، از اینرو بررسی تاثیر زاویه قرارگیری الیاف در لایه‌ها بر خمش ضروری و لازم به نظر می‌رسد .

بدین منظور صفحه ساندویچی با مشخصات مکانیکی و هندسی ذکر شده در ابتدای این بخش در نظر گرفته می‌شود، با این تفاوت که در این مطالعه از دو آرایش زیر استفاده شده است .

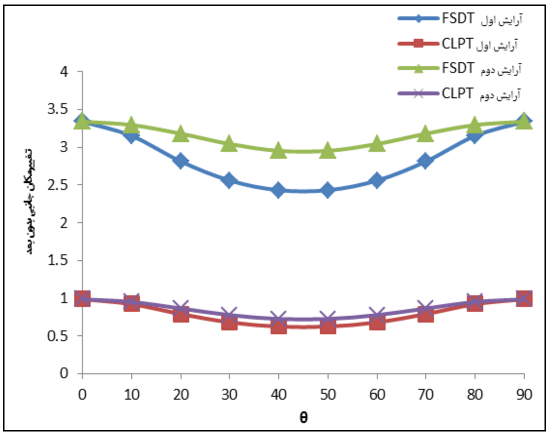
نوع اول (پادمتقارن) :

$$(\theta/-\theta/\theta/-\theta/Core/-\theta/\theta/-\theta/\theta)$$

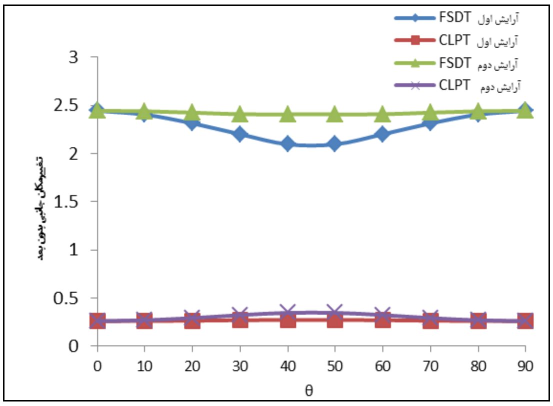
نوع دوم (متقارن) :

$(\theta/\theta/\theta/\theta/Core/\theta/\theta/\theta/\theta)$

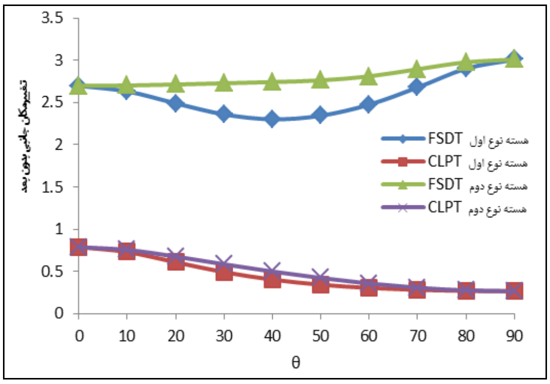
شکل‌های (۱) تا (۴) به ترتیب نحوه تغییرات تغییر مکان نقطه مرکزی صفحه بر حسب زاویه قرارگیری الیاف را برای شرایط مرزی SSSS، CCCC ، SCSC و CCCS و بر اساس دو تئوری کلاسیک و تغییرشکل برشی مرتبه اول برای دو نوع آرایش ذکر شده نمایش می دهند. همانگونه که از شکل های مذکور نمایان است در کلیه شرایط مرزی، مقدار تغییر مکان بدست آمده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، در زاویه قرارگیری ۴۵ درجه مقدار مینیمم دارد و مقدار ماکزیمم آن در شرایط مرزی SSSS و CCCC در زاویه ۰ و ۹۰ درجه اتفاق می افتد. در شرایط مرزی SCSC وCCCS مقدار ماکزیمم به ترتیب در زاویه ۹۰ و ۰ اتفاق می‌افتد. نکته قابل برداشت دیگر از این شکل‌ها این است که در کلیه شرایط مرزی مقدار تغییر مکان حاصله از تئوری تغییر شکل مرتبه اول، در آرایش نامتقارن کمتر از نوع متقارن می‌باشد. تفاوت زیاد نتایج مربوط به تئوری کلاسیک در مقایسه با نتایج تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به علت ضخیم بودن صفحه مورد بررسی می باشد.



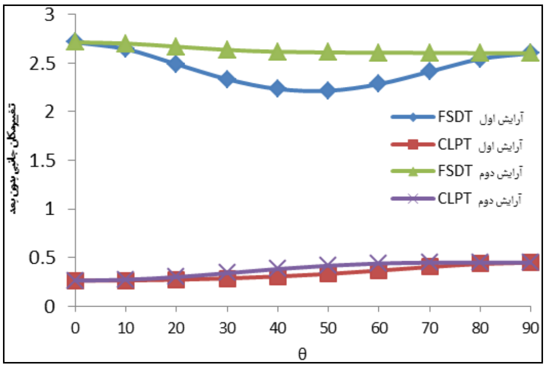
شکل(۱) تغییرات تغییر مکان جانبی نقطه مرکزی صفحه $(\overline{w})$ با زاویه قرارگیری الیاف تحت شرایط مرزی SSSS



