فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

تحلیل کمانش مکانیکی غیرموضعی نانو صفحات تک لایه دایروی به روش عددی مربعات دیفرانسیلی

مصطفی صادقیان [۱*]، مهرداد جبارزاده [۲]

* نویسنده مسئول: msadeghian@mshdiau.ac.ir

چکیده

در این مقاله، تحلیل کمانش صفحات نسبتا ضخیم دایروی گرافن با خواص ارتوتروپیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن، اصل کار مجازی، تئوری مرتبه اول برشی و کرنش‌های فون-کارمن، روابط حاکم برحسب جابجایی‌ها بدست آمده و با استفاده از روش تعادل همسایگی و همچنین بهره‌گیری از روش عددی مربعات دیفرانسیلی (DQ) همراه با توزیع غیریکنواخت نقاط (چیبشف-گوس-لوباتو) جهت حل معادلات بدست آمده، استفاده شده است. جهت اعتبار سنجی، نتایج بدست آمده با نتایج کمانش در مراجع دیگر مقایسه شده و اثرات ضریب غیرموضعی، ضخامت بی‌بعد و شعاع بر بارهای بی‌بعد کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. از نتایج مشاهده می‌شود که بار بی‌بعد کمانش صفحات گرافن با کاهش انعطاف پذیری از نظر شرط مرزی، با افزایش ضریب غیرموضعی، افزایش بیشتری می‌یابد و همچنین بار بی‌بعد کمانش با افزایش ضخامت بی‌بعد، کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی

کمانش مکانیکی ،دایروی، تئوری غیرموضعی الاستیسیته، روش مربعات دیفرانسیلی

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، خراسان، ایران.

۲-استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، خراسان، ایران

۱- مقدمه

با توسعه روزافزون علم و فناوری، مواد و ساختارهایی با خواص برتر و پیشرفته مورد نیاز است. فناوری نانو[۱] به مواد و ساختارها در مقیاس نانو می-پردازد و صفحات گرافن زیر شاخه‌ای از این ریز ساختارها می‌باشد که در ساخت باطری‌ها[۲]، سنسورهای بیولوژیکی و شیمیایی[۳]، سلول-های خورشیدی[۴] و غیره کاربرد دارد. صفحات گرافن یک لایه‌ای از دسته کربن هستند که در یک ساختار شش ضلعی(لانه زنبوری) قرار گرفته‌اند و در واقع برای اولین بار به عنوان یک کریستال دو بعدی مطرح و نخستین بار در سال ۲۰۰۴ تولید شدند[۵]. گرافن از نظر تئوری، به دلیل داشتن یک سطح خاص بزرگ، تحرک پذیری ذاتی بالا، مدول یانگ و هدایت حرارتی بالا در سال-های اخیر توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است[۶].

مشاهدات تجربی [۷] یکی از شیوه‌های مدلسازی ساختارهای نانو می‌باشد که به دلیل پر هزینه بودن آن از روش‌های دیگری نظیر: مدلسازی اتمی، مکانیک محیط پیوسته اتمی هیبرید و مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شود. مدلسازی اتمی شامل روش‌هایی مانند دینامیک مولکولی کلاسیک، دینامیک مولکولی اتصال سفت[1] و تئوری تابعی چگالی[2] می‌باشد[۸و۹]. مکانیک محیط پیوسته اتمی هیبرید این امکان را می‌دهد تا پتانسیل درون اتمی را در تحلیل محیط پیوسته با برابر قرار دادن انرژی پتانسیل ساختار مواد نانو با انرژی کرنش مکانیکی المان حجمی مدل محیط پیوسته بدست آید[۱۰]. مدلسازی به روش محیط‌های پیوسته به مراتب نسبت به دو روش قبل کم هزینه‌تر بوده و شامل تئوری‌های کلاسیک(موضعی)، تئوری الاستیسته غیرموضعی ارینگن[۱۱]، تئوری الاستیسیته گرادیان کرنشی اصلاح شده[3][۱۲] و تئوری تنش کوپل اصلاح شده[4][۱۳] می‌باشد که برای ساختارهای نانو در سیستم‌هایی با مقیاس بزرگ استفاده می‌شوند[۱۴]. به این خاطر از مدلسازی به روش محیط پیوسته به عنوان راهی در تحلیل ساختارهایی نظیر کمانش می توان استفاده کرد. در این بین، تئوری الاستیسته غیرموضعی ارینگن دارای روابط حاکم نسبتا ساده‌تری می‌باشد و اثر مقیاس کوچک در ساختارهایی با مقیاس نانو و میکرو را محاسبه می کند.

