فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

# آنالیز خمش نانولوله‌های دارای انحنای اولیه‌ی تعبیه شده بر روی بستر الاستیک بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلی و روش گالرکین

اعظم عارفی[۱،*]، محمود سلیمی[۲]

* salimi@cc.iut.ac.ir

**چکیده**

نانولوله‌های کربنی در تقویت کامپوزیت‌ها نقش بسزایی ایفا می‌کنند. بدیهی است که برخی از نانولوله‌ها در هنگام کاربرد، شکل منظم ابتدایی خود را حفظ نمی کنند و دچار اعوجاج می‌شوند. این اعوجاج می‌تواند در حین فرآیند ساخت یا بعد از آن درنتیجه‌ی تأثیر ماتریس رخ دهد. بر این اساس، مدل‌سازی این نوع نانوساختار به صورت پوسته یا تیر بدون انحنا، می‌تواند خطایی قابل ملاحظه را با نتایج همراه کند. در این مقاله، خمش نانولوله‌های دارای انحنای اولیه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. معادلات تعادل بر پایه تئوری الاستیسیته غیر محلی به کمک اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل، استخراج و از روش گالرکین برای حل آنها بهره گرفته می‌شود. از مدل وینکلر برای مدل‌سازی بستر الاستیک استفاده می‌شود. حل خیز حاصل از دستگاه معادلات غیرخطی به کمک روش عددی نیوتن رفسون صورت می‌گیرد و در نهایت تأثیر مقیاس کوچک، انحنای اولیه و مدول فونداسیون بر روی خیز نانولوله‌ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

**واژه‌های کلیدی**

تحلیل خمش، نانولوله‌ی کربنی با انحنای اولیه، تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلی، روش نیوتن رفسون، روش گالرکین.

۱-دانشجو، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- استاد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

## ۱- مقدمه

با کشف نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۱ توسط ایجیما [۱]، انقلاب عظیمی در زمینه نانوفناوری رقم خورد و این به دلیل خواص فوق‌العاده‌ی مکانیکی، حرارتی، الکتریکی و مغناطیسی آنها بوده است. از نظر خواص مکانیکی سخت‌ترین مواد شناخته‌شده هستند تا جایی که استحکام آنها تا صد برابر فولاد می‌باشد؛ در حالی‌که تنها یک ششم وزن نمونه فولادی را دارا هستند. از نظر خواص حرارتی، تا ۲۸۰۰°C (در خلأ) پایدار هستند و قابلیت هدایت گرمائی آنها تا دو برابر الماس می‌باشد[۲].

طراحی مؤثر نانوسیستم‌ها، وابسته به فهم دقیق خصوصیات و پاسخ نانوسازه‌هایی است که در ساخت آنها بکار می‌روند. با توجه به پتانسیل بالای این سازه‌ها در ساخت ابزار و وسایل در مقیاس نانو، تعیین خصوصیات مکانیکی و الکتریکی آنها برای مطالعه‌ی واکنش آنها با محیط مجاور از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای تحلیل دقیق نانوسازه‌ها، درنظرگرفتن اثر اندازه‌ی کوچک[۱] و نیروهای بین اتمی ضروری است و چشم‌پوشی از این موارد ممکن است به نتایجی با خطای قابل ملاحظه منجر شود.

روش‌های مختلفی برای تعیین خصوصیات مکانیکی و رفتار نانوسازه‌ها وجود دارد. یکی از این روش‌ها بر پایه‌ی اصول مکانیک کوانتوم است. این روش اگر چه نتایج بسیار دقیقی ارائه می‌دهد، اما به دلیل محاسبات پیچیده و محدود شدن به برخی از سیستم‌ها کارایی وسیعی ندارد. در روش‌های تجربی برای اعمال بارهای مکانیکی بر روی نانوسازه و بررسی پاسخ آن، از میکروسکوپ‌های نیروی اتمی استفاده می‌شود. با وجود این‌که نتایج حاصل از آزمایش برای بررسی صحت نتایج مدل‌های ریاضی، مفید هستند، از یک سو دسترسی به این وسایل و از سوی دیگر کنترل آزمایش در مقیاس نانو مشکل است. محدودیت‌های این روش‌ها باعث شد تا محققان به جستجوی روش‌های محاسباتی و ریاضی در این زمینه بپردازند. ابتدا از مدل‌های مولکولی برای این منظور استفاده گردید که با وجود انطباق نتایج حاصل از این روش با مشاهدات آزمایشگاهی، حجم زیاد محاسبات باعث شد که استفاده از مدل‌های مولکولی تنها برای آنالیز نانوسازه‌های کوچک (با تعداد مولکول کم) مورد توجه قرار گیرد. بنابراین، مدل کردن نانوسازه‌ها در ابعاد بزرگ با استفاده از روش‌های دیگر از جمله تئوری‌های مکانیک محیط‌های پیوسته مورد توجه قرار گرفت. مدل‌های محیط پیوسته کلاسیک، مقیاس آزاد هستند و نمی‌توانند آثار کوانتومی را به حساب آورند؛ بنابراین، تئوری‌های اصلاح شده مختلفی از مکانیک محیط‌های پیوسته گزارش شده‌اند که اثر مقیاس کوچک را مورد بررسی قرار می‌دهند؛ از آن جمله می‌توان تئوری الاستیسیته کوپل تنش[۲] [۳] تئوری گرادیان کرنش[۳] [۴]، تئوری کوپل تنش اصلاح‌شده[۴] [۵] و تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن[۵] [۶]را نام برد.

تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن از جمله روش‌هایی است که علاوه‌بر اجتناب از حل معادلات پیچیده، توانایی پیش‌بینی رفتار نانوسازه‌ها در ابعاد بزرگ را نیز دارد. در این تئوری که در سال ۱۹۷۲ با مقاله‌های ارینگن پایه‌ریزی شد، با این فرض که تنش در یک نقطه، تابعی از کرنش در کلیه نقاط ناحیه مورد نظر است، گستره‌ی وسیعی از نیروهای بین اتمی و مولکولی و ابعاد طول داخلی (فاصله بین اتم‌ها در شبکه‌ی بلورین) در روابط ساختاری وارد شده است.

همانطور که اشاره شد، تئوری غیرمحلی ارینگن از جمله روش‌هایی است که اخیراً توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. این تئوری در حل مسائلی نظیر انتشار موج در محیط پیوسته، تحلیل ترک و مکانیک شکست بکار گرفته شده و نتایج حاصل از آن با مشاهدات تجربی هم‌خوانی دارد [۷].

در سال ۲۰۰۳ پدیسون[۶] [۸] برای اولین بار از تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلی به‌منظور مطالعه‌ی آثار اندازه در سازه‌های با ابعاد کوچک بهره گرفت. وی خمش میکرو/نانوتیرها را با مفهوم الاستیسیته‌ی غیرمحلی بررسی

1-Small scale effect

2-Couple stress elasticity theory
3- Strain gradient theory
4- Modified couple stress theory
5- Eringen's nonlocal elasticity theory
6- Pediesson

نمود و مشاهده کرد که آثار اندازه در مقیاس‌های کوچک مهم می‌باشد و بزرگی آثار اندازه به بزرگی پارامترهای غیرمحلی [1] وابسته است. سپس تعدادی از محققان برای مطالعه‌ی آثار اندازه بر روی رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها از این تئوری استفاده کردند. پین لو [2] و همکارانش[۹] در سال ۲۰۰۶ حل ارتعاش آزاد نانولوله‌ها را با استفاده از تئوری‌های تیر و با الگو گرفتن از فرم دیفرانسیلی تئوری غیرمحلی ارائه کردند. ردی [3] [۱۰] در سال ۲۰۰۷ تئوری‌های مختلف تیر نظیر اویلربرنولی، تیموشنکو، ردی و لوینسون [4] را برای آنالیز استاتیکی، دینامیکی و پایداری نانوسازه‌ها بازنویسی کرد. در سال ۲۰۰۹ آیدوگدو [5] [۱۱] بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحلی، به تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات نانوتیرها پرداخت. لی [6] و چنگ [7] [۱۲] در سال ۲۰۱۰ فرکانس‌های طبیعی نانوتیری با سطح مقطع غیریکنواخت را با درنظر گرفتن شرط مرزی گیردار با بکار بردن روش ریلی‌ریتز [8] ارائه کردند. سیمسک [9] [۱۳] در سال ۲۰۱۱ با استفاده از روش گالرکین و درنظر گرفتن فرض‌های تیر تیموشنکو، ارتعاشات نانولوله‌های تعبیه شده در محیط الاستیک را تحت بار دینامیکی بررسی کرد. وی تأثیر پارامترهای مختلف نظیر ضریب مقیاس، مدول فونداسیون [10] و سرعت حرکت بار را بر روی پاسخ دینامیکی مطالعه نمود.

علاوه‌بر تحلیل‌های دینامیکی مختلفی که با الگو گرفتن از تئوری‌های متفاوت تیر و بر مبنای روش‌های تحلیلی و عددی صورت گرفته است، در زمینه‌ی بررسی پایداری نانوسازه‌ها نیز نتایج قابل توجهی منتشر شده است. زنگ [11] به همراه همکارانش[۱۴] در سال ۲۰۰۶ کمانش الاستیک نانولوله‌های کربنی چندلایه‌ی تحت فشار شعاعی را با بکارگیری مدل پوسته بررسی کردند. مورمو [12] و همکارش[۱۵] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی و فرضیات تیر تیموشنکو به حل پایداری نانولوله‌های کربنی تک‌لایه در محیط الاستیک دست یافت. وی تأثیر پارامتر غیرمحلی، مدول فونداسیون و ابعاد نانولوله‌های تک جداره را بر روی بار کمانش مطالعه نمود. خادم‌الحسینی[۱۶] در سال ۲۰۰۹ کمانش پیچشی نانولوله‌ها را مورد بررسی قرار داده و نتایج حاصل از این تئوری را با شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی و روش‌های کلاسیک مقایسه کرد. بررسی‌های وی نشان داد که اختلاف بار کمانش محاسبه شده در تئوری‌های مختلف نظیر کلاسیک و غیرمحلی، در نانوسازه‌های با ابعاد کوچک چشمگیر است (حدود ۴۰٪). با افزایش قطر نانولوله، به‌تدریج این اختلاف کاهش یافته و مقادیر کلاسیک به مقادیر پیش‌بینی شده با تئوری غیرمحلی همگرا می‌شوند.