شکل(۲) تغییرات تغییر مکان جانبی نقطه مرکزی صفحه $(\overline{w})$ بر حسب زاویه قرارگیری الیاف تحت شرایط مرزی CCCC



شکل(۳) تغییرات تغییر مکان جانبی نقطه مرکزی صفحه $(\overline{w})$ بر حسب زاویه قرارگیری الیاف تحت شرایط مرزیSCSC



شکل(۴) تغییرات تغییر مکان جانبی نقطه مرکزی صفحه $(\overline{w})$ بر حسب زاویه قرارگیری الیاف تحت شرایط مرزی CCCS

۴-۴- اثر نسبت ضخامت هسته به پوسته

مقدار ضخامت هسته و پوسته‌ها در صفحات ساندویچی تاثیر زیادی بر روی خمش اینگونه صفحات دارد. در این بخش به بررسی تاثیر این پارامتر هندسی بر روی خمش می‌پردازیم. یک صفحه‌ی ساندویچی مربعی با خصوصیات زیردر جدول

۶ را در نظر می‌گیریم.خصوصیات هسته به پوسته نزدیک شده و هسته به طور قابل توجهی نسبت به جدول ۲ تقویت شده است.

جدول (۶) خصوصیات پوسته‌ها و هسته‌ی انتخاب شده

کمیت	خصوصیت پوسته	خصوصیت هسته
E_{11}	۱۸۱ Gpa	۱۰۳/۶۳ Gpa
E_{22}	۱۰/۳ Gpa	۱۰۳/۶۳ Gpa
E_{33}	۱۰/۳ Gpa	۱۰۳/۶۳ Gpa
ν_{12}	۰/۲۸	۰/۳۲
G_{12}	۷/۱۷ Gpa	۵۰ Gpa

$$\rho = 130\ kg/m^3$$

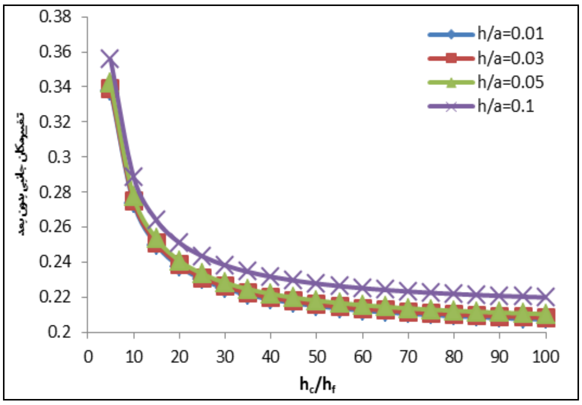
نوع آرایش و نوع بار:

$$(0\ ,\ 0\ ,\ Core\ ,\ 0\ ,\ 0)$$

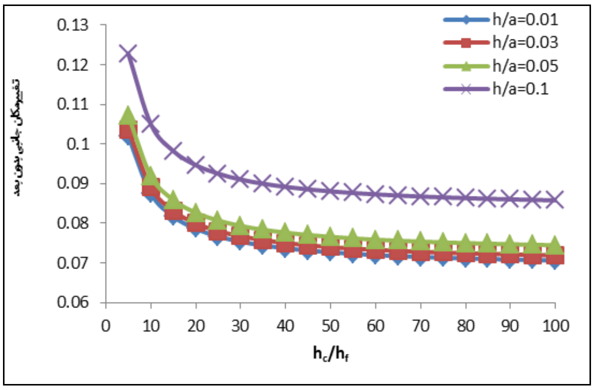
$$P(x,y) = p_0 \sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi y}{b})$$

شکل‌های (۵) تا (۸) نحوه تغییرات ماکزیمم تغییر مکان بدون بعد صفحه مورد نظر برای نسبت‌های مختلف ضخامت هسته به پوسته و نسبت‌های مختلف (h/a) به ترتیب برای شرایط مرزی SSSS، CCCC، SCSC، CCCS را با روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نشان می دهند.

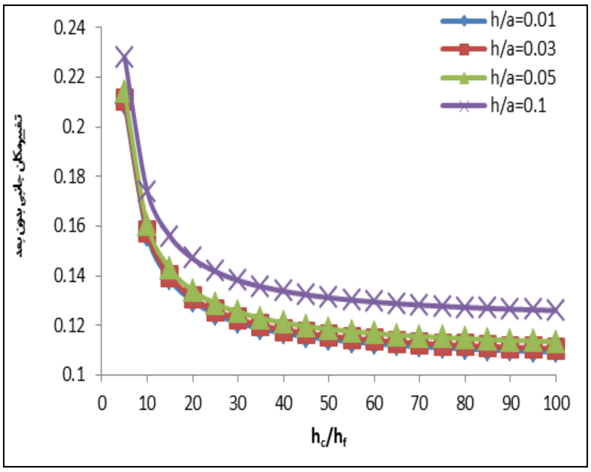
همانگونه که از شکل‌های (۵ تا ۸) قابل برداشت می باشد برای کلیه شرایط مرزی با افزایش نسبت h_c/h_f تغییر مکان ماکزیمم صفحه کاهش می‌یابد .