تحقیقات گسترده‌ای در زمینه صفحات نانو بر اساس تئوری غیرموضعی ارینگن صورت گرفته است. از جمله این محققین می توان به پرادهان و همکارانش [۱۵]، اشاره نمود که کمانش ورق‌های مستطیلی تک لایه گرافن را با استفاده از روش DQ بررسی کرده و نشان دادند که ضریب غیرموضعی تاثیر بسزایی بر روی صفحات گرافن دارد و باعث کاهش بارهای کمانش بر آن‌ها می‌شود. سماعی و همکارانش[۱۶]، پاسخ کمانشی صفحات گرافن مستطیلی ایزوتروپیک تحت بارگذاری یکنواخت را به صورت تحلیلی ارائه کردند و در آن برای مدل سازی صفحات گرافن نسبتا ضخیم از تئوری مرتبه اول برشی میندلین استفاده نمودند. آن‌ها در مقاله خود رفتار کمانشی نانو ورق مستطیلی بر روی بستر پسترناک را با استفاده از مدل غیرموضعی صفحه میندلین به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. فرج‌پور و همکارانش[۱۷] کمانش صفحات گرافن با ضخامت متغیر را بررسی نموده و نشان دادند رفتار کمانش صفحه گرافن تک لایه بشدت به ضریب غیرموضعی وابسته است. نارندر و گوپالکریشنن[۱۸]، به تحلیل دمای کمانش بحرانی در نانو تیوب‌های تک لایه براساس مدل تیر تیموشنکو پرداخته و مشاهده کردند که اثرات ضریب غیرموضعی و ضریب پایه وینکلر دو جزء مهم در تحلیل کمانش حرارتی صفحات گرافن می‌باشند. در تحقیق دیگری، لیم و همکارانش [۱۹]، به بررسی کمانش حرارتی نانو میله‌ها پرداختند. آن‌ها در تحلیل خویش از تئوری غیرموضعی ارینگن برای بررسی نانو میله ها و نانو تیوب‌ها و نانو تیرها پرداخته و تاثیر تغییرات دما بر کمانش بحرانی را ارزیابی نمودند. فرج‌پور و همکاران[۲۰]، کمانش ورق‌های مستطیلی با خواص ارتوتروپیک را با استفاده از

---
[1] Tight-binding molecular dynamics
[2] Density functional theory
[3] Modified Strain Gradient Elasticity
[4] Modified Couple Stress Theory

روش DQ ارائه نمودند. تجزیه و تحلیل ارتعاشات حرارتی گرافن تک لایه مستطیل شکل تعبیه شده در محیط الاستیک پلیمر با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرموضعی توسط پرسنا کومار و همکارانش[۲۱]، مورد مطالعه قرار گرفت که آن‌ها در تحلیل خود از روش ناویر استفاده نمودند. امام [۲۲]، مدلی برای تحیل کمانش و پس کمانش نانوتیرها ارائه نمود که برای تئوری‌های گوناگون نظیر تئوری مرتبه اول برش و مراتب بالاتر و کلاسیک مناسب است. محمدی و همکارانش[۲۳]، به تحلیل رفتار کمانشی صفحات ارتوتروپیک مستطیلی تک لایه نانو در محیط حرارتی بر پایه الاستیک به کمک روش DQ بررسی نمود. آن‌ها در تحقیق خود شرط مرزی مختلف را بررسی نمودند و نشان دادند که بارهای کمانش صفحات گرافن به ضریب غیرموضعی وابسته است. سرامی و ازهری[۲۴]، به تحلیل ارتعاشات و کمانش صفحات مستطیلی به روش نوار[۱] محدود پرداختند و صفحه گرافن را با خاصیت ایزوتروپیک و ارتوتروپیک برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی نمودند. گلمکانی و رضاطلب[۲۵] کمانش صفحات ارتوتروپیک مستطیلی تحت بارهای غیریکنواخت را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و به کمک روش مربعات دیفرانسیلی(DQ) بررسی نمودند. در مقاله آن‌ها تمام لبه های صفحه گرافن تحت بار متغیر خطی فرض گردیده و مشاهده نمودند که با افزایش ضریب غیرموضعی بارهای کمانش در ابتدا به صورت غیرخطی سپس به صورت خطی کاهش می‌یابند.

در زمینه کمانش صفحات دایروی گرافن تحت بارهای مکانیکی درون صفحه‌ای، کارهای اندکی ارائه شده است که از جمله آن‌ها فرج‌پور و همکارانش[۲۶] می‌باشند که تحلیل کمانش متقارن ورق‌های دایروی گرافن تحت بارگذاری یکنواخت شعاعی به کمک تئوری کلاسیک را ارائه کردند. همچنین در پژوهش راوری و شهیدی[۲۷]، از روش تفاضل محدود برای کمانش نانوورق‌های دایروی حلقوی به کمک تئوری کلاسیک استفاده شده است.

بدرود و همکارانش[۲۸]، در پژوهش خود کمانش متقارن و غیرمتقارن نانو ورق‌های نازک، با بهره‌گیری از تئوری مرتبه اول برشی غیرموضعی ارینگن همراه با کرنش‌های خطی، بررسی نمودند.آن‌ها اثرات پارامترهای هندسی نانو ورق، شرایط تکیه گاهی و پارامترهای غیرموضعی بر روی رفتار کمانشی نانو ورق دایروی و حلقوی را ارزیابی نمودند.

در پژوهش حاضر تحلیل کمانش صفحات نسبتا ضخیم دایره‌ای گرافن همراه با خصوصیات ارتوتروپیک و کرنش های غیرخطی بررسی می‌شود. اثرات مقیاس کوچک به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن اعمال شده است. معادلات تعادل از روش انرژی محاسبه و برای حل آن‌ها از روش عددی مربعات دیفرانسیلی استفاده شده است.

