فصلنامه علمی پژوهشی

مهندسی مکانیک جامدات

www.jsme.ir

فصلنامه علمی پژوهشی
مهندسی مکانیک جامدات

تحلیل پایداری دینامیکی نانولوله کربنی با استفاده ازتئوری گرادیان کرنش

فرشید آقاداوودی[۱،*]، محمد هاشمیان[۲]

* نویسنده مسئول: davoodi@iaukhsh.ac.ir

چکیده

در این مقاله پایداری دینامیکی نانولوله کربنی تک جداره به کمک تئوری غیرموضعی گرادیان کرنش مورد بررسی قرار گرفته است. پس از معرفی تئوری گرادیان کرنش و پایداری دینامیکی، نانولوله کربنی با استفاده از تیر اویلر- برنولی مدل شده و تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی قرار گرفته است. محیط در بردارنده نانولوله بصورت الاستیک در نظر گرفته شده است. معادلات حرکت با استفاده از روش انرژی و اصل همیلتون استخراج شده‌اند. با توجه به اینکه تئوریهای کلاسیک الاستیسیته در سازه با ابعاد نانو به طور کامل جوابگو نیست معادلات ساختاری ماده به کمک تئوری گرادیان کرنش استخراج شده و این معادلات به صورت غیرموضعی حل شده است. ارتعاشات آزاد و تحلیل کمانش استاتیکی انجام شده است. سپس تحلیل دینامیکی انجام شده و مرزهای پایداری در فرکانسها و دامنه های مختلف تعیین شده‌اند. همچنین تأثیر عوامل مختلف بر این مناطق بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی

گرادیان کرنش، پایداری دینامیکی، نانومکانیک، مکانیک محیط پیوسته

۱- مربی، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر

۲-استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی‌شهر

۱- مقدمه

از خصوصیات نانولوله‌های کربنی می توان به رسانایی و نیمه رسانایی آنها، هدایت گرمایی بالا، قدرت تفکیک یونی در نانولوله‌ها، مدول یانگ زیاد و استحکام کششی زیاد، ایجاد ولتاژ با گذر سیال اشاره کرد. در حال حاضر از نانولوله ها در ساخت نانوکامپوزیتهای فلزی و پلیمری و غشای تصفیه کننده های شیمیایی استفاده می شود و کاربرد آنها به دلیل خواص منحصر به فردشان رو به گسترش است. بنابراین بررسی و استخراج خواص و رفتار مکانیکی نانولوله‌ها مهم و ضروری است. به دلیل آنکه انجام آزمایش در ابعاد نانو با مشکلات خاصی توام است و صرف هزینه های بالا را طلب می کند بسیاری از محققان از روشهای تحلیلی، عددی یا مولکلولی به بررسی خواص مکانیکی نانولوله‌ها پرداخته‌اند. در این میان بخشی از تحقیقات انجام شده در حوزه نانومکانیک به بررسی پدیده‌های ارتعاشات آزاد، ارتعاشات اجباری و کمانش استاتیکی و دینامیکی اختصاص دارد.

آزمایشها نشان داده‌اند که بر خلاف رفتار مواد در الاستیسته کلاسیک، رفتار مواد در ابعاد نانو وابسته به پارامترهای اندازه است. به این معنا که در محاسبات تنش در مسائل نانو به دلیل آنکه نسبت سطح به حجم ماده بزرگ است معادلات غیرموضعی هستند و مقادیر تنش و کرنش به تغییرات تنش در همسایگی نقاط نیز کاملا وابسته است که این مورد استفاده از تئوریهای کلاسیک الاستیسته را برای مسائل نانو با مشکل مواجه می کند[۱-۳].

لذا لازم است که از روش‌های جدید تئوری الاستیسته مانند تئوری گرادیان کرنش یا تئوری کوپل تنش برای تحلیل استفاده شود. میکروتیرها در تحلیل بسیاری از مسائل میکرو و نانو مانند سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی کاربرد دارند. بسیاری از محققان وضعیت کمانش، پایداری دینامیک و ارتعاشات این مواد را در ابعاد نانو و میکرو بررسی کرده‌اند [۴-۷]. همچنین تحقیقاتی نیز در زمینه مدلسازی نانوتیرها و نانوصفحه ها به کمک تئوری گرادیان کرنش انجام شده است [۸-۱۳].

رو [۱۴] کمانش نانولوله کربنی دو جداره را با استفاده از مدل الاستیک بررسی نمود. از آنجا که سهم اصلی نیروی واندروالس بر نانولوله خارجی از اتم‌های مجاور در نانولوله داخلی حاصل می‌شود، می‌توان این لایه‌ها را بصورت صفحات موازی و تخت در نظر گرفت. با این فرض فشار حاصل شده از نیروهای واندروالس در هر نقطه از نانولوله-کربنی خارجی به صورت تابعی از فاصله بین نانولوله کربنی داخلی و خارجی در آن نقطه بیان می‌شود. وانگ و همکارانش [۱۵] در سال ۲۰۰۳، کمانش محوری نانولوله کربنی چندجداره را تحت بارگذاری محوری و فشارجانبی بر اساس تئوری دانل مطالعه کردند. طبق تحقیق آنها تأثیر فشار داخلی بر بار بحرانی نانولوله کربنی چندجداره نازک به مراتب بیشتر از بار بحرانی نانولوله کربنی چندجداره ضخیم می‌باشد و فشار داخلی تأثیری بر بار بحرانی کمانش نانولوله کربنی چندجداره در حالت متقارن محور ندارد. در حالت فشار خارجی، حالت بحرانی کمانش بصورت منحصر بفرد قابل تشخیص می‌باشد. یون و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۰۵، ارتعاشات و پایداری نانولوله‌های کربنی حاوی جریان سیال را بررسی نمودند. تأثیر جریان داخلی سیال بر فرکانس نانولوله همچنین سرعت بحرانی سیال در این تحقیق مطالعه شد. در این مقاله از معادلاتی که پایدوسیس [۱۷] بیان کرده استفاده شده است.