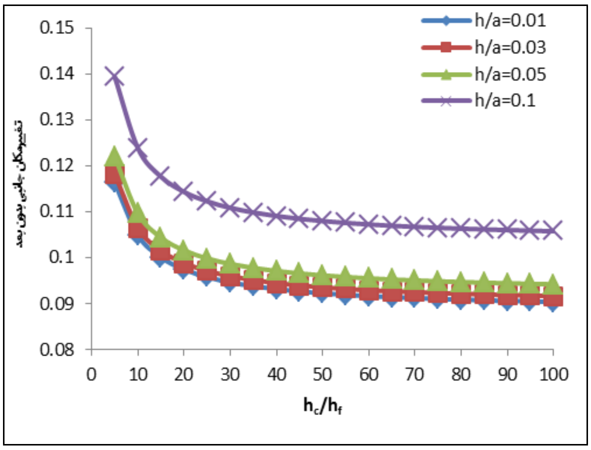
شکل(۵) اثر تغییر نسبت ضخامت هسته به پوسته بر ماکزیمم تغییر مکان بدون بعد صفحه $(\overline{w})$ برای شرایط مرزی SSSS



شکل (۶) اثر تغییر نسبت ضخامت هسته به پوسته بر ماکزیمم تغییر مکان بدون بعد صفحه $(\overline{w})$ برای شرایط مرزی CCCC



شکل(۷) اثر تغییر نسبت ضخامت هسته به پوسته بر ماکزیمم تغییر مکان بدون بعد صفحه $(\overline{w})$ برای شرایط مرزی SCSC



شکل(۸) اثر تغییر نسبت ضخامت هسته به پوسته بر ماکزیمم تغییر مکان بدون بعد صفحه $(\overline{w})$ برای شرایط مرزی CCCS

۴-۵- تأثیر نوع بارگذاری

در بخش‌های قبل مواردی که مورد بررسی قرار گرفت همگی تحت شرایط بارگذاری سینوسی بود، با توجه به اینکه

برنامه نوشته شده با نرم‌افزار متلب بر اساس روش مربعات دیفرانسیلی قابلیت بررسی خمش صفحات ساندویچی تحت هرگونه شرایط بارگذاری را دارد، در این بخش شکل تغییرشکل یافته صفحات ساندویچی تحت شرایط بارگذاری مختلف نمایش داده شده است. هدف از این بخش نشان‌دادن قابلیت روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک در حل مسئله خمش صفحات ساندویچی تحت شرایط مرزی و بارگذاری مختلف می‌باشد. در شکل‌های (۹) تا (۱۱) نمودار سه‌بعدی تغییر شکل و چرخش عمود بر صفحه میانی حول محور x و y (α,β)را برای شرایط مرزی SSSS و CCCC تحت بارگذاری‌های زیر نمایش می‌دهند.

۱-بارگذاری گسترده یکنواخت

$$p(x,y)=p_0$$

۲-بارگذاری متمرکز

$$p(x,y)=p_0 \qquad at \quad x=a/2 \quad y=b/2$$

۳-بار گذاری تابعی

$$p(x,y)=p_0(xy-2x+2y+1) \quad 0<x<1 \quad 0<y<1$$

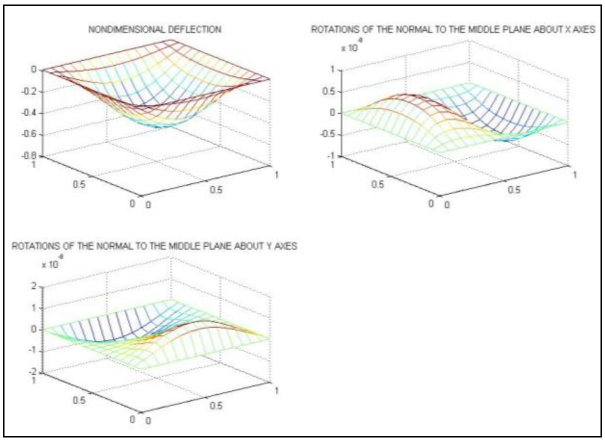
۴-۶- بررسی صحت نتایج

به منظور صحت سنجی نتایج عددی بدست آمده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک ، این مقادیر با نتایج موجود [۱۶] مقایسه شده است. بدین منظور صفحه توصیف شده در بخش قبل در نظر گرفته شده است.

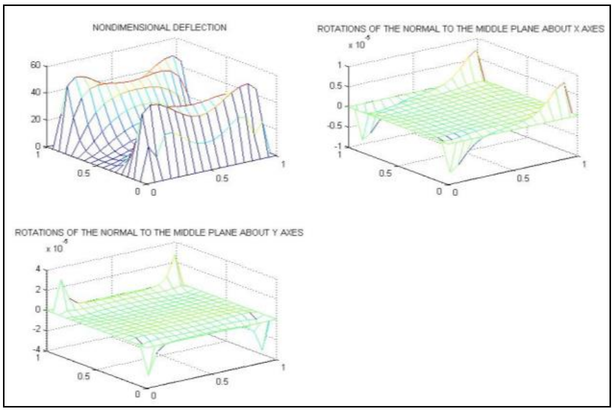
صفحه ساندویچی مورد مطالعه، یک صفحه متقارن مربعی است که آرایش زاویه قرارگیری الیاف در لایه ها به صورت $(0\,,90\,,Core,\,90\,,\,0)$ می‌باشد و تحت بارگذاری جانبی سینوسی به شکل رابطه زیر قرار گرفته است.