۲- روابط حاکم

شکل ۱، یک صفحه گرافن دایره‌ای را نشان می‌دهد. جابجایی‌ها بر اساس تئوری مرتبه اول برشی به صورت رابطه (۱) می‌باشند[۲۹]:

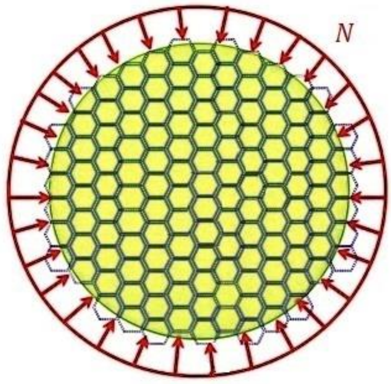
$$u(r,\theta,z)=u_0(r)+z\varphi_r \tag{۱}$$

$$v(r,\theta,z)=0 \tag{۲}$$

$$w(r,\theta,z)=w_0(r) \tag{۳}$$

که در رابطه فوق u، v و w مولفه‌های جابجایی هر نقطه دلخواهی در فاصله z از صفحه میانی، به ترتیب در جهات r، θ و z می‌باشند. همچنین u_0، v_0و w_0 مولفه‌های جابجایی صفحه میانی ورق بوده که خود تابعی از متغیر r می‌باشند و عبارت φ_r چرخش المان حول محور θ نامیده می‌شود.

---
[۱] finite strip



شکل (۱) صفحه گرافن دایروی تحت بار N

با استفاده از فرضیات فون کارمن برای روابط غیرخطی کرنش- جابجایی، مولفه‌های کرنش بر حسب جابجایی به صورت رابطه (۲) بدست می‌آیند[۲۹]:

$$\varepsilon_r = \frac{du_0}{dr} + z\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_0}{dr}\right)^2 \tag{۴}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_0}{r} + z\frac{\varphi}{r} \tag{۵}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{dw_0}{dr} + \varphi\right) \tag{۶}$$

در تئوری مکانیک پیوسته موضعی، تنش در یک نقطه به کرنش در همان نقطه وابسته است اما ارینگن نشان داد در تئوری مکانیک پیوسته غیرموضعی تنش در یک نقطه به کرنش در تمام محیط پیوسته وابسته است [۱۶]. معادله حاکم در تئوری مکانیک پیوسته غیرموضعی توسط ارینگن به صورت زیر ارائه گردیده است[۱۶]:

$$\sigma^{NL} - \mu\nabla^2\sigma^{NL} = \sigma^L \tag{۷}$$

μ پارامتر غیرمحلی می‌باشد. رابطه تنش‌های غیرموضعی می‌تواند بر طبق رابطه (۷) به صورت رابطه کلی، در محیط قطبی به صورت زیر تبدیل شود:

$$\sigma_r^{NL} - \mu\left(\nabla^2\sigma_r^{NL} - \frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{NL}}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\left(\sigma_r^{NL} - \sigma_\theta^{NL}\right)\right) = \sigma_r^L \tag{۸}$$

$$\sigma_\theta^{NL} - \mu\left(\nabla^2\sigma_\theta^{NL} + \frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{NL}}{\partial\theta} + \frac{2}{r^2}\left(\sigma_r^{NL} - \sigma_\theta^{NL}\right)\right) = \sigma_\theta^L \tag{۹}$$

$$\sigma_{r\theta}^{NL} - \mu\left(\nabla^2\sigma_{r\theta}^{NL} - \frac{4}{r^2}\sigma_{r\theta}^{NL} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sigma_r^{NL} - \sigma_\theta^{NL}\right)\right) = \sigma_{r\theta}^L \tag{۱۰}$$

$$\sigma_{rz}^{NL} - \mu\left(\nabla^2\sigma_{rz}^{NL} - \frac{1}{r^2}\sigma_{rz}^{NL} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{\theta z}^{NL}}{\partial\theta}\right) = \sigma_{rz}^L \tag{۱۱}$$

$$\left(\sigma_{\theta z}^{NL} - \mu\left(\nabla^2\sigma_{\theta z}^{NL} - \frac{1}{r^2}\sigma_{\theta z}^{NL} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{rz}^{NL}}{\partial\theta}\right)\right) = \sigma_{\theta z}^L \tag{۱۲}$$

که در روابط (۸-۱۲)، ∇^2 عملگر لاپلاسین در محیط قطبی است و به صورت کلی به صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{۱۳}$$

σ^{NL} تنش غیرموضعی و σ^L تنش موضعی استکه به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود:

$$\sigma^L = C : \varepsilon \tag{۱۴}$$

در این مطالعه صفحه گرافن به صورت ارتوتروپیک بررسی شده است و ماتریس سفتی C به صورت زیر تعیین می-گردد:

$$C=\begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-v_{12}v_{21})} & \frac{v_{21}E_2}{(1-v_{12}v_{21})} & 0 \\ \frac{v_{12}E_2}{(1-v_{12}v_{21})} & \frac{E_2}{(1-v_{12}v_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

با ترکیب معادلات (۷) و (۱۴) روابط تنش کرنش به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r^{NL} \\ \sigma_\theta^{NL} \\ \sigma_{rz}^{NL} \end{Bmatrix} - \mu\nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_r^{NL} \\ \sigma_\theta^{NL} \\ \sigma_{rz}^{NL} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-v_{12}v_{21})} & \frac{v_{21}E_2}{(1-v_{12}v_{21})} & 0 \\ \frac{v_{12}E_2}{(1-v_{12}v_{21})} & \frac{E_2}{(1-v_{12}v_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} \quad (۱۶)$$

E_1 و E_2 مدول الاستیسیته در جهات ۱و ۲ و همچنین v_{12} و v_{21} ضریب پواسون در جهات مذکور و G_{12} مدول برشی می‌باشد.

منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند[۱۶]:

$$(N_r, N_\theta, Q_r)^{NL} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r{}^{NL}, \sigma_\theta{}^{NL}, \sigma_{rz}{}^{NL}) dz \quad (۱۷)$$

$$(M_r, M_\theta)^{NL} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_r{}^{NL}, \sigma_\theta{}^{NL}) z dz \quad (۱۸)$$

که با استفاده از رابطه غیرموضعی ارینگن داریم:

$$\left(1-\mu\nabla^2\right) N_i^{Nl} = N_i^l, i=(r,\theta) \quad (۱۹)$$

$$\left(1-\mu\nabla^2\right) M_i^{Nl} = M_i^l, i=(r,\theta) \quad (۲۰)$$

$$\left(1-\mu\nabla^2\right) Q_r^{Nl} = Q_r^l \quad (۲۱)$$

که منتجه‌های نیروی درون صفحه‌ای و نیروی برشی و گشتاور موضعی بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_r^L = \frac{E_1 h}{(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_0}{dr}\right)^2\right) + \frac{v_{12}E_2 h}{(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{u_0}{r}\right) \quad (۲۲)$$

$$N_\theta^L = \frac{v_{12}E_2 h}{(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{du_0}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw_0}{dr}\right)^2\right) + \frac{E_2 h}{(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{u_0}{r}\right) \quad (۲۳)$$

$$Q_r^L = \frac{5}{6}(G_{12})h\left(\frac{dw_0}{dr}\right) \quad (۲۴)$$

$$M_r^L = \frac{E_1 h^3}{12(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{v_{12}E_2 h^3}{12(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{\varphi}{r}\right) \quad (۲۵)$$

$$M_\theta^L = \frac{v_{12}E_2 h^3}{12(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{E_2 h^3}{12(1-v_{12}v_{21})}\left(\frac{\varphi}{r}\right) \quad (۲۶)$$

که h ضخامت صفحه گرافن است.

برای تعیین معادلات تعادل از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می‌شود:

$$\Pi = U + \Omega \quad (۲۷)$$

که Π انرژی پتانسیل کل سیستم، U انرژی کرنشی سیستم و Ω انرژی پتانسیل بارهای خارجی است.

طبق این اصل، وقتی سیستمی در حال تعادل است، تغییرات انرژی پتانسیل آن سیستم صفر است:

$$\delta\Pi = \delta U + \delta\Omega \cong 0 \tag{۲۸}$$

که در معادله (۲۸) δ نشان دهنده عملگر تغییرات است. همچنین مقادیر تغییرات انرژی کرنشی سیستم و انرژی پتانسیل بارهای خارجی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$U = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r}\sigma_{ij}^{NL}\varepsilon_{ij}\,rdrd\theta dz = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r}(\sigma_{r}^{NL}\varepsilon_{rr}+\sigma_{\theta}^{NL}\varepsilon_{\theta\theta}+\sigma_{r\theta}^{NL}\varepsilon_{r\theta}+\sigma_{rz}^{NL}\varepsilon_{rz}+\sigma_{\theta z}^{NL}\varepsilon_{\theta z})rdrd\theta dz \tag{۲۹}$$

$$\Omega = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r}N(\frac{d(ru_r)}{dr}+\frac{du_\theta}{d\theta})drd\theta dz \tag{۳۰}$$

N نیروی شعاعی درون صفحه‌ای می‌باشد.

با استفاده از معادلات فوق روابط تعادل برحسب منتجه‌های تنش به صورت روابط (۳۱-۳۳) می باشند:

$$\delta u: N_r^{NL} - r\frac{dN_r^{NL}}{dr} + N_\theta^{NL} = 0 \tag{۳۱}$$

$$\delta\varphi: -r\frac{dM_r^{NL}}{dr} + M_\theta^{NL} + rQ_r^{NL} - M_r^{NL} = 0 \tag{۳۲}$$

$$\delta w: Q_r^{NL} + r\frac{dQ_r^{NL}}{dr} + \frac{d}{dr}(rN_r^{NL}\frac{dw_0}{dr}) = 0 \tag{۳۳}$$

با استفاده از معادلات فوق، روابط تعادل بر حسب منتجه‌های تنش غیرموضعی به صورت رابطه‌های زیر حاصل می‌شوند:

$$\delta u: -N_r^L - r\frac{dN_r^L}{dr} + N_\theta^L = 0 \tag{۳۴}$$

$$\delta\varphi: -\frac{rdM_r^L}{dr} + M_\theta^L + rQ_r^L - M_r^L = 0 \tag{۳۵}$$

$$\delta w: Q_r^L + r\frac{dQ_r^L}{dr} + \left(1-\mu\nabla^2\right)(N_r^L\frac{dw_0}{dr} + r\frac{dN_r^L}{dr}\frac{dw_0}{dr} + rN_r^L\frac{d^2w_0}{dr^2}) = 0 \tag{۳۶}$$