قربان‌پور و همکاران [۱۸] کمانش نانولوله کربنی تک-جداره را تحت بارگذاری ترکیبی محوری و فشار جانبی مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله نانولوله توسط نرم‌افزار ANSYS مدل شده و کمانش آن با مدل‌های کلاسیک و غیرموضعی مقایسه شده است. براساس این تحقیق چنانچه نانولوله توسط پوسته استوانه‌ای مدلسازی گردد نسبت قطر به ضخامت نقش مهمی را در پدیده‌ی کمانش ایفا می‌کند همچنین کمانش نانولوله مدل شده توسط ستون وابسته به نسبت قطر به طول می‌باشد. از ویژگی‌های این مقاله می‌توان به اشکال مودهای کمانش در حالت‌های بارگذاری ترکیبی اشاره نمود. سان و لیو [۱۹] کمانش پیچشی دینامیکی نانولوله کربنی دو جداره را بررسی نمودند. انصاری و همکارانش کمانش نانولوله کربنی و مسئله پایداری دینامیکی را با تئوری غیرموضعی و

کلاسیک بررسی کرده اند و مرزهای پایداری را به دست آورده اند. در تحقیق آنها اثر محیط الاستیک نیز بررسی شده است [۲۰]. همچنین قربان پور و همکاران ناپایداری نانولوله کربنی حاوی سیال را با تئوری گرادیان کرنش و روش DQM بررسی کرده اند [۲۱]. قربان پور و همکاران در مقاله دیگری ناپایداری نانولوله حاوی سیال را با لحاظ اثر سطح و در حضور میدان مغناطیسی بررسی کرده اند [۲۲].

در این تحقیق به بررسی پدیده‌ی پایداری دینامیکی نانولوله‌ی کربنی پرداخته شده و سعی شده نواحی پایدار و ناپایدار با روش گرادیان کرنش تعیین گردد. در نواحی ناپایدار، فرکانس و دامنه‌ی تحریک (بارگذاری مسأله) بگونه-ای است که پاسخ زمانی بدون کران ایجاد می‌نماید و عکس این موضوع در نواحی پایدار برقرار است. در این تحقیق نانولوله کربنی با استفاده از تیر اویلر- برنولی غیرموضعی مدل شده است و با توجه به تئوری گرادیان کرنش اثر اندازه‌ی کوچک بین پیوندهای کربن در روابط ساختاری ظاهر شده است بار محوری وارد بر نانولوله بصورت کسینوسی متغیر با زمان از یک جمله ثابت (استاتیکی) و یک جمله متغیر با زمان (دینامیکی) تشکیل شده است. با اینکه جمله دینامیکی به مراتب کمتر از بار بحرانی استاتیکی است ولی نانولوله دچار ناپایداری شده است و مناطق دور از رزونانس و پایدار از مناطق ناپایداری مشخص شده است. همچنین اثر تغییرات پارامترهایی مانند طول و ضریب الاستیک مست.حیط بر نتایج ناحیه ناپایداری بررسی شده و نتایج به دست آمده با تئوری کلاسیک مقایسه شده است.

۲- تئوری گرادیان کرنش

از جمله تئوریهای جدیدی برای بررسی الاستیسیه مواد در ابعاد میکرو و نانو گسترش یافته‌اند تئوری گرادیان کرنش است. در این تئوری تنش‌های مرتبه بالاتری تعریف می شوند که ماهیت این تنشها به تنش برشی کلاسیک نزدیکتر است و تمایل به ایجاد چرخش در المانها را تداعی می‌کند. در تئوری گرادیان کرنش، مشتق اول و دوم تانسور کرنش در محاسبه انرژی کرنشی وارد می‌شوند. میندلین برای اولین بار تئوری کرنشهای مرتبه بالا را ارائه داد[۲۳]. فلک و هاچینسون این تئوری را توسعه دادند و تئوری گرادیان کرنش را ارائه کردند[۲۴]. تئوری گرادیان کرنش حالت عمومی‌تر تئوری کوپل تنش است. این تئوری توسط تعدادی از پژوهشگران توسعه یافته و اصلاح شده است[۶-۱۰].

تئوری گرادیان کرنش به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Pi_s = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + p_i\gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s\chi_{ij}^s)\,d\upsilon \tag{۱}$$

در این رابطه Ω حجم تحت تنش است. طبق رابطه فوق مشخص است که جملاتی نسبت به تئوری الاستیسیته کلاسیک اضافه شده است. این جملات ناشی از تنشهای مرتبه بالاتر و اثرات گرادیان کرنش‌های اعمالی به المان است. در این رابطه داریم:

ε_{ij}: تانسور کرنش گرین، σ_{ij}: تانسور تنش کوشی، γ_i: بردار گرادیان اتساع[۱]، $\eta_{ijk}^{(1)}$: تانسور گرادیان انحراف کشیدگی[۲] ، χ_{ij}^s: بخش متقارن تانسور گرادیان دوران یا چرخش[۳] و $p_i, \tau_{ijk}^{(1)}, m_{ij}^s$: تانسورهای تنشهای مرتبه بالاتر هستند. برای تعریف پارامتراهای فوق داریم:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i.j} + u_{j.i}) \tag{۲}$$

$$\gamma_i = \varepsilon_{mm.i} \tag{۳}$$

$$\begin{aligned}\eta_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{jk.i} + \varepsilon_{ki.j} + \varepsilon_{ij.k}) - \\ &\frac{1}{15}\delta_{ij}(\varepsilon_{mm.k} + 2\varepsilon_{mk.m}) - \\ &\frac{1}{15}[\delta_{jk}(\varepsilon_{mm.i} + 2\varepsilon_{mi.m}) + \\ &\delta_{ki}(\varepsilon_{mm.j} + 2\varepsilon_{mj.m})\end{aligned} \tag{۴}$$