$$P(x,y)=p_0\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi y}{b})$$

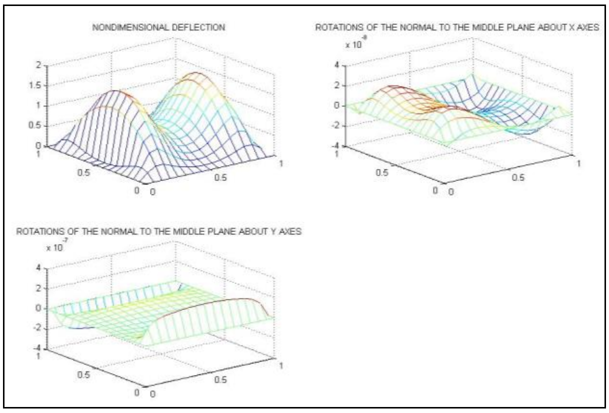
مشخصات مکانیکی پوسته و هسته‌ها درجدول (۷) ارائه شده است.



شکل(۹) نمودار سه بعدی تغییرشکل نرمال، چرخش عمود بر صفحه میانی حول محور x و y تحت بارگذاری یکنواخت و با شرایط مرزی CCCC



شکل(۱۰) نمودار سه بعدی تغییرشکل نرمال، چرخش عمود بر صفحه میانی حول محور x و y تحت بارگذاری متمرکز و با شرایط مرزی CCCC



شکل(۱۱) نمودار سه بعدی تغییرشکل نرمال، چرخش عمود بر صفحه میانی حول محور x و y تحت بارگذاری تابعی و با شرایط مرزی CCCC

جدول (۷) خصوصیات پوسته و هسته‌های انتخاب شده

	مشخصه
پوسته	$\frac{E_{11}}{E_{22}}=1\ ,\ 3\ ,\ 10\ ,\ 20\ ,\ 30\ ,\ 40\ ,\ 50$ $\frac{G_{12}}{E_{22}}=\frac{G_{13}}{E_{22}}=0.6$ $\frac{G_{23}}{E_{22}}=0.5$ $\nu_{12}=0.25$
هسته (نوع اول)	$E_{11}=E_{22}=E_{33}=0.02Gpa$ $G_{12}=G_{13}=0.146Gpa$ $G_{23}=0.0904Gpa$ $\nu_{12}=0.25$
هسته (نوع دوم)	$E=103.63Gpa$ $G=50Gpa$ $\nu=0.32$ $\rho=130\ kg/m^3$

همچنین $\frac{h}{a}=0.05$ و $\frac{h_c}{h_f}=10$ و $4h_f+h_c=h$ در نظر گرفته شده است.

در جداول (۸) و (۹) به ترتیب نتایج مربوط به تحلیل خمش برای مقادیر مختلف h_c/h_f و θ با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه شده است. در این جداول میزان تغییر مکان نرمال نقطه مرکزی صفحه $\overline{w}=100wh^3E_{22}/(p_0a^4)$ و تنش بدون بعد $\overline{\sigma}_x=\sigma_x h^2/(p_0a^2)$ در نقطه‌ی مرکزی سطح بالایی و پایینی در راستای x حاصله از روش‌های مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک با شرایط مرزی ساده (SSSS) در مقایسه با نتایج سوآمیناتان [۱۶] و ناویر بیان شده است.

همانطور که از جداول (۸) و (۹) نمایان است، نتایج بدست آمده از روش‌های مربعات دیفرانسیلی با نتایج سوآمیناتان و همکارانش همخوانی دارد و این نشان از دقت و درستی نتایج روش‌های مورد استفاده در این تحقیق دارد.

جدول (۸): تاثیر نسبت ضخامت هسته به پوسته (h_c/h_f) صفحه ساندویچی مربعی با شرایط مرزی SSSS با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مقایسه نتایج بدست آمده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک با نتایج موجود

$\frac{h_c}{h_f}$	مرجع	$\overline{w}$	$\overline{\sigma}_x$
۴	GDQ	۲/۵۵۷۷	۰/۲۹۹۳
	HDQ	۲/۵۵۷۷	۰/۲۹۹۳
	سوآمیناتان [۱۶]	۲/۵۹۷۷	۰/۲۸۰۳
	ناویر	۲/۵۵۷۷	۰/۲۹۹۳
۱۰	GDQ	۴/۸۷۶۴	۰/۴۸۸۹
	HDQ	۴/۸۷۶۴	۰/۴۸۸۹
	سوآمیناتان [۱۶]	۴/۹۴۱۸	۰/۴۶۸۲
	ناویر	۴/۸۷۶۴	۰/۴۸۸۹
۲۰	GDQ	۸/۷۵۶۳	۰/۸۱۹۹
	HDQ	۸/۷۵۶۳	۰/۸۱۹۹
	سوآمیناتان [۱۶]	۸/۸۶۳۳	۰/۷۹۴۱
	ناویر	۸/۷۵۶۳	۰/۸۱۹۹
۵۰	GDQ	۲۰/۳۱۹۱	۱/۸۲۵۰
	HDQ	۲۰/۳۱۹۱	۱/۸۲۵۰
	سوآمیناتان [۱۶]	۲۰/۵۸۵۹	۱/۷۸۵۰
	ناویر	۲۰/۳۱۹۱	۱/۸۲۵۰
۱۰۰	GDQ	۳۹/۲۷۸۳	۳/۵۰۷۶
	HDQ	۳۹/۲۷۸۳	۳/۵۰۷۶
	سوآمیناتان [۱۶]	۳۹/۹۰۳۹	۳/۴۵۱۹
	ناویر	۳۹/۲۷۸۳	۳/۵۰۷۶