برای تحلیل کمانش از روش تعادل همسایگی استفاده می‌شود. در این روش معادله تعادل را می توان از تغییر بسیار کوچک در نزدیکی حالت تعادل بدست آورد. بدین منظور منتجه‌های جابجایی، نیرو و گشتاور به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0^0 + u_0^1 \\ w_0 &= w_0^0 + w_0^1 \\ \varphi &= \varphi^0 + \varphi^1 \end{aligned} \tag{۳۷}$$

$$\begin{aligned} N &= N_\theta^0 + N_\theta^1 \\ N &= N_r^0 + N_r^1 \\ Q &= Q_\theta^0 + Q_\theta^1 \\ M &= M_r^0 + M_r^1 \\ M &= M_\theta^0 + M_\theta^1 \end{aligned} \tag{۳۸}$$

که در این روابط بالانویس 0 مربوط به حالت پیش کمانش و بالانویس 1 ناشی از تغییر بسیار ناچیز در حالت پایداری است. در نتیجه به دلیل آن که در حالت پیش کمانش تغییر شکل عمودی وجود ندارد پس $w_0^0 = 0$ و نیز $\varphi^0 = 0$. معادلات پیش کمانش به صورت روابط ذیل بدست می‌آید:

$$-N_r^0 - r\frac{dN_r^0}{dr} + N_\theta^0 = 0 \tag{۳۹}$$

$$-r\frac{dM_r^0}{dr}+M_\theta^0+rQ_r^0-M_r^0=0 \qquad (۴۰)$$

$$Q_r^0+r\frac{dQ_r^0}{dr}=0 \qquad (۴۱)$$

با حل معادلات پیش کمانش نتیجه می‌شود:

$$N_r^0=N_\theta^0=-N \qquad (۴۲)$$

هچنین معادلات پایداری به صورت روابط زیر بدست می- آیند:

$$-N_r^1-r\frac{dN_r^1}{dr}+N_\theta^1=0 \qquad (۴۳)$$

$$-r\frac{dM_r^1}{dr}+M_\theta^1+rQ_r^1-M_r^1=0 \qquad (۴۴)$$

$$\begin{aligned}&Q_r^1+r\frac{dQ_r^1}{dr}+(1-\mu\nabla^2)[(N_r^0\frac{dw_0^1}{dr})+\\&(N_r^1\frac{dw_0^1}{dr})+r\frac{dN_r^0}{dr}(\frac{dw_0^1}{dr})+r\frac{dN_r^1}{dr}(\frac{dw_0^1}{dr})+\\&rN_r^0\frac{d^2w_0^1}{dr^2}+rN_r^1\frac{d^2w_0^1}{dr^2}]=0\end{aligned} \qquad (۴۵)$$

برای ساده سازی در تحیل‌ها در مقیاس نانو، از عبارت‌های بی‌بعد زیر استفاده می‌نماییم:

$$\begin{aligned}&u_0^*=\frac{u_0}{h};\varphi^*=\varphi;w_0^*=\frac{w_0}{r_0};r^*=\frac{r}{r_0};\mu^*=\frac{\mu}{{r_0}^2};\delta=\frac{h}{r_0};\\&\alpha=\frac{E_2}{E_1};\beta=\frac{G}{E_1};N_r^*=\frac{N_r}{E_1h};N_\theta^*=\frac{N_\theta}{E_1h};N^*=\frac{N}{E_1h};\\&M^*{}_\theta=\frac{M_\theta}{E_1h^2};M_r^*=\frac{M_r}{E_1h^2};Q^*{}_r=\frac{Q_r}{E_1h};\\&\nabla^2=\frac{\nabla^{*2}}{{r_0}^2};\nabla^{*2}=\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\end{aligned} \qquad (۴۶)$$

۳- حل به روش مربعات دیفرانسیلی

روش مربعات دیفرانسیلی یک روش عددی برای حل مسائل مقدار مرزی و مسائل مقدار اولیه می‌باشد. از این روش علاوه بر ساختارهای بزرگ در تحلیل ساختارهای نانو نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در روش مربعات دیفرانسیلی مشتق یک تابع به صورت جمع خطی توابع وزنی در طول دامنه مورد نظر نوشته می- شود که در مختصات قطبی در راستای شعاع به صورت زیر بدست می‌آید [۳۰] :

$$\frac{d^nF}{dr^n}=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(n)}F\left(r_j\right) \qquad (۴۷)$$

$$c_{ij}^{(1)}=\frac{p(r_i)}{(r_i-r_j)\,p(r_j)},i\neq j \qquad (۴۸)$$

$C_{ij}^{(n)}$ ضریب وزنی است.

