مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره بیست و چهارم / پائیز ۱۳۹٤

بهینه‌سازی پرتفوی ردیاب شاخص با استفاده از مدل تک شاخصی پایدار برمبنای شاخص ۵۰ شرکت فعالتر بورس اوراق بهادار تهران

سعید فلاح‌پور[۱]
فرید تندنویس[۲]
سیدمحمدامیر هاشمی[۳]

تاریخ دریافت: ۹۳/۱۱/۲۵ تاریخ پذیرش: ۹۴/۲/۱۴

چکیده

تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص به عنوان رویکرد منفعلانه در مدیریت پرتفوی، دو ایده اصلی را نسبت به مدیریت فعال دنبال می‌کند؛ الف) این رویکرد از طریق سرمایه‌گذاری بر اساس یک استراتژی معین که نیاز به هیچ پیش‌بینی ندارد، علاوه بر حداقل نمودن هزینه‌های سرمایه‌گذاری، از نتایج ناسازگار پیش‌بینی با آنچه که در عمل اتفاق می‌افتد، نیز اجتناب می‌کند ب) با ردیابی یک شاخص، پرتفوی سرمایه‌گذاری به طور نسبی از تنوع خوبی برخوردار است، حجم معاملات کمی دارد که منجر به هزینه معاملاتی حداقل می‌شود و به طور کلی هزینه‌های مدیریتی بسیار پائینی خواهد داشت. در این پژوهش با استفاده از مدل بهینه‌سازی پایدار و تکیه بر مهم‌ترین ویژگی این مدل که در شرایط عدم اطمینان در مورد توزیع احتمال پارامترهای مدل، فرض خاصی را منظور نمی‌کند و برای هر پارامتر یک مجموعه عدم قطعیت در نظر می‌گیرد، به تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص پرداخته‌ایم. برای این منظور از شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار تهران طی بازه زمانی۱۳۹۰/۷/۱ الی ۱۳۹۲/۱/۱ استفاده شده است. نتایج آزمون خارج از نمونه مبتنی بر مقایسه‌ی زوجی نتایج مربوط به بازده پرتفوی ردیاب شاخص حاصل از مدل پایدار و پرتفوی ردیاب شاخص حاصل از مدل ناپایدار طی بازه زمانی ۱۳۹۲/۱/۱ الی ۱۳۹۲/۱۰/۱، نشان می‌دهند که خطای ردیابی پرتفوی شاخصی پایدار به طور معناداری کمتر یا مساوی خطای ردیابی پرتفوی شاخصی ناپایدار است که این امر برتری مدل پایدار در تشکیل پرتفوی شاخصی را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: پرتفوی ردیاب شاخص - بهینه‌سازی پایدار -مدل تک عاملی - خطای ردیابی.

۱- استادیار گروه مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران (مسئول مکاتبات) farid_ftnk@yahoo.com
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران

۱- مقدمه

مدیران صندوق‌های سرمایه‌گذاری در مدیریت پرتفوی به طور کلی از دو رویکرد فعال یا غیرفعال استفاده می‌کنند. در رویکرد فعال، مدیر از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار است و سعی می‌کند در طول زمان سهم‌هایی را شناسایی نماید که نسبت به سایر سهم‌ها عملکرد بهتری خواهند داشت. اصلی‌ترین فرض در رویکرد فعال این است که تجربه‌ها و قضاوت‌های شخصی مدیران سرمایه‌گذاری در مورد انتخاب سهم‌هایی با عملکرد مناسب و هم‌چنین تعیین زمان مناسب برای خرید و فروش، می‌تواند ارزش افزوده ایجاد نماید. در رویکرد غیرفعال، مدیر از انعطاف‌پذیری کمتری برخوردار است و سعی می‌کند بر مبنای مجموعه‌ای از ضوابط از پیش تعیین شده، عمل نماید. یکی از رایج‌ترین ضوابط در مدیریت غیر فعال صندوق‌های سرمایه‌گذاری این است که صندوق باید با سرمایه‌گذاری در همه یا برخی از سهم‌های یک شاخص بازار، به طور نسبی بازدهی معادل بازده آن شاخص داشته باشد مثل شاخص S&P500 در نیویورک و یا FTSE100 در لندن. هر کدام از این استراتژی‌ها نقاط ضعف و قوت زیادی دارند که به طور خلاصه در ذیل به آنها اشاره می‌شود:

- رویکرد فعال هزینه‌های معاملاتی و ثابت بالایی دارد. مانند هزینه پرداختی به تیم مدیریت پرتفوی و هزینه‌های جستجوی سهام برتر. هم‌چنین در این رویکرد با توجه به حجم بالای معاملات که شامل خرید سهم‌های دارای عملکرد مناسب و فروش سهم‌های با عملکرد ضعیف‌تر می‌شود، هزینه‌های معاملاتی بسیار بالا است.
- علی‌رغم هزینه‌های پایین‌تر رویکرد غیرفعال نسبت به رویکرد فعال، نقطه ضعف رویکرد غیرفعال این است که اگر بازار و به تبع آن شاخص حرکت منفی داشته باشد، پرتفو نیز بازدهی منفی خواهد داشت.
- در رویکرد فعال، سرمایه‌گذار هم در معرض ریسکِ مختص شرکت و هم در معرض ریسکِ بازار قرار می‌گیرد. اما پرتفویی که با استفاده از روش غیرفعال مدیریت می‌شود، فقط متاثر از ریسک بازار خواهد بود.

مسئله تشکیل پرتفویی از سهم‌های یک شاخص که بتواند عملکرد شاخص را بازسازی نماید، با عنوان مسئله ردیابی شاخص معرفی شده است. برای یک مدیر سرمایه‌گذاری، شاید یکی از ساده‌ترین راه‌ها برای تکرار عملکرد یک شاخص توسط پرتفویی از اوراق بهادار، این باشد که تمام اوراق بهادار آن شاخص را در وزن متناسب با وزن شاخص خریداری و نگه داری نماید. این رویکرد با نام تکرار کامل شناخته می‌شود. پر واضح است که در این شرایط عملکرد پرتفوی کاملا منطبق بر عملکرد شاخص خواهد بود اما باید به این نکته توجه داشت که تعداد سهم‌های تشکیل‌دهنده‌ی یک شاخص زیاد است بنابراین وزن هر سهم در پرتفوی بسیار کوچک خواهد شد و این وزن‌های کوچک در هنگام تعدیل شاخص برای مدیر سرمایه‌گذاری مشکل‌ساز خواهند شد زیرا تعدیل شاخص به دفعات زیادی رخ می‌دهد که این امر باعث افزایش هزینه‌های معاملاتی نیز می‌شود. برای مثال شاخص ۵۰ شرکت فعال بورس اوراق بهادار تهران در صورت افزایش

سرمایه شرکت‌ها از محل آورده‌های نقدی یا مطالبات سهامداران و ورود و خروج شرکت‌ها در پایان هر سه ماه تعدیل خواهد شد. با تعدیل شاخص، ترکیب دارایی‌های یک پرتفوی ردیاب تکرار کامل، دچار دگرگونی می شود و این مسئله هزینه‌های معاملاتی بالایی را به پرتفوی تحمیل می کند و به این ترتیب یکی از مهم ترین مزیت‌های مدیریت غیرفعال (هزینه معاملاتی پایین) ارزش خود را از دست خواهد داد. با کاهش تعداد سهم‌های پرتفوی ردیاب شاخص، قطعا هزینه‌های معاملاتی و مدیریت پرتفوی کاهش چشمگیری خواهد داشت اما از طرف دیگر عملکرد پرتفوی و شاخص نیز فاصله خواهند گرفت. اختلاف عملکرد پرتفوی ردیاب شاخص و شاخص مورد نظر توسط معیار خطای ارزیابی اندازه‌گیری می‌شود که با تعداد سهم‌های موجود در پرتفوی ردیاب و به تبع آن با هزینه‌های مدیریت پرتفوی رابطه معکوس دارد.