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{2}(\theta_{i.j} + \theta_{j.i}) \tag{۵}$$

$$\theta_i = \frac{1}{2}(curl\,(u))_i \tag{۶}$$

در روابط فوق θ_i بردار دوران است و δ_{ij} تابع دلتای کرونیکر است. معادلات ساختاری در مواد جامد الاستیک خطی برای تغییر شکل‌های کوچک در تئوری گرادیان کرنش

1- Dilatation Gradient Vector
2- Deviatoric Gradient Tensor
3- Symmetric part of Rotation Gradient Tensor

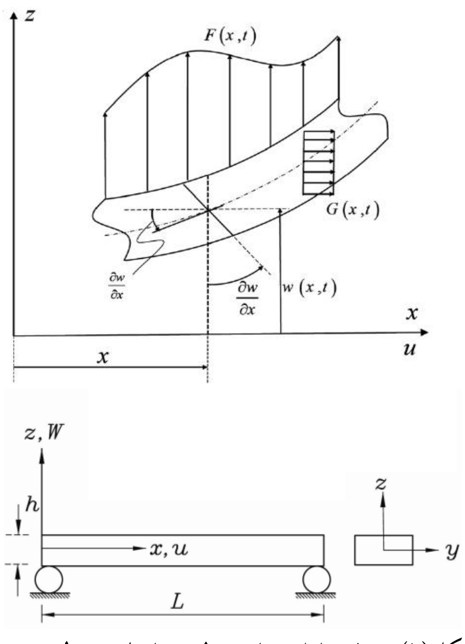
قابل بیان است. روابط ساختاری بر حسب دو ثابت لامه یعنی (λ,μ) و سه ثابت طولی مواد با ابعاد میکرو یعنی (l_0,l_1,l_2) که به شاخص طولی[4] معروف می‌باشند، مشخص می‌شوند. شاخصهای طولی برای هر ماده نانو یا میکرو توسط آزمایش مشخص می‌شوند. تئوری کوپل حالت خاص تئوری گرادیان کرنش می باشد، در این تئوری مقادیر (l_0,l_1) صفر بوده و فقط (l_2) مقدار دارد.

با توجه به تنشها و کرنشهای جدید روابط ساختاری بین این تنشها و کرنشها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda tr(\varepsilon)+2\mu\varepsilon_{ij}\\ p_i &= 2\mu l_0^{\,2}\gamma_i\\ \tau_{ijk} &= 2\mu l_1^{\,2}\eta_{ijk}\end{aligned} \qquad (۷)$$

۳-استخراج روابط سینماتیک نانوتیر اویلر-برنولی

شکل (۱) تغییر شکل یک تیر با طول L و ضخامت h را نشان می‌دهد. سطح مقطع تیر یکنواخت در نظر گرفته شده است و طول تیر در جهت x و خیز تیر در جهت z در نظر گرفته شده است.



شکل(۱) معرفی پارامترهای مدل تیر اویلر-برنولی

4- Length scale parameter

با توجه به تئوری تیر تاویلر-برنولی تغییر شکل تیر در جهات اصلی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$u_1=U(x,t)+z\theta(x,t)\ ,u_2=\circ\ ,u_3=W(x,t)$$
$$\theta=-\frac{\partial W}{\partial x} \qquad (۸)$$

$\theta(x,t)$ زاویه چرخش سطح مقطع تیر حول محور y و $U(x,t)$ جابه‌جایی محوری مرکز مقطع تیر و $W(x,t)$ میزان خیز عرضی یا جانبی را نشان می‌دهد. با توجه به شرایط غیر خطی هندسی تیر، فرض می شود که کرنشها و دورانها کوچک هستند. ولی با توجه به بزرگ بودن نسبی خیز w شرایط غیرخطی هندسی برقرار است. طبق تعریف تانسور کرنش گرین-لاگرانژ داریم:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{m,i}u_{m,j}) \qquad (۹)$$

با توجه به اینکه در تئوری تیر اویلر-برنولی در ابعاد کوچک می توان فرض کرد که مقدارهای $(\theta,\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial W}{\partial x})$بسیار کوچک هستند برای کرنش ε_{11} داریم [۱۱]:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial U}{\partial x}-z\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad (۱۰)$$

سایر کرنشها برابر صفر در نظر گرفته می شوند. بدین معنا که $\varepsilon_{22}=\varepsilon_{33}=\varepsilon_{12}=\varepsilon_{13}=0$است. در شرایط خطی و غیر خطی هندسی می‌توان ثابت کرد که از رابطه $\theta=curl(\mathbf{u})/2$ مقدار بردار دوران یا θ قابل محاسبه است[۵] و داریم:

$$\theta_2\approx-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)\quad,\quad \theta_1=\theta_3=\circ \qquad (۱۱)$$

۴- محاسبه انرژی کرنشی و جنبشی

معادله انرژی طبق تئوری گرادیان کرنش در طول تیر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\Pi_s &=\frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A(\underbrace{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}_{1}+\underbrace{p_i\gamma_i}_{2}+\underbrace{\tau_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)}}_{3}+\underbrace{m_{ij}^{s}\chi_{ij}^{s}}_{4})\,dAdx\\ &=U_1+U_2+U_3+U_4\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

U_1 تا U_4 با توجه به روابط ساختاری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})\,dA\,dx = \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A E\left[\frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]^2 dA\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A E\left[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + z^2(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 - 2z\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})\right] dAdx \quad (۱۳)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A (p_i\gamma_i)dAdx = \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A (p_1\gamma_1 + p_3\gamma_3)dAdx$$
$$= \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A \left\{2\mu l_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)^2 + 2\mu l_\circ^2(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2\right\} dAdx \quad (۱۴)$$

$$U_3 = \mu l_1^2\int_\circ^L\int_A \frac{4}{15}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{2}{5}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)^2 dAdx \quad (۱۵)$$

$$U_4 = \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A (m_{ij}^s\chi_{ij}^s)\,dA\,dx = \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A 2m_{12}^s\chi_{12}^s dA\,dx$$
$$= \int_\circ\int_A \frac{\mu l_2^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dAdx \quad (۱۶)$$