جدول (۹): تاثیرزاویه قرارگیری لایه‌های (θ) $(\theta,-\theta,core,\theta,-\theta)$صفحه ساندویچی مربعی با شرایط مرزی SSSS با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مقایسه نتایج بدست آمده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک با نتایج موجود

θ	منبع	$\overline{w}$	$\overline{\sigma}_x$
۱۵	GDQ	۲/۹۷۹۳	۰/۴۰۵۵
	HDQ	۲/۹۷۹۳	۰/۴۰۵۵
	سوآمیناتان [۱۶]	۳/۰۷۳۵	۰/۳۹۵۸
	ناویر	۲/۹۷۹۳	۰/۴۰۵۵
۳۰	GDQ	۲/۵۵۷۷	۰/۲۹۹۳
	HDQ	۲/۵۵۷۷	۰/۲۹۹۳
	سوآمیناتان [۱۶]	۲/۵۹۷۷	۰/۲۸۰۳
	ناویر	۲/۵۵۷۷	۰/۲۹۹۳
۴۵	GDQ	۲/۴۱۴۲	۰/۲۲۹۲
	HDQ	۲/۴۱۴۲	۰/۲۲۹۲
	سوآمیناتان [۱۶]	۲/۴۴۰۹	۰/۲۱۱۳
	ناویر	۲/۴۱۴۲	۰/۲۲۹۲
۶۰	GDQ	۲/۵۵۷۷	۰/۱۶۹۱
	HDQ	۲/۵۵۷۷	۰/۱۶۹۱
	سوآمیناتان [۱۶]	۲/۵۹۷۷	۰/۱۵۱۰
	ناویر	۲/۵۵۷۷	۰/۱۶۹۱
۷۵	GDQ	۲/۹۷۹۳	۰/۱۳۲۵
	HDQ	۲/۹۷۹۳	۰/۱۳۲۵
	سوآمیناتان [۱۶]	۳/۰۷۳۵	۰/۱۲۹۶
	ناویر	۲/۹۷۹۳	۰/۱۳۲۵

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق از دو روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته و هارمونیک برای تحلیل خمش صفحات ساندویچی تحت شرایط مرزی ترکیبی (ساده و گیردار)، بارگذاری‌های مختلف و با فرض دو تئوری کلاسیک و تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شد. همانگونه که در بخش نتایج نشان داده شد، دو روش عددی مربعات دیفرانسیلی دارای سرعت همگرایی خوبی بودند و نتایج حداقل با یک شبکه ۱۳*۱۳ تا چهار رقم اعشار همگرا می‌شود. مقایسه نتایج حاصله با نتایج موجود در تحقیقات گذشته نشان از درستی و دقت نتایج داشت. نتایج بدست‌آمده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته با نتایج روش مربعات دیفرانسیلی هارمونیک همخوانی خیلی خوبی دارد. تئوری کلاسیک تنها برای صفحات نازک نتایج قابل قبولی ارائه می دهد ولی در مقابل با فرض تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول نتایج درستی برای صفحات ضخیم و نازک بدست می‌آید. در بررسی تاثیر پارامترهای ناهمسانگردی لایه‌ها، زاویه قرارگیری الیاف در لایه‌ها و نسبت ضخامت هسته به پوسته نتایج زیر حاصل شد.

۱- با افزایش ناهمسانگردی لایه‌ها، ماکزیمم تغییر مکان صفحه برای کلیه شرایط مرزی کاهش می یابد.

۲- در کلیه شرایط مرزی مقدار تغییر مکان ماکزیمم حاصله از تئوری تغییر شکل مرتبه اول، در آرایش نامتقارن کمتر از نوع متقارن می باشد.

۳- با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تمامی شرایط مرزی با افزایش نسبت ضخامت هسته به پوسته (h_c/h_f) تغییر مکان ماکزیمم صفحه کاهش می یابد.

فهرست علائم

a	اندازه صفحه در جهت x
b	اندازه صفحه در جهت y
h	ضخامت صفحه
h_f	ضخامت پوسته‌ها
h_c	ضخامت هسته
N	تعداد کل لایه‌ها
n_x	تعداد نقاط گره‌ای در جهت x
n_y	تعداد نقاط گره‌ای در جهت y
A	ماتریس دوام
D	ماتریس سفتی خمشی
E_{ii}	ضریب الاستیک در راستای i
G_{ij}	ضریب برشی در صفحه i-j
ν_{ij}	ضریب پوآسون در صفحه i-j
α	چرخش حول محور x
β	چرخش حول محور y
w	تغییر شکل جانبی
θ	زاویه قرارگیری الیاف

پیوست الف

با فرض اینکه تعداد نقاط گره‌ای در راستای x و y به ترتیب n_x و n_y باشد، نمایش مربعات دیفرانسیلی معادلات تعادل حاکم بر مسئله خمش (معادلات ۱۰-۷) به شکل زیر می‌باشد.