به طوری که $C_{ij}^{(n)}$ ضریب وزنی نامیده می‌شود. ضریب وزنی برای مشتق مرتبه اول به صورت زیر بدست می‌آید:

$$p(r_i)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq1}}^{N}(r_i-r_k) \qquad (۴۹)$$

و هنگامی که $i=j$:

$$C_{ij}^{(1)}=-\sum_{\substack{k=1,\neq1\\i=1,2,...N}}^{N}C_{ki}^{(n)} \qquad (۵۰)$$

ضرایب وزنی برای مشتق مراتب بالاتر به صورت زیر می- باشد:

$$C_{ij}^{(1)}=-\sum_{\substack{k=1,\neq1\\i=1,2,...N}}^{N}C_{ki}^{(n)} \qquad (۵۱)$$

$$C_{ij}^{(n)}=n\left[A_{ij}^{n-1}A_{ij}^{(1)}-\frac{A_{ij}^{n-1}}{x_i-x_j}\right],i\neq j \qquad (۵۲)$$

$$C_{ii}^{(n)}=-\sum_{\substack{k=1,\neq i\\i=1,2,...,N}}^{N}C_{ki}^{(n)},i=j \qquad (۵۳)$$

در نهایت، توزیع غیریکنواخت چیبیشف-گوس-لوباتو به صورت زیر بکار رفته است:

$$r_i=\frac{a}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi i}{N-1}\right)\right], i=0,1,\dots,N \qquad (۵۴)$$

که در روابط فوق N بیانگر تعداد نقاط در راستای شعاع است.

4-نتایج عددی

برای تعیین نتایج عددی، صفحه ارتوتروپیک تک لایه دایره‌ای توپر با شعاع $R=5nm$، ضخامت صفحه $h=0.335nm$، مدول الاستیسیته $E_1=1765Gpa$ و $E_2=1588Gpa$ ضرایب پواسون $\nu_{12}=0.3$ در نظر گرفته شده است.

برای مقایسه دقت نتایج، کرنش کمانشی[۱] (ε_b) به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۶]:

$$\varepsilon_b=\frac{N}{Eh}=\frac{N^*h^2}{12(1-\nu^2)R^2} \qquad (۵۴)$$

که در آن N^* بار بی‌بعد کمانش صفحه می‌باشد و به صورت زیر بیان شود:

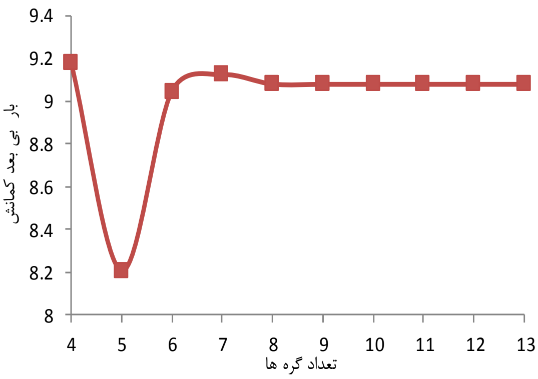
$$N^*=\frac{NR^2}{D}, D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \qquad (۵۵)$$

که مقدار کرنش کمانشی بر اساس ضرایب غیرموضعی مختلف برای شرایط مرزی تکیه‌گاهی گیردار و ساده با مرجع [۲۶] مقایسه و در جدول۱ ارائه شده است که تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

به دلیل آن که نتایج روش عددی مربعات دیفرانسیلی به تعداد گره‌ها وابسته است، نتایج عددی همگرایی تحقیق حاضر به صورت شکل ۲ می‌باشد. مطابق شکل در شرایط مرزی تکیه‌گاه گیردار و به ازای $\mu=1$، از تعداد گره‌های ۱۱ به بعد، همگرایی مطلوب حاصل می‌شود.

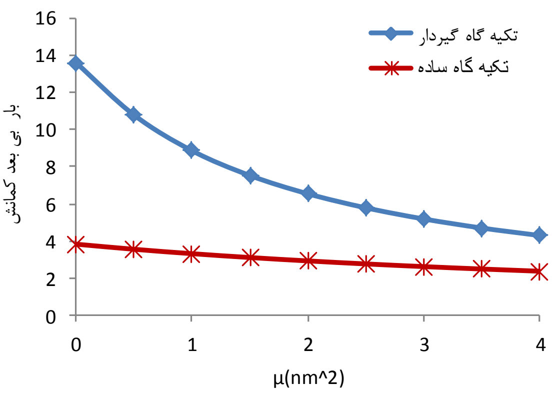
جدول ۱ : مقایسه بار بی بعد کمانش تحقیق حاضر با مرجع [۲۶]

شعاع(nm)	کرنش کمانشی ($\varepsilon_b=(\%)$) ضریب غیرموضعی ($\mu(nm^2)$) ۰	۰٫۲۵	۱	۲٫۲۵	۴
۴	۰٫۹۳	۰٫۷۵	۰٫۴۸	۰٫۲۹	۰٫۱۹
۴ [۲۶]	۰٫۹۴	۰٫۷۶	۰٫۴۹	۰٫۳	۰٫۲
۶	۰٫۴۱	۰٫۳۸	۰٫۲۹	۰٫۲۱	۰٫۱۵
۶ [۲۶]	۰٫۴۱	۰٫۳۸	۰٫۲۹	۰٫۲۱	۰٫۱۵
۸	۰٫۲۳	۰٫۲۲	۰٫۱۹	۰٫۱۵	۰٫۱۲
۸ [۲۶]	۰٫۲۳	۰٫۲۲	۰٫۱۹	۰٫۱۵	۰٫۱۲
۱۰	۰٫۱۵	۰٫۱۴	۰٫۱۳	۰٫۱۱	۰٫۰۹
۱۰ [۲۶]	۰٫۱۵	۰٫۱۴	۰٫۱۳	۰٫۱۱	۰٫۰۹