انرژی پتانسیل ناشی از نیروی محوری خارجی N_0 از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Pi_F = \frac{1}{2}\int_\circ^L N_0(2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2) \quad (۱۷)$$

انرژی جنبشی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Pi_T = \frac{1}{2}\int_\circ^L\int_A \rho\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}(u - z\frac{\partial w}{\partial x})\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\} dA\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\rho\int_\circ^L\int_A (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + z^2(\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x})^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 dAdx \quad (۱۸)$$

۵- استخراج معادلات حرکت

به کمک اصل همیلتون و اصول حساب تغییرات می‌توان معادلات حرکت را استخراج کرد. طبق اصل هامیلتون داریم:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} (\Pi_T - \Pi_s)\,dt = \circ \quad (۱۹)$$

با توجه به این اصل دو معادله حرکت برای تیر به دست می آید.

$$\delta U: EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\mu l_0^2 A\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{4}{5}\mu l_1^2 A\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial N_0}{\partial x} - \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۰)$$

$$\delta W: \frac{\partial}{\partial x}\left(N_0\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial^6 w}{\partial x^6}\left(2\mu l_0^2 I + \frac{4}{5}\mu l_1^2 I\right) - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(EI + 2\mu l_0^2 A + \frac{8}{15}\mu l_1^2 A + \mu l_2^2 A\right) + \rho I\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2} - \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۲۱)$$

برای بررسی معادلات حرکت معمولا معادلات حرکت بی‌بعدسازی می‌شود. ابتدا گروههای بی‌بعد به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$(l_\circ, l_1, l_2) = L(\ell_\circ, \ell_1, \ell_2) \quad , \quad t = \tau L\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$
$$u(x,t) = LU(X,\tau)\ ,\ w(x,t) = LW(X,\tau)$$
$$x = X\,L\ \ ,\frac{\mu}{E} = G\ ,N_0(t) = EAN(\tau)$$
$$\frac{I}{L^2 A} = I_n\ \ ,\frac{L^2 k_w}{EA} = K_W, \frac{L^2 k_G}{EA} = K_G \quad (۲۲)$$

در عبارات بالا پارامتر بی بعد سمت راست رابطه‌ها هستند. مثلاً U بی بعد است و u بعد دار است. با جایگذاری گروه های بی بعد در معالات حاکم ، معادلات بی بعد بدست می آید:

$$\delta U: \frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial X^2} - 2G\ell_0^2\left(\frac{\partial^4 U(X,\tau)}{\partial X^4}\right) - \frac{4}{5}G\ell_1^2\left(\frac{\partial^4 U(X,\tau)}{\partial X^4}\right) + \frac{\partial N(\tau)}{\partial X} - \frac{\partial^2 U(X,\tau)}{\partial\tau^2} = 0$$

$$\delta W: \frac{\partial}{\partial X}\left(N(\tau)\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}\right) + \frac{\partial^6 W(X,\tau)}{\partial X^6}\left(2G\ell_0^2 I_n + \frac{4}{5}G\ell_1^2 I_n\right) - \frac{\partial^4 W(X,\tau)}{\partial X^4}\left(I_n + 2G\ell_0^2 + \frac{8}{15}G\ell_1^2 + G\ell_2^2\right) + I_n\frac{\partial^4 W(X,\tau)}{\partial X^2\partial\tau^2} - \frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial\tau^2} = 0$$

اگر اثرات محیط الاستیک وینکلرو پاسترناک و اثرات حرارتی محیط نیز در نظر گرفته شود معادله دوم به صورت زیر در خواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
&\delta W : \frac{\partial}{\partial X}\left(N(\tau)\frac{\partial W(X,\tau)}{\partial X}\right) + \\
&\frac{\partial^6 W(X,\tau)}{\partial X^6}\left(2G\ell_0{}^2 I_n + \frac{4}{5}G\,\ell_1{}^2 I_n\right) - \\
&\frac{\partial^4 W(X,\tau)}{\partial X^4}\left(I_n + 2G\ell_0{}^2 + \frac{8}{15}G\,\ell_1{}^2 + G\ell_2{}^2\right) \\
&+ I_n\frac{\partial^4 W(X,\tau)}{\partial X^2 \partial \tau^2} - \frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial \tau^2} + \\
&K_G\left(\frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2}\right) - K_W W(X,\tau) - \\
&\alpha T\left(\frac{\partial^2 W(X,\tau)}{\partial X^2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

(۲۴)

در این معادلات k_W ضریب اثر فنری خطی محیط وینکلر، k_G ضریب اثر فنری پیچشی محیط پاسترناک و α ضریب انبساط حرارتی محیط است.

۶- پایداری دینامیکی

پایداری دینامیکی سازه‌های الاستیک به ویژه در بارگذاری محوری و کمانش یکی از مباحث نسبتا جدید مکانیک جامدات محسوب می‌شود که با توجه به ظهور کاربردهای عملی آن مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. اگر در بارگذاری استاتیکی نیروی اعمال شده از میزان نیروی بحرانی بیشتر شود سازه یا ستون دچار کمانش می‌شود. کمانش در این حالت بیانگر پدیده ناپایداری در اثر اعمال بار ثابت استاتیکی است و تبعات آن خیز زیاد تیر در جهت عرضی است. در تحلیل پایداری دینامیکی، حرکت‌های ناشی از تحریکات وابسته به زمان بررسی می‌شوند. در مقایسه بین پدیده پایداری دینامیکی و ارتعاشات اجباری یک سیستم می‌توان بیان کرد که در تحلیل ارتعاشات اجباری، تحریک بصورت جمله ناهمگنی در معادلات حاکم ظاهر می‌شود ولی در تحلیل پایداری دینامیکی، تحریک در ضرایب معادلات دیفرانسیلی سیستم وارد می‌شود. بعبارتی معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر با زمان از مشخصه‌های تحلیل پایداری دینامیکی است.