در سال ۲۰۱۰ سنتیلکومار [13] [۱۷] بار کمانش نانولوله‌های تک‌لایه را با استفاده از روش تبدیلات دیفرانسیلی برای چهار نوع شرط مرزی به دست آورد و برای بررسی صحت نتایج، نتایج این روش را با حل دقیق مقایسه کرد. ونگ [14] و همکارانش[۱۸] در سال ۲۰۱۰ با بهره‌گیری از مدل غیرمحلی ارینگن، تأثیر مقیاس کوچک را بر روی کمانش حرارتی نانولوله‌ها با درنظر گرفتن مدل تیموشنکو و با احتساب تأثیر تغییر شکل‌های برشی و اینرسی دورانی مطالعه کردند. آنها دریافتند که در مودهای بالاتر و به ازای نسبت‌های کوچک‌تر طول به قطر، برای پیش‌بینی دقیق بار کمانش باید آثار برش و اینرسی دورانی را مدنظر قرار داد. سیولک [15] به کمک دمیر [16] [۱۹] در سال ۲۰۱۱ کمانش و خیز نانولوله‌های تک‌لایه را با استفاده از تئوری ارینگن محاسبه کرده و با مقایسه‌ی نتایج غیرمحلی با اعداد به دست آمده از تئوری کلاسیک، متوجه شدند که با کاهش ابعاد سازه برای پیش‌بینی دقیق بار کمانش و نیز خیز آن، باید تأثیر نیروهای بین اتمی و مولکولی را درنظر گرفت. ونگ [17] و دوان [18] [۲۰]

1-Nonlocal parameter
2-Pin Lu
3-Reddy
4-Levinson
5-Aydogdu
6-Lee
7-Chang
8-Rayleigh Ritz
9-Simsek
10-Foundation modulus
11-Zhang Y.Q.
12-Murmu

13-Senthilkumar
14-Wang Yi-Ze
15-Civalek
16-Demir
17-Wang C.M.
18-Duan

در سال ۲۰۰۸ حل دقیقی را برای ارتعاش آزاد نانوحلقه‌ها[1] با بهره‌گیری از تئوری الاستیسیته غیرمحلی بمنظور وارد کردن آثار مقیاس کوچک منتشر کردند. آنها همچنین تأثیر تغییر شرایط مرزی را بر روی فرکانس‌های طبیعی نانوحلقه‌ها بررسی نمودند. تپه[2] [۲۱] در سال ۲۰۱۰ به بررسی رفتار نانولوله‌های خمیده تحت بارگذاری داخل صفحه‌ای پرداخت. وی تأثیر پارامتر غیرمحلی را بر روی خیز، نیروی برشی و ممان خمشی این نانوسازه‌ها به کمک روش مقادیر اولیه[3] مطالعه نمود. ونگ و دوان[۲۲] در سال ۲۰۰۷ حل دقیقی را برای خمش نانوورق‌های مدور متقارن، با شرایط تکیه‌گاهی ساده و گیردار منتشر کردند. ردی و آقابابایی[۲۳] در سال ۲۰۰۹ فرمول‌بندی تئوری الاستیسیته غیرمحلی را برای منظور نمودن اثر تغییر شکل‌های برشی مرتبه سوم برای ارتعاش آزاد و تغییر شکل خمشی ورق بازنویسی کردند. شهیدی و بابایی[۲۴] در سال ۲۰۱۰ پایداری ورق‌های چهارضلعی را با روش گالرکین مطالعه کرده و تأثیر پارامتر غیرمحلی و پارامترهای هندسی را بر روی بار کمانش بررسی نمودند.

انصاری[۲۵] در سال ۲۰۱۰ با روش اجزا محدود ارتعاش گرافین چند لایه در بستر ارتجاعی را برای ورق مستطیلی حل نمود.

با توجه به کمبود مطالعات انجام شده بر روی نانوسازه‌های غیر منظم، در این مقاله سعی بر آن است که رفتار مکانیکی این نوع نانوساختار مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور از مدل تیر کلاسیک به همراه تئوری الاستیسیته استفاده می‌شود. در این مقاله، اعوجاج نانولوله‌ها به صورت انحنای اولیه مدل شده است. معادلات حاکم بر خمش نانولوله‌ها با در نظر گرفتن اثر بستر الاستیک و با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی، بر مبنای اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل استخراج و سپس این معادلات با درنظر گرفتن شرایط مرزی ساده در دو انتهای سازه، به کمک روش گالرکین حل شده است.