شکل (۲) بررسی همگرایی بار بی‌بعد کمانش به تعداد گره‌ها

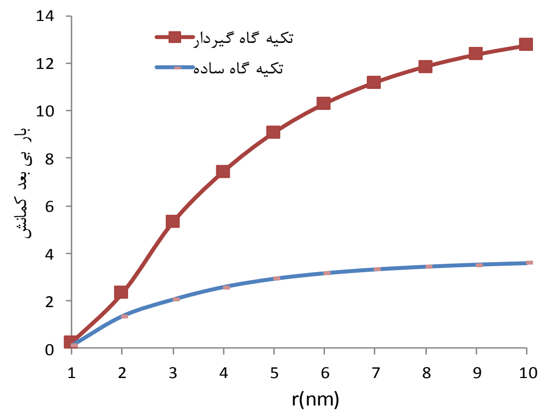
در شکل ۳ تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضریب‌های غیرموضعی گوناگون برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در شرایط تکیه‌گاهی گیردار تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به صورت غیرخطی تغییر می‌کنند اما در شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده با شیب نسبتا ثابتی کاهش می‌یابد. همچنین تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی با کاهش انعطاف پذیری شرایط تکیه-گاهی، افزایش می‌یابد.



شکل (۳) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضریب‌های غیرموضعی

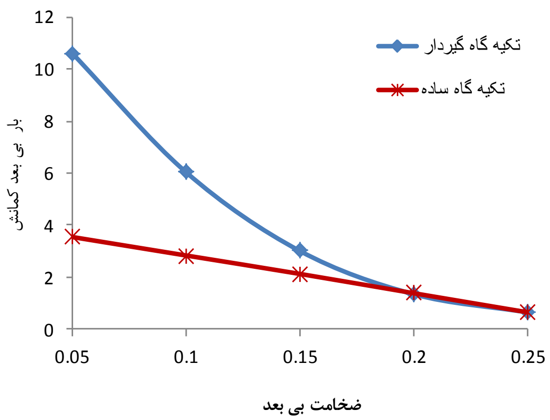
[۱] Strain buckling

در شکل۴ تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به شعاع، برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده برای $\mu=1$، ترسیم شده است. مشاهده می‌شود با افزایش شعاع، بار بی‌بعد کمانش در هردو شرایط مرزی افزایش می‌یابد ولی این افزایش در شرایط تکیه‌گاهی گیردار، بیشتر از مفصلی می‌باشد.



شکل (۴) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به شعاع، برای ضریب‌های غیرموضعی مختلف

در شکل۵ تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضخامت بی-بعد(مقدار ضخامت صفحه ثابت درنظر گرفته شده و شعاع در حال تغییر است)، در شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده و برای $\mu=1$ نشان داده شده است. با توجه به شکل، با افزایش ضخامت بی بعد، بار بی‌بعد کمانش کاهش می‌یابد.



شکل (۵) تغییرات بارهای بی‌بعد کمانش به ضخامت بی‌بعد

5 -نتیجه‌گیری

در این تحقیق تحلیل غیرخطی کمانش صفحات دایروی گرافن به کمک تئوری الاستیسیته غیرموضعی تحلیل شده است. از مهمترین نتایج می توان به موارد زیر اشاره نمود:

- با کاهش انعطاف پذیری شکل از نظر شرط مرزی، تاثیر افزایش ضریب غیرموضعی بر بار بی‌بعد کمانش بیشتر است.

-افزایش ضریب غیرموضعی موجب کاهش نیروی بی‌بعد کمانش می‌شود.

- با افزایش شعاع، بار بی‌بعد کمانش در هر دو شرایط مرزی گیردار و ساده، افزایش می‌یابد.

6- تشکر و قدردانی

لازمست از استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهرداد جبارزاده صمیمانه تشکر نمایم که بدون راهنمایی‌های دلسوزانه ایشان نگارش و ویرایش اصلاحات موجود در این مقاله هیچگاه صورت نمی‌گرفت. همچنین از اساتید محترم دانشگاه آزاد اسلامی خمینی‌شهر به خاطر پذیرش و انتخاب این مقاله به عنوان سخنرانی و همه مسئولان مربوطه در برگزاری بی‌نظیر و به یادماندنی هفتمین کنفرانس ملی مهندسی مکانیک در اسفندماه۱۳۹۳ تشکر ویژه نمایم.

مراجع:

[1]Taniguchi N., On the Basic Concept of Nanotechnology. Proceedings of the International Conference of Production Engineering, London, 1974, pp. 18-23.

[2] Ma M., Tu J.P., Yuan Y.F., Wang X.L., Li F., Mao K.F., Zeng Z.Y., Electrochemical Performance of ZnO Nanoplates as Anode Materials for Ni/Zn Secondary Batteries, *Journal of Power Source*, vol. 179, No. 1, 2008 , pp. 395-400.

[3] Agesen M., Sorensen V., Nanoplates and Their Suitability for Use as Solar Cells, Proceeding of Clean Technology, Boston Secondary Batteries, *Journal of Power Source*, vol. 179, No. 11, 2008, pp. 395-400.

[4]Yguerabide J., Yguerabide E. E.,Resonance Light Scattering Particles as Ultrasensitive Labels for Detection of Analytes in a wide Range of Applications, *Journal of Cellular Biochemistry-Supplement*, vol. 37, No. 37, 2011, pp. 71-81.