تحریک وابسته به زمان در پارامترهای معادلات حاکمه را تحریک پارامتری[1] گویند[۱۷]. در ارتعاشات اجباری چنانچه تحریک کوچک باشد زمانی که فرکانس تحریک به یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم نزدیک شود، پاسخ قابل ملاحظه‌ای مشاهده می‌شود که به آن تشدید[2] گویند. ولی در پایداری دینامیکی، چنانچه فرکانس تحریک به دو برابر یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم نزدیک شود، تحریک پارامتری موجب ظهور پاسخ قابل توجهی می‌گردد که این پدیده را رزونانس پارامتری اصلی[3] می‌گویند.

در یک تیر تحت خمش اگر اولین فرکانس طبیعی خمشی تیر برابر ω_1 باشد نیروی تحریک محوری برابر $P_1 = \sin 2\omega_1 t$ باشدثابت می‌شود که در این حالت دامنه نوسانات عرضی مدام افزایش می‌یابد و به تشدید منجر می‌شود. در این حالت رفتار تیر مشابه رفتار تیر تحت خمشی است که بار خمشی آن به صورت $P = \sin(\omega_1 t)\sin(\pi x / L)$ وارد می‌شود. واضح است که این تابع تحریک در طول زمان موجب بروز تشدید و افزایش تدریجی دامنه پاسخ می‌شود. به دلیل این مشابهت به این نوع ناپایداری کمانش ارتعاشی[4] گویند.

۷- حل معادلات برای بررسی پایداری دینامیکی

در این بخش با توجه به معادلات حرکت استخراج شده از مرحله قبل که بر اساس تئوری گرادیان کرنش به دست آمده، مسئله ارتعاشات آزاد مورد تحلیل قرار می‌گیرد. همچنین مسئله کمانش تیر بررسی شده و نیروی بحرانی کمانش در حالت استاتیکی بر حسب پارامترهای سیستم محاسبه می‌شود. سپس مسئله پایداری دینامیکی با توجه به معادلات بررسی شده و شرایط پایداری دینامیکی تیر استخراج می‌شود. نتایج به دست آمده به صورت نمودار ارائه می‌شود.

1- Parametric excitation
2- Primary Resonance
3- Parametric Resonance
4- Vibration Buckling

۷-۱-ارتعاشات آزاد

برای حل ارتعاشات آزاد تیر و استخراج فرکانسهای طبیعی تیر از حل ناویر استفاده شده است. در این حل فرض می‌شود که پاسخ سیستم به صورت کلی زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} U(X,\tau) \\ W(X,\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}\cos(m\pi X) \\ \hat{W}\sin(m\pi X) \end{pmatrix} e^{i\Omega_n \tau} \qquad (۲۵)$$

در این معادله Ω_n فرکانس ارتعاشات آزاد سیستم و m مود ارتعاشی است. با جایگذاری روابط فوق در معادلات حرکت بی بعد شده فصل قبل و با فرض اینکه نیروی محوری خارجی یا N_0 تابع x نباشد و صرفا تابع زمان باشد با ساده سازی معادله اول داریم:

$$\begin{aligned} &\delta U : -\frac{1}{5}\hat{U}e^{i\Omega\tau}\cos(m\pi X) \\ &\left(10m^4\pi^4 G\ell_0^{\,2} + 4m^4\pi^4 G\ell_1^{\,2} + 5m^2\pi^2 - 5\Omega^2\right) = 0 \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

به همین صورت چنانچه در معادله دوم بی بعد نیز عبارات قبلی جایگذاری شود:

$$\begin{aligned} &\delta W : -\frac{1}{15}\left(\hat{W}e^{i\Omega\tau}\sin(m\pi X)\right)\times \\ &(15m^2\pi^2 N(\tau) + m^6\pi^6(30G\ell_0^{\,2}I_n + 12G\ell_1^{\,2}I_n) \\ &+ m^4\pi^4(15I_n + 30G\ell_0^{\,2} + 8G\ell_1^{\,2} + 15G\ell_2^{\,2}) \\ &-15m^2\pi^2\Omega^2 - 15\Omega^2 + \\ &15K_G m^2\pi^2 + 15K_W - 15\alpha T m^2\pi^2) = 0 \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

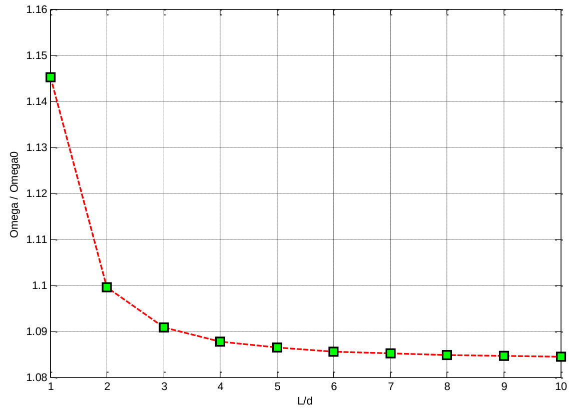
با مساوی صفر قرار دادن ضرایب دو معادله به دست آمده، دو رابطه برای تعیین فرکانسهای طبیعی سیستم و تعیین نیروی کمانش به دست‌می آید. برای تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم و محاسبه فرکانسهای طبیعی سیستم لازم است که نیروی محوری برابر صفر $N_0 = 0$ در نظر گرفته شود. در این حالت رابطه زیر بیانگر فرکانسهای طبیعی سیستم بر اساس مشخصات مکانیکی سیستم است:

$$\begin{aligned} &\Omega_n^{\,2} = \frac{1}{15(1+m^2\pi^2 I_n)}\times \\ &(15m^4\pi^4 I_n + 15m^2\pi^2 N_0 + 15I_n + m^2\pi^2 K_G + \\ &12m^6\pi^6 G\ell_1^{\,2}I_n + 15m^4\pi^4 G\ell_2^{\,2} + 30m^6\pi^6 G\ell_0^{\,2}I_n \\ &+ 8m^4\pi^4 G\ell_1 + 8m^4\pi G\ell_1^{\,2}I_n + 30m^4\pi^4 G\ell_0^{\,2} \\ &-15m^2\pi^2\alpha T + 15K_W) \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