1-Nanoring
2-Tepe
3-Initial values method

## ۲- معادلات حاکم

شکل دیفرانسیلی معادله‌ی متشکله با فرض تئوری غیرمحلی ارینگن [۲۶] برای مسائل یک بعدی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(1-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2})\sigma^{nl}=\sigma^{l},\ \mu=(e_0a)^2 \qquad (۱)$$

در رابطه فوق $\mu$ پارامتر غیرمحلی، $\boldsymbol{\sigma}^{nl}$ تانسور تنش غیرمحلی و $\boldsymbol{\sigma}^{l}$ تانسور تنش کلاسیک یا محلی می‌باشد. $a$ طول مشخصه داخلی (طول پیوندهای کربن-کربن، اندازه دانه[4] و...) است و برای تحلیل نانولوله‌های کربنی مقدار ۰/۱۴۲ نانومتر به آن اختصاص داده شده است[۲۷]. $e_0$ ضریب ثابتی است که مقدار آن برای هر ماده با روش‌های آزمایشگاهی تعیین می‌گردد. ارینگن عدد ۰/۳۹ را برای آن پیشنهاد کرد[۶]. مطالعات انجام شده نشان می‌دهند که انتخاب مناسب پارامتر $e_0$ برای انطباق کامل تئوری الاستیسیته غیرمحلی با نتایج تجربی دشوار است. ونگ[5] [28] در سال ۲۰۰۵، حدود $e_0a$ را بین ۰ تا ۲ نانومتر معرفی نمود. تحقیقات صورت گرفته بر روی نانوسازه‌ها و انتخاب پارامتر مقیاس در رنج ارائه شده توسط ونگ، نشان داد که انتخاب پارامتر غیرمحلی در این رنج، نتایج قابل قبولی را در مقایسه با شبیه‌سازی‌های دینامیک مولکولی و نتایج تجربی ارائه می‌دهد. در تحقیق حاضر، از مقادیر $(e_0a)^2=\mu=0,1,2,3,4(nm)^2$ برای شبیه‌سازی اثر اندازه کوچک استفاده شده است[29].

با توجه به کاربرد گسترده نانولوله‌ها در تقویت کامپوزیت‌ها، تلاش بسیاری از پژوهشگران به بررسی چگونگی رفتار نانولوله‌های تعبیه شده در ماتریس‌های پلیمری معطوف شده است. ساده‌ترین مدلی که به کمک آن می‌توان تأثیر ماتریس را شبیه‌سازی نمود، مدل وینکلر است. در این مدل، از فنرهای الاستیک خطی برای شبیه‌سازی فونداسیون استفاده می‌شود. برای سازه‌ای با شکل هندسی و دستگاه مختصاتی مطابق شکل (۱)، روابط بین

4-Granular size
5-Wang Q

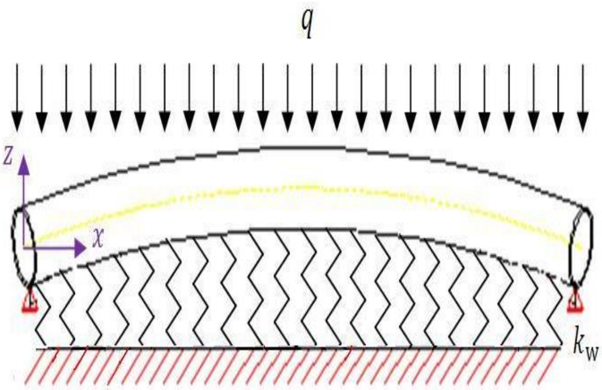
کرنش و تغییر انحنای صفحه میانی را با جابه‌جایی‌ها، می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon^0 + z\kappa \tag{۲}$$

در رابطه‌ی فوق، $\varepsilon^0$و $\kappa$ به ترتیب به کرنش کشسانی و کرنش خمشی اشاره دارند و با رابطه‌ی زیر به میدان جابجایی مرتبط می‌شوند

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{2}[(w_{,x})^2 - (w_{0,x})^2],\ \kappa = -[w_{,xx} - w_{0,xx}] \tag{۳}$$

$w_0$ و $w$ به ترتیب به شکل اولیه و نهایی نانولوله اشاره دارند.




شکل (۱) نانولوله‌ی خمیده‌ی تعبیه شده بر روی بستر الاستیک

روابط تعادل با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل کل به‌دست می‌آیند. انرژی پتانسیل کل ($\Pi$)، شامل مجموع انرژی ذخیره شده در سیستم و پتانسیل نیروهای خارجی است. انرژی ذخیره شده در سیستم متشکل از انرژی کرنش خمشی، انرژی کرنش کششی و انرژی ذخیره شده در فونداسیون می‌باشد. بنابراین، تغییر انرژی پتانسیل کل، با درنظر گرفتن رفتار الاستیک خطی، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta\pi = \int_0^L (-N\delta\varepsilon + M\delta\kappa)dx + \int_0^L q\delta w dx + \int_0^L k_w(w - w_0)\delta w dx = 0 \tag{۴}$$

که در رابطه (۴) $N$ نیروی محوری، $M$ ممان خمشی، $q$ بار گسترده جانبی بر واحد طول ، $k_w$ ضریب الاستیک وینکلر می‌باشند. با محاسبه‌ی $\delta\varepsilon^0$ و $\delta\kappa$ از رابطه (۳) و جایگذاری در رابطه (۴) و اعمال انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء بر روی عبارت‌های موجود معادلات تعادل به فرم زیر ظاهر می‌شوند

$$Nw_{,xx} - M_{,xx} + k_w(w - w_0) + q = 0 \tag{۵}$$

با تعریف گشتاور منتجه به صورت زیر

$$M = \int_A \sigma^{nl} z dA \tag{۶}$$

و با استفاده از رابطه (۱)، خواهیم داشت

$$M - \mu\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EI\kappa \tag{۷}$$

که در آن $E$ و $I$ به ترتیب، مدول الاستیسیته و ممان اینرسی سطح مقطع نانولوله خمیده می‌باشند.