[5] Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A., Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. *Science*, vol. 306, No. 5696, 2004, pp. 666-669.

[6] Xu Z.P.,Buehler M.J. ,Geometry controls conformation of graphene sheets: membranes, ribbons, and scrolls, *ACS-Nano*, vol. 4, 2010, pp. 3869-3876.

[7] Chiu H.Y., Hung P., Postma H.W.Ch., Bockrath M.,Atomic-Scale Mass Sensing Using Carbon Nanotube Resonators, *Nano Lett*, vol. 8, 2008, pp. 4342-4346.

[8] Hernandez E., Goze C., Bernier P., Rubio A. , Elastic Properties of C and BxCyNz Composite Nanotubes. *Physics Review Letters*, vol. 80, 1998, pp. 4502-4505.

[9] Li C.Y., Chou T.W., Elastic wave velocities in single-walled carbon nanotubes, *Physics Review B*, vol. 73, 2006, pp. 245407.

[10]Li C., Chou T.W., Single-walled carbon nanotubes as ultrahigh frequency nano-mechanical resonators, *Physics Review B*, vol. 68, 2003, pp. 073405.

[11]Eringen. A.C, Nonlocal Continuum Field Theories, New york, *Springer*-Verlag, 2002.

[12] Fleck N.A., Hutchinson J.W.,Strain Gradient Plasticity, *Advance applied mechanics*, Vol.33, 1997, pp. 295-361.

[13]Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P.,Couple Stress Based Strain Gradient Theory for Elasticity, *International journal of solid structures*, vol. 39, 2002, pp. 2731-2743.

[14] Parnes A., Chiskis J., Buckling of nano-fibre reinforced composites: a re-examination of elastic buckling. *Mechanical Physics Solids*, vol. 50, 2002, pp. 855-879.

[15] Pradhan S. C., Murmu T. ,Small Scale Effect on the Buckling of Single-Layered Graphene Sheets under Biaxial Compression via Nonlocal Continuum Mechanics, *Computational Materials Science*, vol. 47, 2009, pp. 268-274.

[16] Samaei A.T., Abbasion S., Mirsayar M.M., Buckling Analysis of a Single-Layer Graphene Sheet Embedded in an Elastic Medium Based on Nonlocal Mindlin Plate Theory, *Mechanics Research Communications*, vol. 38, 2011, pp. 481-485.

[17] Farajpour A., Danesh M., Mohammadi M., Buckling analysis of variable thickness nanoplates using nonlocal continuum mechanics, *Physica E*, vol. 44, 2011, pp. 719–727.

[18] Narendar S., Gopalakrishnan S.,Critical buckling temperature of single-walled carbon nanotubes embedded in a one-parameter elastic medium based on nonlocal continuum mechanics, *Physica E*, vol. 43, 2011, pp.1185–1191.

[19] Lim C.W., Yang Q., Zhang J.B., Thermal buckling of nanorod based on non-local elasticity theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 47, 2012, pp. 496-505.

[20] Farajpour A., Shahidi A.R., Mohammadi M., Mohzoon M., Buckling of Orthotropic Micro/Nanoscale Plates under Linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, vol. 94, 2012, pp. 1605-1615.

[21] Prasanna Kumar T.J., Narendar S., Gopalakrishnan S., Thermal vibration analysis of monolayer graphene embedded in elastic medium based on nonlocal continuum mechanics. *Composite Structures*, vol. 100, 2013, pp. 332–342.

[22] Emam S.A., A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams.*Applied Mathematical Modelling* , vol. 37, 2013, pp. 6929–6939.

[23] Mohammadi M., , Farajpour A., Moradi A., Ghayour M.,Shear buckling of orthotropic rectangular graphene sheet embedded in an elastic medium in thermal environment.*Composites: Part B*, vol. 56, 2014, pp. 629–637.

[24]Sarrami-Foroushani S., Azhari M., Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects, *Physica E*, vol. 57, 2014, pp. 83–95.

[25] Golmakania M.E., Rezatalab J., Nonuniform biaxial buckling of orthotropic nanoplates embedded in an elastic medium based on nonlocal Mindlin plate theory, *Composite Structures*, vol. 119, 2015, pp. 238–250.

[26] Farajpour A., Mohammadi M., Shahidi A.R., Mahzoon M. ,Axisymmetric Buckling of the Circular Graphene Sheets with the Nonlocal continuum plate model, *Physica E*, vol. 43, 2011, pp. 1820–1825.

[27]Karamooz Ravari M.R., Shahidi A.R., Axisymmetric buckling of the circular annular nanoplates using finite difference method, *Meccanica*, vol. 48, 2013, pp. 135–144.

[28]Bedroud M., Hosseini-Hashemi S., Nazemnezhad R., Buckling of circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity, *Acta Mechanics*, vol. 224, 2013, pp. 2663-2676.

[29] Nosier A., Fallah F., Non-linear Analysis of Functionally Graded Circular Plates under Asymmetric Transverse Loading, *International journal of non-Linear mechanics*, vol. 44, 2009, pp. 928-942.

[30] Shu C., Differential Quadrature and Its Application in Engineering, 2000, Berlin, Springer.