- معادله تعادل بر اساس تئوری کلاسیک:

$$
\begin{aligned}
&D_{11}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(4)} W_{kj} + 4D_{16}\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(3)} c_{jm}^{(1)} W_{km} \\
&+ 2(D_{12}+2D_{66})\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(2)} c_{jm}^{(2)} W_{km} \\
&+ 4D_{26}\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(3)} W_{km} + D_{22}\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(4)} W_{ik} \\
&+ p(x_i, y_j) = 0 \quad i = 1,\ldots,n_x;\ j = 1,\ldots,n_y
\end{aligned}
\qquad \text{(الف-۱)}
$$

- معادلات تعادل بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول

$$
\begin{aligned}
&A_{44}\Big(\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(1)}\beta_{ik} + \sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(2)} w_{ik}\Big) + A_{55}\Big(\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)}\alpha_{kj} \\
&+ \sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(2)} w_{kj}\Big) + A_{45}\Big(\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(1)}\alpha_{ik} + \sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)}\beta_{kj} \\
&+ 2\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(1)} w_{km}\Big) + p(x_i, y_j) = 0 \\
&i = 1,\ldots.n_x \qquad j = 1,\ldots.n_y
\end{aligned}
$$
(الف –۲)

$$
\begin{aligned}
&D_{11}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(2)}\alpha_{kj} + 2D_{16}\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(1)}\alpha_{km} \\
&+ D_{26}\sum_{k=1}^{n_x} c_{jk}^{(2)}\beta_{ik} + (D_{12}+D_{66})\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(1)}\beta_{km} \\
&- A_{45}\Big(\beta_{ij} + \sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(2)} w_{ik}\Big) + D_{16}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(2)}\beta_{kj} \\
&- A_{55}\Big(\alpha_{ij} + \sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)} w_{kj}\Big) + D_{66}\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(2)}\alpha_{ik} = 0 \\
&\quad i = 1,\ldots\ldots.n_x\,;\; j = 1,\ldots\ldots..n_y
\end{aligned}
$$
(الف –۳)

$$
\begin{aligned}
&D_{22}\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(2)}\beta_{ik} + 2D_{26}\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(1)}\beta_{km} \\
&+ D_{26}\sum_{k=1}^{n_x} c_{jk}^{(2)}\alpha_{ik} + (D_{12}+D_{66})\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(1)}\alpha_{km} \\
&- A_{44}\Big(\beta_{ij} + \sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(2)} w_{ik}\Big) + D_{16}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(2)}\alpha_{kj} \\
&- A_{45}\Big(\alpha_{ij} + \sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)} w_{kj}\Big) = 0 \\
&\quad i = 1,\ldots\ldots.n_x\,;\; j = 1,\ldots\ldots..n_y
\end{aligned}
$$
(الف –۴)

پیوست ب

نمایش مربعات دیفرانسیلی شرایط مرزی مختلف که در جدول (۱) آورده شده است به شکل زیر می‌باشد.

- لبه با تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری کلاسیک (ثابت=x):

$$
\begin{aligned}
&x = 0, a: \quad w_{ij} = 0 \quad , \\
&- D_{11}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(2)} w_{kj} - D_{12}\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(2)} w_{ik} \\
&- 2D_{16}\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(1)} w_{km} = 0 \\
&i = 1, n_x \quad , j = 1,\ldots\ldots..n_y
\end{aligned}
$$
(ب –۱)

- لبه با تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری کلاسیک (ثابت=y):

$$
\begin{aligned}
&y = 0, b: \quad w_{ij} = 0 \quad , \\
&- D_{12}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(2)} w_{kj} - D_{22}\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(2)} w_{ik} \\
&- 2D_{26}\sum_{k=1}^{n_x}\sum_{m=1}^{n_y} c_{ik}^{(1)} c_{jm}^{(1)} w_{km} = 0 \\
&i = 1,\ldots\ldots..n_y \quad , j = 1, n_y
\end{aligned}
$$
(ب –۲)

- لبه با تکیه‌گاه گیردار براساس تئوری کلاسیک (ثابت=x):

$$
\begin{aligned}
&x = 0, a: \quad w_{ij} = 0 \quad , \\
&\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)} w_{kj} = 0 \qquad i = 1, n_x \quad , j = 1,\ldots\ldots.n_y
\end{aligned}
$$
(ب –۳)

- لبه با تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری کلاسیک (ثابت=y):

$$
\begin{aligned}
&y = 0, b: \quad w_{ij} = 0 \\
&\sum_{k=1}^{n_x} c_{jk}^{(1)} w_{ik} = 0 \quad i = 1,\ldots\ldots., n_x , j = 1, n_y
\end{aligned}
$$
(ب –۴)