با جای‌گذاری مشتق دوم گشتاور خمشی از رابطه (۵) در رابطه (۷)، گشتاور غیرمحلی را می‌توان بر حسب میدان جابجایی به صورت زیر بدست آورد:

$$M = -EI(w_{,xx} - w_{0,xx}) + \mu[Nw_{,xx} + k_w(w - w_0) + q] = 0 \tag{۸}$$

که در آن $N$ نیروی اعمال شونده به نانولوله در راستای محور است که با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$N = -\int \sigma dA \tag{۹}$$

با قرار دادن رابطه (۸) در رابطه‌ی (۵)، معادله‌ی تعادل به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$EI(w_{,xxxx} - w_{0,xxxx}) + (1 - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2})[k_w(w - w_0) + q + Nw_{,xx}] = 0 \tag{۱۰}$$

با صفر قرار دادن $\mu$ در رابطه‌ی (۸)، رابطه‌ی کلاسیک تعادل تیرها با در نظرگرفتن نیروی محوری بدست می‌آید [30]. در رابطه‌ی (۸) نیروی محوری حاصل از تغییر فرم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$N = \frac{EA}{2L}\int_0^L \left[(w_{0,x})^2 - (w_{,x})^2\right]dx \tag{۱۱}$$

از کمیت‌های بی‌بعد زیر برای ساده‌سازی استفاده می‌شود:

$$\zeta = \frac{x}{L}, \eta = \frac{w}{2\rho}, \eta_0 = \frac{w_0}{2\rho}, \alpha = \mu(\frac{\pi}{L})^2$$
$$Q = \frac{qL^4}{2\pi^4 EI\rho}, N^* = \frac{NL^2}{\pi^2 EI}, K_w = \frac{k_w L^4}{\pi^4 EI} \tag{۱۲}$$

که در آن $\rho$ شعاع ژیراسیون[۱] سطح مقطع نانولوله خمیده می‌باشند. با استفاده از رابطه (۱۰) فرم بی‌بعد رابطه (۸) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\eta_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} - \eta_{0,\zeta\zeta\zeta\zeta} + \left(1-\frac{\alpha}{\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)[\pi^2 N^* \eta_{,\zeta\zeta} + \pi^4 K_w(\eta-\eta_0) + \pi^4 Q] = 0 \qquad (۱۳)$$

## ۳- روش حل

فرم باقیمانده‌ی وزنی رابطه‌ی (۱۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\int_0^L \left(\eta_{,\zeta\zeta\zeta\zeta} - \eta_{0,\zeta\zeta\zeta\zeta} + \left(1-\frac{\alpha}{\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\times [\pi^2 N^* \eta_{,\zeta\zeta} + \pi^4 K_w(\eta-\eta_0) + + \pi^4 Q]\right)\chi dx = 0 \qquad (۱۴)$$

در اینجا، $\chi$ معرف تابع وزن است.

در نتایجی که اخیراً توسط محققان منتشر شده، انحنای نانولوله به‌عنوان فاکتور مهمی در تعیین مدول الاستیسیته‌ی نانولوله‌های تقویت‌کننده‌ی کامپوزیت‌ها معرفی شده است. به‌عنوان مثال، فیشر[۲] و همکارانش[31] با استفاده از روش المان محدود نشان دادند که مدول الاستیسیته‌ی پیش‌بینی شده برای نانوکامپوزیت‌ها، با درنظر گرفتن تأثیر انحنای نانولوله‌ها، انطباق بیشتری با نتایج تجربی در مقایسه با حالتی که از اثر انحنا چشم‌پوشی شود، دارد.

نظر به این که نتایج حاصل از شبیه‌سازی انحنا به صورت توابع سینوسی، با نتایج آزمایشگاهی همخوانی دارد[32] و [33]، در اینجا از تابع سینوسی برای تقریب شکل اولیه استفاده می‌شود:

$$\eta_0 = h\sin\pi\zeta \qquad (۱۵)$$

شکل نهایی با بسط توابع سینوسی زیر تخمین زده می‌شود:

$$\eta(\zeta) = \sum_{n=1}^{N} d_n \sin n\pi\zeta \qquad (۱۶)$$

در رابطه (۱۵) $h$ نشان‌دهنده ماکزیمم ارتفاع بی‌بعد می‌باشد.

با استفاده از روش گالرکین (درنظر گرفتن تابع وزنی به صورت $\chi = \sin(m\pi\xi)$ و جایگذاری رابطه‌ی (۱۶) در رابطه‌ی (۱۴) معادله‌ی غیرخطی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{n} n^4 d_n \delta_{mn} - h\delta_{m1}\\ &+\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 d_n{}^2 - h^2\right)\left(\sum_{n=1}^{N}(n^2+\alpha n^4)d_n\delta_{mn} + \right.\\ &K_w\left(\sum_{n=1}^{N}(1+\alpha n^2)d_n\delta_{mn} - (1+\alpha)h\delta_{m1}\right)\\ &+2q(1-\cos m\pi)\left(\frac{1}{m\pi}+\frac{m\alpha}{\pi}\right) = 0\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