برای حل کردن مسئله تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص با تعداد سهام محدود و در عین حال با خطای ردیابی حداقل، می‌توان در سطح مشخصی از تعداد سهام موجود در پرتفوی ردیاب، با استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی به کمینه نمودن خطای ردیابی مورد انتظار پرداخت. استفاده از مدل‌های میانگین-واریانس مارکویتز و یا مدل‌های عاملی راه حل‌های دیگری برای این منظور هستند. این پژوهش با معرفی مدلی که بر اساس مدل تک عاملی و با در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها به ردیابی شاخص می پردازد، به دنبال آزمون این فرضیه است که "در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترها توسط رویکرد بهینه‌سازی پایدار، در مدل ردیابی شاخص، عملکرد مدل را بهبود خواهد بخشید".

۲- پیشینه و مبانی نظری پژوهش

۲-۱- پیشینه تجربی

رویکردهای مختلفی برای تشکیل صندوق‌های مبتنی بر شاخص و یا پرتفوی ردیاب در ادبیات موضوع ارائه شده است. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین این روش‌ها استفاده از یک مدل بهینه سازی به منظور کمینه کردن خطای ردیابی مورد انتظار توسط انتخاب تعداد مشخصی از دارایی‌هاست [۷]. برای خطای ردیابی تعاریف گوناگونی در ادبیات موضوع به کار برده شده است. برخی خطای ردیابی را قدرمطلق اختلاف بین بازده شاخص و پرتفوی و برخی دیگر آنرا واریانسِ اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوی معرفی نمودند[۱۴]، [۱۵] و [۱۲]. گیورنسکی و دیگران معیارهای دیگری را به عنوان شاخص اندازه‌گیری خطای ردیابی معرفی نمودند[۱۱]. همانطور که در تعریف خطای ردیابی واضح است، مسئله کمینه‌سازی خطای ردیابی یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم است و از نظر محاسباتی پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. برخی محققین به بررسی رویکردهای ابتکاری برای تحلیل مسئله پرداختند و در واقع بر روی پیچیدگی محاسباتی مسئله تمرکز نمودند[۳]. گیلی و کزلی نیز به بررسی الگوریتم ابتکاری پذیرش آستانه‌ای پرداختند و این الگوریتم را به عنوان رویکردی موثر در ردیابی شاخص معرفی نمودند[۱۰]. کنو و ویجایانایاکا به جای واریانس، به کمینه‌سازی قدرمطلق اختلاف بازده شاخص و بازده پرتفوی با استفاده از الگوریتم شاخه و کران پرداختند[۱۳]. رودلف و دیگران نیز به معرفی معیارهایی خطی برای اندازه گیری خطای ردیابی پرداختند و با استفاده از برنامه‌ریزی خطی مقدار خطای ردیابی را کمینه نمودند و جواب مسئله را استخراج کردند[۲۰].

رویکرد دیگری که در ادبیات به آن اشاره شده است، استفاده از مدل‌های عاملی به منظور ایجاد تطابق بین مشخصه‌های پرتفوی ردیاب و شاخص است[۷]. مدل‌های عاملی بازده یک سهم را به یک یا چند عامل اقتصادی مربوط می‌سازند. برای مثال یک مدل تک شاخصی به منظور به دست آوردن بازده سهم i از یک مدل رگرسیون خطی استفاده می‌کند[۳] به این ترتیب که:

$$r_i = \alpha + \beta . r_M \qquad \text{(رابطه ۲-۱)}$$

بتای سهم i، شاخص ارزیابی ریسک سیستماتیک است. در علوم مالی ریسک را به دو دسته سیستماتیک و غیرسیستماتیک تقسیم‌بندی می‌کنند. ریسک غیرسیستماتیک به مشخصات شرکت باز می‌گردد و ریسک سیستماتیک نیز به مشخصات کلی بازار مربوط است[۱۱]. معیار بتا را در قسمت‌های آتی بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. مدل کمینه‌سازی واریانس تحت شرایطی که بتای پرتفوی برابر با یک باشد، می‌تواند به عنوان یک روش تشکیل پرتفوی ردیاب مورد استفاده قرار گیردزیرا پرتفوی ردیاب باید مطابق با شاخص حرکت کند و ضریب رگرسیون شاخص نسبت به خودش برابر ۱ خواهد بود[۲۳]. اردوگان و دیگران [۹] با در نظر گرفتن چندین عامل و هزینه‌های معاملاتی به بیشینه‌سازی شاخص شارپ پرداختند. این محققین به منظور براورد دقیق‌تری از بازده دارایی‌ها از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای [۲۱] استفاده نمودند.