- لبه با تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول (ثابت=x):

$$
\begin{aligned}
&x = 0, a: \quad w_{ij} = 0 \\
&D_{11}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)}\alpha_{kj} + D_{12}\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(1)}\beta_{ik} \\
&+ D_{16}\Big(\sum_{k=1}^{n_x} c_{jk}^{(1)}\alpha_{ik} + \sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)}\beta_{kj}\Big) = 0 \qquad , \beta_{ij} = 0 \\
&\text{or} \\
&D_{16}\sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)}\alpha_{kj} + D_{26}\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(1)}\beta_{ik} \\
&+ D_{66}\Big(\sum_{k=1}^{n_y} c_{jk}^{(1)}\alpha_{ik} + \sum_{k=1}^{n_x} c_{ik}^{(1)}\Big) = 0 \\
&i = 1, n_x \quad , j = 1,\ldots\ldots..n_y
\end{aligned}
$$
(ب –۵)

- لبه با تکیه‌گاه ساده بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول (ثابت=y):

$$y=0,b:\ ,w_{ij}=0$$

$$D_{12}\sum_{k=1}^{n_x}c_{ik}^{(1)}\alpha_{kj}+D_{22}\sum_{k=1}^{n_y}c_{jk}^{(1)}\beta_{ik}$$

$$+D_{26}\Big(\sum_{k=1}^{n_x}c_{jk}^{(1)}\alpha_{ik}+\sum_{k=1}^{n_x}c_{ik}^{(1)}\beta_{kj}\Big)=0 \quad ,\alpha_{ij}=0 \qquad \text{(ب –۶)}$$

or

$$D_{16}\sum_{k=1}^{n_x}c_{ik}^{(1)}\alpha_{kj}+D_{26}\sum_{k=1}^{n_y}c_{jk}^{(1)}\beta_{ik}$$

$$+D_{66}\Big(\sum_{k=1}^{n_y}c_{jk}^{(1)}\alpha_{ik}+\sum_{k=1}^{n_x}c_{ik}^{(1)}\Big)=0$$

$$j=1,n_y \quad ,i=1,\dots\dots,n_x$$

مراجع

[1] Pandit M.K., Singh B.N., Sheikh A.H., Buckling of laminated sandwich plates with soft core based on an improved higher order zigzag theory, *Journal of Thin-Walled Structures*, Vol. 46, 2008, pp. 1183– 1191.

[2] Leissa A.W., Review of laminated composites plate buckling, *Applied Mechanical Rev*, Vol. 40, 1987.

[3] Levy M., Sur L'equilibrie Elastique d'une Plaque Rectangulaire, *Compt Rend*, Vol. 129, 1899, pp. 535-539.

[4] Timoshenko S.P., woinowsky – Krieger.S., Theory of plates and shells , 2d ed., McGraw Hill, New York, 1959.

[۵] هنرجو ، ب،" آنالیز صفحات لایه لایه مرکب به روش differential quadrature"، دانشگاه شیراز ، ۱۳۷۸.

[6] Whitney J.M., Pagano.N J, Shear deformation in heteogeneous anisotropic plates, *ASME Journal of Applied Mechanical*, Vol. 37,1970, pp. 1031-1036.

[7] Bert C.W., Chen T.L.C., Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates, *International Journal of Solids Structure*, Vol. 14, 1978, pp. 465-473.

[8] Reddy J.N., Chao W.C., A comparison of closed-form and finite-element solutions of thick, laminated, anisotropic rectangular plates, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 64, 1981, pp. 153-167.

[9] Kant T., Numerical analysis of thick plates, *Computation and Mathematics Applied Mechanical Engineering*, Vol. 31, 1982, pp.1–18.

[10] Pandya B science N., Kant T., A consistent refined theory for flexure of a symmetric laminate, *Mechanics Research Communications*, Vol, 14, 1987, pp.107–113.

[11] Pandya BN., Kant T., Higher order shear deformable theories for flexure of sandwich plates –finite element evaluations. *International Journal of Solids Structures*, Vol. 24(12), 1988, pp. 1267–86.

[12] Pandya BN., Kant T., Flexure analysis of laminated composites using refined higher order C_ plate bending elements *Computation and Mathematics Applied Mechanical Engineering*, Vol. 66, 1988, pp. 173–98.

[13] Pandya BN., Kant T., A refined higher order generally orthotropic C_ plate bending element. *Composite Structures*, Vol. 28, 1988, pp. 119–133.

[14] Pandya BN., Kant T., Finite element stress analysis of laminated composites using higher order displacement model, *Composite science Technology*, Vol. 32, 1988, pp. 137–155.

[15] Kant T., Manjunatha BS., An unsymmetric FRC laminate C_ finite element model with 12 degrees of freedom per node. *Eng Comput*, Vol. 5(3), 1988, pp. 300–308.

[16] Swaminathan K., Patil S.S., Nataraja M.S, Mahabaleswara K.S., Bending of sandwich plates with anti-symmetric angle-ply face sheets – Analytical evaluation of higher order refined computational models, *Composite Structures*, Vol. 75, 2006, pp. 114–120.

[17] Bellman R., Casti J., Differential quadrature and long-term integration, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 34, 1971, pp. 235–238.

[18] Bellman R.E., Kashef B.G., Casti J., Differential quadrature: a technique for a rapid solution of nonlinear partial differential equations, *Journal Computational Physics*, Vol. 10, 1972, pp. 40–52.

[19] Bert C.W., S.K. Jang., Striz A.G., Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components, *AIAA Journal*, Vol. 26, 1988, pp. 612-618.

[20] Bert C.W., Malik M., Differential quadrature in computational mechanics: a review, *Applied Mechanical Review*, Vol. 49, 1996, pp. 1–27.