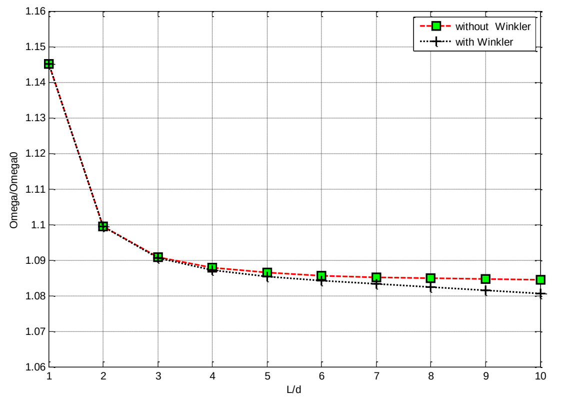
ثابتهای رابطه با توجه به اینکه تیر در نظر گرفته شده نانولوله کربنی است در رابطه جایگذاری شود. با توجه به مراجع[۱۸]و [۱۹] نانولوله کربنی به عنوان یک استوانه توخالی در نظر گرفته می‌شود که ضخامت، قطر خارجی و مدول الاستیسیسته و شاخص طولی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &d = 1\,nm = 1\times 10^{-9}\,m \quad t = 0.34\,nm \\ &E = 1TPa = 10^{12}\,Pa \\ &\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = t = 0.34nm \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

در شکل(۲) اثر تغییرات L/d بر فرکانس طبیعی بی بعد شده در مود اول نشان داده شده است. منظور از فرکانس طبیعی بی بعد شده نسبت فرکانس طبیعی در حالت تئوری گرادیان کرنش به فرکانس طبیعی با تئوری کلاسیک است. با توجه به شکل مشخص است با کاهش نسبت L/d اثرات پارامتر اندازه مشخص تر شده و اختلاف دو تئوری بیشتر نمایان است. در توجیه این امر می توان گفت که با افزایش طول صلبیت سیستم کاهش می یابد و به تبع آن فرکانسهای طبیعی نیز کاهش می یابد و رفتار تیر با در تئوری کلاسیک و گرادیان کرنش به هم نزدیک می شود. همچنین در شکل(۳) اثر ثابت وینکلر به عنوان نماینده محیط الاستیک بر فرکانس طبیعی مود اول در ازای تغییرات L/D نمایش داده شده است. مشخص است که با وجود فرض بستر الاستیک مقادیر فرکانس طبیعی کاهش یافته است که این کاهش در طولهای بزرگتر مشهودتر است.



شکل(۲) اثر تغییرات L/d بر فرکانس طبیعی بی بعد شده مود اول $(m=1)$ بدون اثر محیط



شکل(۲) مقایسه اثر تغییرات L/d بر فرکانس طبیعی بی بعد شده مود اول $(m=1)$ با لحاظ بستر الاستیک

۷-۲- کمانش استاتیکی

برای حل مسئله کمانش و محاسبه نیروی استاتیکی کمانش لازم است در معادله دترمینان ضرایب برای حل ناویر مقدار فرکانس $\Omega = 0$ فرض شود و مقدار $N(\tau)$ و سپس N به عنوان نیروی کمانش استاتیکی از معادله به دست آید. با اعمال مراحل فوق رابطه زیر برای نیروی بحرانی بی بعد شده به دست می‌آید.

$$N_{cr} = \frac{1}{15m^4\pi^4}(-12m^6\pi^6 G\ell_1^2 I_n - 30m^6\pi^6 G\ell_0^2 I_n - 15m^2\pi^2 K_G - 30m^4\pi^4 G\ell_0^2 - 15m^2\pi^2 G\ell_2^2 - 15K_W - 8m^2\pi^2 G\ell_1^2 + 15m^2\pi^2\alpha T - 15m^4\pi^4 I_n) \quad (۳۰)$$

۷-۳) تحلیل پایداری دینامیکی

هدف از تحلیل پایداری دینامیکی پیدا کردن محدوده فرکانسهای و دامنه های نیروی تحریک محوری تیر است به نحوی که ارتعاشات پایدار باشد. روش تحلیلی در این بخش شامل مراحل زیر است[۲۷]:

الف- معرفی تابع تحریک دلخواه به نحوی که این تابع هارمونیک شامل یک جمله ثابت و جمله نوسانی است که مقدار جمله ثابت آن از بار کمانش استاتیکی کمتر است و فرکانس تحریک آن نصف فرکانس طبیعی ارتعاشات عرضی است.

ب- معرفی پاسخ سیستم به صورت هارمونیک که تابع مکان است.

ج- معرفی دامنه پاسخ سیستم به صورت تابع هارمونیک که تابع زمان است.

د-استخراج دترمینان یا معادله مشخصه سیستم که این معادله یک رابطه دو پارامتری بین فرکانس تحریک محوری و دامنه تحریک نیروی محوری است.