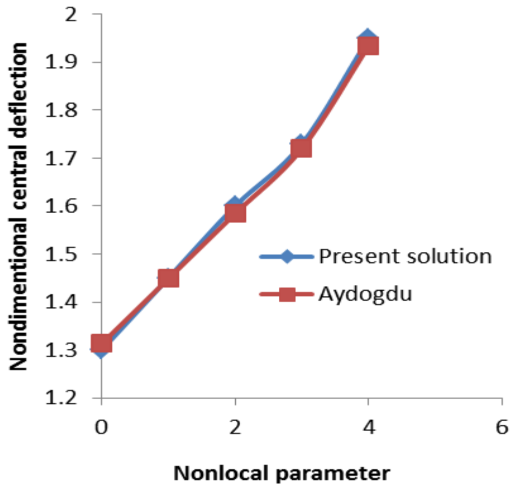
در رابطه (۱۷)، $\delta_{mn}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & for\ m=n \\ 0 & for\ m\neq n \end{cases} \qquad (۱۸)$$

رابطه‌ی (۱۷) دربردارنده‌ی مجموعه‌ی معادلات غیرخطی بوده که برای تعیین $d_n$ ها، بازای ارتفاع اولیه‌ی مدنظر، به صورت همزمان حل می‌شوند. برای رسیدن به این هدف از روش عددی نیوتن رفسون استفاده شده است.

## ۴- نتایج و بحث

برای اعتبارسنجی، نتایج حاصل از تحلیل خیز نانولوله با صرفنظر از انحنای آن، با در نظر گرفتن نانولوله‌ای به طول ۱۰ نانومتر، با مقادیر بی‌بعد بدست آمده توسط آیدوگدو[۳][۳۴] در شکل (۲) مقایسه شده‌اند.

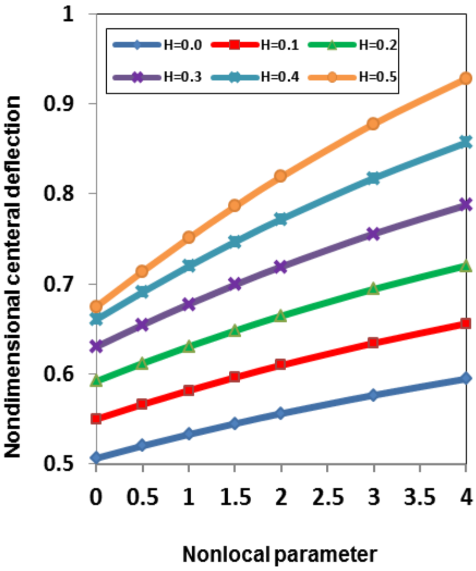



شکل (۲) مقایسه نتایج حاصل از تحلیل خیز نانولوله بدون انحنا

1-Radius of Gyration
2-Fisher
3-Aydogdu

همانطور که در شکل (۲) دیده می‌شود، نتایج حاصل از کار حاضر (رابطه‌ی (۱۲)) با مقادیر ارائه شده توسط آیدوگدو منطبق است. این در حالیست که فقط از یک ترم برای تخمین جابجایی استفاده شده‌است.

شکل (۳) نحوه‌ی تغییر مقدار خیز وسط نانولوله‌ی خمیده را با پارامتر غیرمحلی نشان می‌دهد. شدت بار اعمالی بی‌بعد جانبی ۰/۵ درنظر گرفته شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که افزایش انحنای اولیه منجر به افزایش خیز می‌گردد. این روند افزایشی تحت تأثیر پارامتر غیرمحلی قرار گرفته و با افزایش تأثیر مقیاس کوچک از سختی سازه کاسته شده و در نتیجه خیز نانولوله افزایش می‌یابد. این پدیده بدین معناست که با فرض تئوری ارینگن، نانوسازه‌ها انعطاف‌پذیرتر مدل می‌شوند.



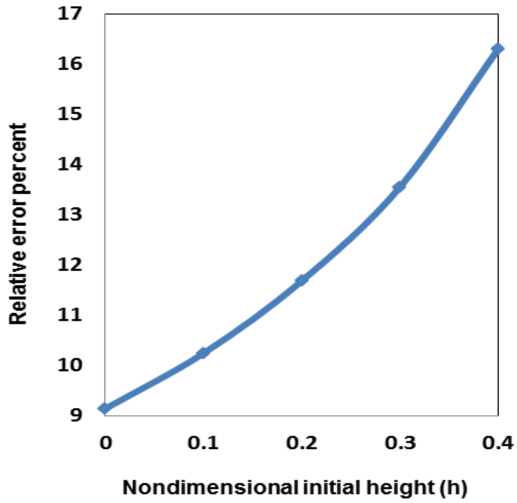

شکل(۳) تغییرات خیز وسط نانولوله با پارامتر غیرمحلی برای انحناهای اولیه متفاوت (L=10 nm)

برای بررسی شدت تأثیر مقیاس کوچک بر روی خیز، درصد خطای نسبی برحسب پارامتر غیرمحلی برای نانولوله‌ای با دهانه‌ی[1] ۱۰ نانومتر و $\mu = 2nm^2$ در شکل (۴) نمایش داده شده است. درصد خطای نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\text{Error percent}=\left|\frac{local\ result - nonlocal\ rasult}{local\ result}\right| \times 100$$