[21] Chen W., Shu C., He W., Zhong, T., The application of special matrix product to differential quadrature solution of geometrically nonlinear bending of orthotropic rectangular plates, *Composite Structures*, Vol. 74, 2000, pp. 65–76.

[22] Chen W., Tanaka M.A., Study on time schemes for DRBEM analysis of elastic impact wave, *Computational Mechanics*, Vol. 28, 2002, pp. 331–338.

[23] Bert C.W., Jang S.K., Striz A.G., Nonlinear bending analysis of orthotropic rectangular plates by the method of differential quadrature. *Computational Mechanics*, Vol. 5, 1989, pp. 217–226.

[24]. Bert C.W., Wang X., Striz, A.G., Differential quadrature for static and free vibration analyses of anisotropic plates, *International Journal of Solids Structures*, Vol. 30, 1993, pp.1737–1744.

[25] Wang X., Bert C.W., A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 162, 1993, pp. 566–572.

[26] Wang X., Gu H., Static analysis of frame structures by the differential quadrature element method. International *Journal Numer Mechanical Eng*, Vol. 40, 1997, pp. 759–772.

[27] Wang X., Wang Y., Free vibration analyses of thin sector plates by the new version of differential quadrature method. *Computation and Mathematics Applied Mechanical Engineering*, Vol. 193, 2004, pp. 3957–3971.

[28] Wang X., Differential quadrature for buckling analysis of laminated plates. *Computers and Structures*, Vol. 57, 1995, pp. 715–719.

[29] Civan F., Sliepcevich C.M., Differential quadrature for multidimensional problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 101, 1984, pp. 423– 443.

[30] Shu C., Richards B.E., Application of generalized differential quadrature to solve two-dimensional incompressible Navier-Stoaks equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1992, pp.791–798.

[31] Shu, C., Wang, C.M., Treatment of mixed and non-uniform boundary conditions in GDQ vibration analysis of rectangular plate, *Engineering Structures*, Vol. 21, 1999, pp.125–134.

[32] Du, H., Lim, M.K., Lin, R.M., Application of generalized differential quadrature method to structural problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp. 1881–1896.

[33] Wang, X., Wang, X., Shi, X., Differential quadrature buckling analyses of rectangular plates subjected to non-uniform distributed in-plane loadings. *Thin-Walled Struct*ures, Vol. 44, 2006, pp. 837–843.

[34] Hsu, M.H., Vibration analysis of annular plates using the modified generalized differential quadrature method, *Journal of Applied science*, Vol. 6(7), 2006, pp. 1591–1595.

[35] Tornabene, F., Viola, E., A generalized differential quadrature solution for laminated composite shells of revolution, In, Proceedings of 8th World Congress on Computational Mechanics. Venice Italy, 2008

[36] Striz, A.G., Wang, X., Bert, C.W., Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components, *Acta Mechanical*, Vol. 111, 1995, pp. 85–94.

[37] Liew, K.M., Teo, T.M., Han, J.B., Comparative accuracy of DQ and HDQ methods for three dimensional vibration analyses of rectangular plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, 1999, pp. 1831–1848.

[38] Civalek, Ö., Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns, *Engineering Structures*, Vol. 26, 2004, pp. 171–186.

[39] Malekzadeh, P., Karami,G., Polynomial and harmonic differential quadrature methods for free vibration of variable thickness thick skew plates, *Engineering Structures*, Vol. 27, 2005, pp. 1563–1574.

[40] Civalek, Ö, Harmonic differential quadrature-finite differences coupled approaches for geometrically nonlinear static and dynamic analysis of rectangular plates on elastic foundation, *Journal of Sound Vibration*, Vol. 294, 2006, pp. 966–980.

[41] Vinson J.R., Plate and panel structures of isotropic, composite and piezoelectric materials, including sandwich construction, Springer, Netherlands, 2005.

[42] Jones R. Mechanics of composite materials, Scripta Book Company 1975.

[43] Kolakowski Z , Kowal-michalska K. Selected problems of in stabilities in composite structures. A Series of Monographs, Technical University of Lodz, 1999.

[44] Mania R. Buckling analysis of trapezoidal composite sandwich plate subjected to in-plane compression, *Composite Structures*, Vol. 69. 2005, pp. 482–490.

[45] Nayak A.K, Moy S.S.J, Shenoi R.A. A higher order finite element theory for buckling and vibration analysis of initially stressed composite sandwich plates. *Journal of Sound Vibration*, Vol. 286, 2005, pp. 763–780.

[46] Civan, F., Sliepcevich, C.M., Differential quadrature for multidimensional problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 101, 1984, pp. 423– 443.

[47] Shu, C., Xue, H., Explicit computations of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature. *Journal of Sound Vibration*, Vol. 204, 1997, pp. 549–555.

[48] Wang, X., Gan, L., Zhang, Y., Differential quadrature analysis of the buckling of thin rectangular plates with cosine-distributed compressive loads on two opposite sides , *Advances in Engineering Software*, Vol. 39, 2008, pp. 497–504.

[49] Tornabene, F., Viola, E., 2-D solution for free vibrations of parabolic shells using generalized differential quadrature method, *European Journal of Mechanical A/Solids*, Vol. 27, 2008, pp. 1001–1025.