ه-تعیین دامنه و مرز پایداری

برای انجام مراحل فوق نیروی تحریک به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$N(\tau) = N_s + N_a coc(\Omega\tau) \quad (۳۱)$$

حال فرض می کنیم که پاسخ سیستم به صورت زیر باشد:

$$\begin{pmatrix} U(X,\tau) \\ W(X,\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U}(\tau)\cos(m\pi X) \\ \hat{W}(\tau)\sin(m\pi X) \end{pmatrix} \quad (۳۲)$$

با جایگذاری پاسخها و نیروی محوری در معادلات حرکت بی بعد شده و پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$\delta u: \frac{-2}{5}\hat{U}(\tau)m^4\pi^4G\ell_1{}^2-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\hat{U}(\tau)-\frac{1}{2}\hat{U}(\tau)-\hat{U}(\tau)m^4\pi^4\ell_0{}^2=0$$

$$\delta w: \frac{-1}{2}\hat{W}(\tau)m^2\pi^2(N_s+N_a coc(\Omega\tau))-\frac{1}{2}\hat{W}(\tau)m^2\pi^2K_G-\frac{2}{5}\hat{W}(\tau)m^6\pi^6G\ell_0{}^2I_n-\frac{4}{15}\hat{W}(\tau)m^4\pi^4G\ell_1{}^2-\hat{W}(\tau)m^4\pi^4G\ell_0{}^2-\frac{1}{2}m^2\pi^2I_n\frac{d^2}{dt^2}\hat{W}(\tau)+\frac{1}{2}\hat{W}(\tau)m^2\pi^2\alpha T-\frac{1}{2}\hat{W}(\tau)K_w-\frac{1}{2}\hat{W}(\tau)m^4\pi^4I_n=0$$

(٣٣)

حال دو رابطه زیر برای دامنه پاسخها که تابع زمان است در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{pmatrix}\hat{U}(\tau)\\ \hat{W}(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\sin(\frac{1}{2}\Omega\tau)+a_2\cos(\frac{1}{2}\Omega\tau)\\ a_3\sin(\frac{1}{2}\Omega\tau)+a_4\cos(\frac{1}{2}\Omega\tau)\end{pmatrix} \quad (٣٤)$$

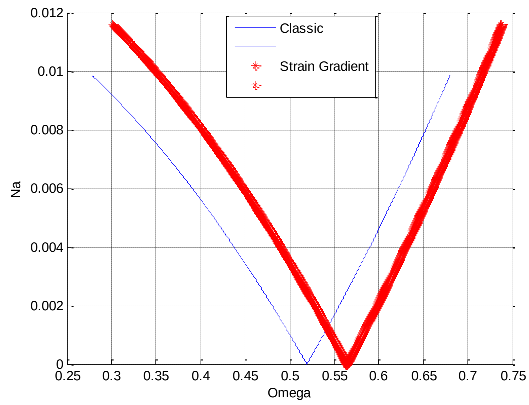
اگر معادلات فوق را در روابط ناشی از معادلات حرکت جایگذاری کنیم و با صفر متحد بگذاریم در اثر صفر گذاشتن ضرایب $\sin(0.5\Omega\tau)$ و $\cos(0.5\Omega\tau)$ یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهول بر حسب مجهولات (a_1,a_2,a_3,a_4) به دست می‌آید که سمت راست آن برابر صفر است. با صفر گذاشتن دترمینان ضرایب دستگاه، معادله مشخصه سیستم استخراج می‌شود. این معادله رابطه بین فرکانس تحریک Ω و دامنه تحریک را برای حوزه پایداری مشخص می‌کند.

با توجه به مفصل بودن محاسبات و نتایج حاصل، کلیه محاسبات در نرم افزار MAPLE انجام شده و نهایتا ریشه حقیقی معادله مشخصه سیستم به صورت زیر استخراج شده است:

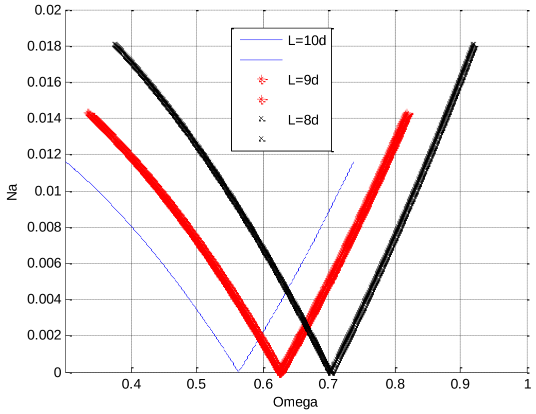
$$\Omega=\frac{1}{15(1+m^2\pi^2I_n)}(\sqrt{30}((1+m^2\pi^2I_n)(15m^2\pi^2N_a+60m^4\pi^4G\ell_0{}^2+30m^4\pi^4I_n+30K_W+60m^6\pi^6G\ell_0{}^2I_n-30m^2\pi^2\alpha T+24m^6\pi^6\ G\ell_1{}^2I_n+30m^2\pi^2\ N_s+30m^2\pi^2\ K_G+30m^4\pi^4G\ell_2{}^2+16m^4\pi^4G\ell_1{}^2))^{0.5})$$

(٣٥)

حال با جایگذاری ثابتها می‌توان نتایج را مشاهده کرد. در محاسبات فرض می‌شود که حداکثر دامنه نیروی محوری برابر ٣٠ درصد نیروی کمانش استاتیکی باشد. در شکل(۴) مرز پایداری در مود اول در حالت کلاسیک و گرادیان کرنش نشان داده شده است. در شکل(۵) اثر تغییرات L/d بر مرز پایداری طبق تئوری گرادیان کرنش بررسی شده است. با افزایش نسبت منظری مرز پایداری به سمت چپ حرکت می‌کند که با نتایج مراجع [۱۴-۱۷] تطبیق دارد. با توجه به نتایج اثرات اندازه در محاسبه مرز پایداری مشهود است. با توجه به اینکه شاخصهای طولی (ℓ_0,ℓ_1,ℓ_2) در تئوری گرادیان کرنش نماینده فاصله بین اتمی هستند و این مقادیر در تئوری کلاسیک صفر فرض می شود انتظار می رود با لحاظ کردن شاخصهای طولی در معادلات صلبیت سیستم کاهش پیدا کرده و به تبع آن فرکانسهای طبیعی نیز کاهش پیدا کنند و مرز ناپایداری گسترش یابد که این پدیده در نتایج به دست آمده در شکلهای(۴)و (۵) مشخص است.