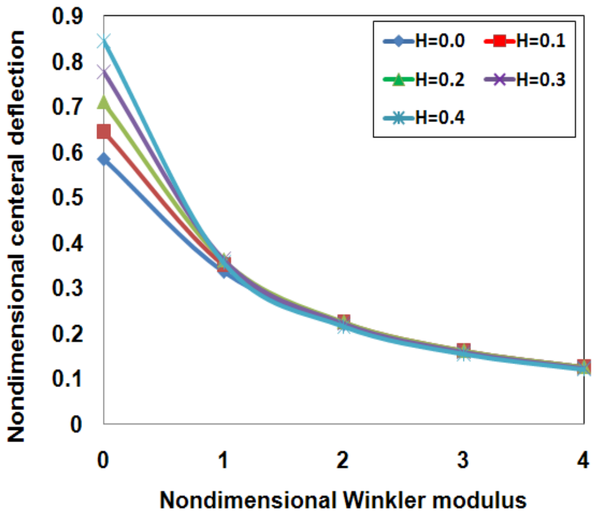
1-Span

شکل (۴) نشان می‌دهد که با افزایش انحنای اولیه، اختلاف مقادیر حاصل از تحلیل خیز با استفاده از تئوری غیرمحلی و کلاسیک افزایش می‌یابد. بگونه‌ای که به ازای انحنای بی‌بعد ۰/۴ این اختلاف به ماکزیمم مقدار خود یعنی ۱۶/۳۰٪ می‌رسد.




شکل(۴) درصد خطای نسبی برحسب انحنای بی‌بعد اولیه (L=10nm)

در شکل (۵) تغییرات خیز با مدول فونداسیون وینکلر به ازای $\mu = 4nm^2$ بررسی شده‌است. با افزایش سختی بستر الاستیک، خیز نانولوله کاهش می‌یابد. این روند کاهشی برای کلیه‌ی انحناهای اولیه‌ی مدنظر به‌وضوح در شکل دیده می‌شود. همانطور که در شکل مشهود است برای $k_w$ های بزرگتر از ۱، افزایش انحنای اولیه بر روی خیز نانولوله بی‌تأثیر است.




شکل (۵) تأثیر سختی بستر الاستیک بر روی خیز مرکز برای مقادیر مختلف انحنای اولیه

در جدول (۱) خیز نانولوله با درنظر گرفتن پارامترهای غیرمحلی مختلف و بازای مقادیر متفاوت مدول فونداسیون محاسبه شده است. انحنای بی‌بعد اولیه‌ی نانولوله ۰/۲ فرض شده است.

جدول (۱) تغییرات خیز نانولوله با مدول فونداسیون وینکلر برای مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی

| $\mu$ | $K_W = 0$ | $K_W = 2$ | $K_W = 4$ |
|---|---|---|---|
| ۰ | ۰/۵۸۹۶ | ۰/۲۱ | ۰/۱۲۴۵ |
| ۰/۵ | ۰/۶۰۸۶ | ۰/۲۱۲۶ | ۰/۱۲۵ |
| ۱ | ۰/۶۲۶۳ | ۰/۲۱۴۷ | ۰/۱۲۵۱ |
| ۱/۵ | ۰/۶۴۲۷ | ۰/۲۱۶۹ | ۰/۱۲۵۳ |
| ۲ | ۰/۶۵۸۵ | ۰/۲۱۹ | ۰/۱۲۵۷ |

با توجه به نتایج می‌توان این گونه استنباط نمود که سختی بستر الاستیک نقش مهمی را در کاهش خیز نانولوله ایفا می‌نماید. از سوی دیگر افزایش پارامتر غیرمحلی افزایش خیز را به دنبال خواهد داشت. البته با افزایش سختی فونداسیون تأثیر مقیاس کوچک کاهش می‌یابد.

## ۵-نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این مقاله، خمش نانولوله‌های خمیده کم‌انحنا بر روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم با استفاده از تئوری غیرمحلی ارینگن استخراج و سپس به کمک روش گالرکین حل شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش ضریب مقیاس ($\mu$)، خیز نانولوله افزایش می‌یابد. این بدین معنا است که تئوری غیر محلی، سختی سیستم را کاهش می‌دهد. از سوی دیگر با افزایش انحنای اولیه، خیز بیشینه افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش سختی فونداسیون، خیز نانولوله کاهش می‌یابد. این روند کاهشی تحت تأثیر پارامتر مقیاس قرار گرفته و با افزایش آن، خیز افزایش می‌یابد.

## مراجع


[1] Iijima S., “Helical microtubules of graphitic carbon”, *Nature*, 354, 1991, pp. 56-58.

[2] Thostenson E.T., Ren, Z., Chou, T.W., “Advances in the science and technology of carbon nanotubes and their composites: a review”, *Composites Science and Technology*, Vol. 61, 2001, pp. 1899–1912.

[3] Zhou S.J., Li Z.Q., “Length scales in the static and dynamic torsion of a circular cylindrical micro-bar”, *Shandong University Technology*, Vol. 31, 2001, pp. 401–407.