شکل(٣) تفاوت مرز پایداری با دو تئوری کلاسیک و گرادیان کرنش در مود اول بدون اثر محیط



شکل(۴) اثر تغییرات L/d بر مرز پایداری در مود اول بدون اثر محیط با تئوری گرادیان کرنش

۸- نتیجه گیری

در این مقاله سعی شد که با توجه به تئوری گرادیان کرنش مسئله پایداری دینامیکی نانولوله کربنی بررسی شود. در ابتدا معادلات حرکت بر اساس تئوری اویلر-برنولی استخراج شده و با حل مسئله کمانش اثرات نسبت منظری بر فرکانس طبیعی با دو تئوری کلاسیک و گرادیان کرنش بررسی شد که نتایج حاکی از اختلاف دو تئوری در طولهای بلند بود. همچنین روابطی برای بررسی اثر محیط بر ارتعاشات عرضی و کمانش نانولوله بر اساس تئوری گرادیان کرنش استخراج شد و اثرات تغییرات نسبت منظری بر دامنه پایداری در تئوری گرادیان کرنش بررسی شد. با توجه به نتایج مشخص شد که ناحیه ناپایداری پیش بینی شده در تئوری گرادیان کرنش نسبت به تئوری کلاسیک گسترش یافته است و با توجه به اینکه استفاده از تئوری گرادیان کرنش در ابعاد میکرو و نانو توصیه شده است نتایج به دست آمده به واقعیت نزدیکتر است.

مراجع

[1] Asghari, M., Rahaeifard, M., Kahrobaiyan, M.H., Ahmadian, M.T., The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation. *Material Des.*, Vol. 32, 2011, pp. 1435–1443.

[2] Asghari, M., Geometrically nonlinear micro-plate formulation based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, vol. 51, 2012, pp. 292–309.

[3] Ansari R., Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory, *Composite Structures*, vol. 94, 2011.

[4] Fu Y., Zhang J., Electromechanical dynamic buckling phenomenon in symmetric electric fields actuated microbeams considering material damping, *Acta Mechanicals*, vol. 212, 2010, pp. 29–42.

[5] Ferreira A., Batra R.C., Roque CMC, Qian LF, , Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, Composite Structures, vol. 75, 2006, pp. 593–600.

[6] Seidel, Analytic and Computational Micromechanics of Clustering and Interphase Effects in Carbon Nanotube, 2007.

[7] Yang F., Chong,A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity, *International Journal of Solids Structure*, vol. 39, 2002, pp. 2731–2743.

[8] Tadi Beni Y., Karimipour I., Abadyan M., Modeling the instability of electrostatic nano-bridges and nano-cantilevers using modified strain gradient theory, *Applied Mathematical Modelling*, 2014, In press.

[9] Fakhrabadi M.M.S., Rastgoo A., Ahmadian M.T., Non-linear behaviors of carbon nanotubes under electrostatic actuation based on strain gradient theory, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 67, 2014, pp. 236-244.

[10] Wang L., Wave propagation of fluid-conveying single-walled carbon nanotubes via gradient elasticity theory, *Computational Materials Science*, vol. 49, No. 4, 2010, pp. 761-766.

[11] Miandoab E., Yousefi-Koma A., and Pishkenari H., Nonlocal and strain gradient based model for electrostatically actuated silicon nano-beams, *Microsystem Technologies*, vol. 21, No. 2, 2015, pp. 457-464.

[12] Koochi A., Sedighi H.M., Abadyan M., Modeling the size dependent pull-in instability of beam-type NEMS using strain gradient theory.

[13] Nami, M.R., Janghorban, M., Static analysis of rectangular nanoplates using exponential shear deformation theory based on strain gradient elasticity theory, *Iranian Journal of Materials Forming*, vol. 1, No. 2, 2014, pp. 1-13.

[14] Ru C.Q., Axially compressed buckling of a doublewalled carbon nanotube embedded in an elastic medium, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 49, 2001, pp. 1265-1279.

[15] Wang C.Y., Ru C.Q., Mioduchowski A., Axially compressed buckling of pressured multiwall carbon nanotubes, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, 2003, pp. 3893-3911.
[16] Yoon J., Ru C.Q., A. Mioduchowski, Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Composites Science and Technology*, 65 (2005) 1326-1336.
[17] Païdoussis M.P., Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow, *Academic Press*, 1998.
[18] Ghorbanpour Arani A., Rahmani R., Arefmanesh A., Golabi S., Buckling analysis of multi-walled carbon nanotubes under combined loading considering the effect of small length scale, *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 22, 2008, pp. 429-439.
[19] Sun C., Liu K., Dynamic buckling of double-walled carbon nanotubes under step axial load, *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 22, 2009, pp. 27-36.
[20] Ansari R., On the dynamic stability of embedded single-walled carbon nanotubes including thermal environment effects, 2012.
[21] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosayyebi M., Jamali M., Pulsating fluid induced dynamic instability of visco-double-walled carbon nano-tubes based on sinusoidal strain gradient theory using DQM and Bolotin method, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2014, pp. 1-22.
[22] Ghorbanpour Arani A., Yousefi M., Amir S., Dashti P., Chehreh A.B., Dynamic Response of Viscoelastic CNT Conveying Pulsating Fluid Considering Surface Stress and Magnetic Field, *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 40, No. 6, 2015, pp. 1707-1726.
[23] Mindlin, R.D., Second gradient of strain and surface tension in linear lasticity, Int. J. Solids Struct. 1, pp. 417–438 ,1965
[24] Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W., Strain gradient plasticity: theory and experiment. Acta Metallurgy and Materials, vol. 42, 1994, pp. 475–487.
[25] Yan, Y., X.Q. He, L.X. Zhang, C.M. Wang, Dynamic behavior of triple-walled carbon nanotubes conveying fluid, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319 , 2009, pp. 1003-1018.
[26] Tadi Y., Cylindrical thin-shell model based on modified strain gradient theory, International Journal of Engineering Science, 2014.
[27] Herbert E., Lindberg, Little Book of Dynamic Buckling, 2003.
[28] Nayfeh A.H., Mook D.T., Nonlinear oscillations, Wiley classics library, 1995.