[4] Fleck N.A., Hutchinson J.W., “Strain gradient plasticity: theory and experiment”, *Acta Metal Material*, Vol. 42, 1994, pp. 475-487.

[5] Yang A.C.M., Chong D.C.C., Lam P., “Couple stress based strain gradient theory for elasticity”, *Solids Structure*, Vol. 39, 2002, pp. 2731–2743.

[6] Eringen A.C., “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, 1983, pp. 4703–4710,.

[7] Lu P., Lee H.P., Lu C., Zhang P.Q., “Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 99, 2006, No. 073510.

[8] Peddiseon P., Buchanan J.R., McNitt R.P., “Application of nonlocal continuum models to nanotechnology”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, 2003, pp. 305-312.

[9] Lu P., Lee H.P., Lu C., Zhang P.Q., “Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes”, *International Journal of Solids Structure*, Vol. 44, 2007, pp. 5289-5300.

[10] Reddy J.N., “Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams”, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 45, 2007, pp. 288-307.

[11] Aydogdu M., “A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration”, *Physica E*, Vol. 41, 2009, pp. 1651-1655.

[12] Lee H.L., Chang W.J., “Surface and small scale effects on vibration analysis of a nonuniform nanocantilever beam”, *Physica E*, Vol. 43, 2010, pp. 466-469.

[13] Simsek M., “Forced vibration of an embedded single-walled carbon nanotube traversed by a moving load using nonlocal Timoshenko beam theory”, *Steel & Composite Structures*, Vol. 11, 2011, pp. 59-76.

[14] Zhang Y.Q., Liu G.R., Han X., "Effect of Small Length Scale on Elastic Buckling of Multi-Walled Carbon Nanotubes Under Radial Pressure", *Physics Letters A*, Vol. 69, 2006, pp. 370-376.

[15] Murmu T., Pradhan S.C., "Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM", *Physica E*, Vol. 41, 2009, pp. 1232–1239.

[16] khademolhosseini F., "Application of Nonlocal continuum shell models for torsion of single-walled carbon nanotubes", *Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology*, 2009.

[17] Senthilkumar V., "Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube with nonlocal continuum elasticity by using differential transform method", *Advanced science letter*, Vol. 3**,** 2010, pp. 337-340.

[18] Wang Yi-Ze., Li F.M., Kishimoto K., "Scale effects on thermal buckling properties of carbon nanotube", *Physics Letters A*, Vol. 374, 2010, pp. 4890-4893.

[19] Civalek O., Demir C., "Buckling and bending analysis of cantilever carbon nanotubes using the Euler-Bernoulli beam theory based on nonlocal continuum model", *Asian journal of Civil Engineering*, Vol. 12, 2011, pp. 651-661.

[20] Wang C.M., Duan W.H., "Free vibration of nanorings/arches based on nonlocal elasticity", *Journal of Applied Physics*, Vol. 104, 2008, 014303.

[21] Tepe A., "Nano-scale analysis of curved single walled carbon nanotubes for in-plane loading", *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, Vol. 7,2010, pp. 2405-2411.

[22] Duan W.H., Wang C.M., "Exact solutions for axisymmetric bending of micro/nanoscale circular plates based on nonlocal plate theory", *Nanotechnology*, Vol. 18, 2007, No. 385704.

[23] Aghababaei R., Reddy J.N., "Nonlcal third order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 326, 2009, pp. 227-289.

[24] Babaei H., Shahidi A.R., "Small scale effects on the buckling of quadrilateral nanoplates based on nonlocal elasticity theory using the Galerkin method", *Archive Applied Mechanics*, Vol. 81, 2010, pp.1051-1062.

[25] Ansari R., "Nonlocal finite element model for vibration of embedded multi layered graphene sheets", *Computational Materials Science*, Vol. 49, 2010, pp. 831–838.

[26] Eringen A.C., "Nonlocal Continuum Field Theories", Springer, NewYork, 2002.

[27] Zhang Y.Q., Liu G.R., Xie X.Y., "Free transverse vibrations of double walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity", *Physics Review B*, Vol. 71(19), 2005, No. 195404.

[28] Wang Q., "Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum model", *Journal of Applied Physics*, Vol. 98, 2005, No. 124301.

[29] Phadikar J.K., Pradhan S.C., "Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates", *Computational materials science*, Vol. 49, 2010, pp. 492-499.

[30] Fung Y.C., Kaplan A., "Buckling of low arches or curved beams of small curvature", NACA TN 2840,1952.

[31] Fisher F.T., Bradshaw R.D., Brinson, L.C., "Fiber waviness in nanotube-reinforced polymer composites-I: modulus prediction using effective nanotube properties", *Composite Science Technology*, Vol. 63, 2003, pp. 1689-2391.

[32] Qian D., Dickey E.C., Andrews, R., Rantell, T., "Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube-polystyrene composites", *Applied physics Letter*, Vol. 76(20), 2003, pp. 2868-2938.

[33] Bradshaw R.D., Fisher F.T., Brinson L.C., "Fiber waviness in nanotube-reinforced polymer composites—II: modeling via numerical approximation of the dilute strain concentration tensor", *Composite Science Technology*, Vol. 63, 2003, pp. 1705-1727.

[34] Aydogdu M., "A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending", *buckling and vibration,Physica E*, Vol. 41, 2009, pp. 1651-1655.