روش دیگری که برای ردیابی شاخص مورد استفاده قرار می‌گیرد روش میانگین واریانس مارکوییتز است. ریچارد رول [۱۹] با استفاده از رویکرد بهینه سازی مارکویتر [۱۶] و [۱۷] به تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص پرداخته و راودر نیز هزینه های معاملاتی را به این مدل اضافه نمود[۱۸].

۲-۲- مبانی نظری پژوهش

۲-۲-۱- مدل‌های عاملی

از مدل های عاملی می توان برای تطابق مشخصه‌های پرتفوی ردیاب و شاخص استفاده نمود. مدل‌های عاملی بازده یک سهم را به یک یا چند عامل اقتصادی مربوط می‌سازند. مدل تک عاملی که توسط شارپ ارائه گردید، حرکت هم‌زمان سهم‌ها (همبستگی سهم‌ها) را به علت یک عامل مشترک یا عمومی در نظر می‌گیرد.

زمانی که بازده واقعی یک دارایی اندازه‌گیری می‌شود، ممکن است با آنچه که سرمایه‌گذران از آن دارایی انتظار داشته‌اند متفاوت باشد. رابطه زیر نشان می‌دهد که تفاوت بین بازده مورد انتظار دارایی و بازده واقعی آن، تحت عنوان بازده غیر منتظره شناخته می‌شود:

$$MR^i = \frac{1 + r_p^i}{1 + r_I^i} \qquad \text{(رابطه ۲-۱)}$$

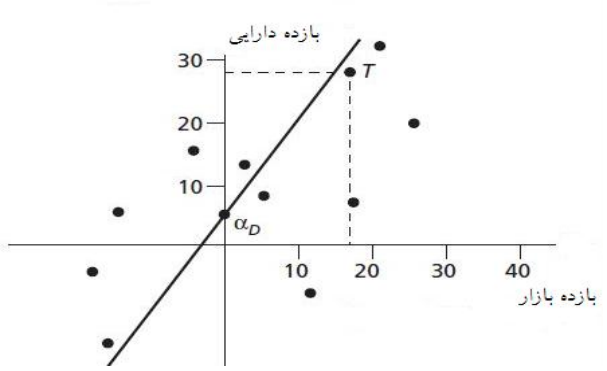
بخش غیرمنتظره بازده یک دارایی، از دو قسمت سیستماتیک و غیرسیستماتیک تشکیل شده‌است. به عبارتی قسمت u در برگیرنده اطلاعاتی است که بخشی از آن تنها در مورد شرکت و بخش دیگر به کل

اقتصاد مربوط می‌شود. بنابراین می‌توانیم u را به دو قسمت تقسیم نماییم؛ بخش اول (m) اطلاعات مربوط به بازار یا ریسک سیستماتیک و بخش دوم (ε) اطلاعات مربوط به شرکت یا ریسک غیرسیستماتیک[۱].

$$r = E(r) + m + \varepsilon \qquad \text{(رابطه ۲-۲)}$$

در مدل تک عاملی، بخش سیستماتیک ریسک تنها در شاخص اقتصادی بازار گنجانده می‌شود به عبارتی فرض می‌شود که بازدهی دارایی با بازدهی بازار ارتباط دارد و تغییرات غیرمنتظره در بازده بازار منجر به تغییرات غیرمنتظره در بازده دارایی خواهد شد [۱].

به منظور بررسی دقیق‌تر مدل تک عاملی، می‌توانیم، بازده مورد انتظار دارایی را به عنوان متغیر وابسته و بازده بازار را به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفت و از طریق محاسبات رگرسیون، بین آنها ارتباط ایجاد نماییم.



شکل۱ - خط مشخصه سهم

خطی که در شکل ۱ مشاهده می نمایید، خط مشخصه یک سهم نام دارد. اگر بازده سهم را با r، بازده بازاررا با r_m نمایش دهیم، معادله خط مشخصه دارایی به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$r = \alpha + \beta . r_m + \varepsilon \qquad \text{(رابطه ۲-۳)}$$

که در آن α عنصر مستقل از عملکرد بازار (بازده مورد انتظار در صورتی که بازده بازار صفر باشد) و r_m نرخ بازده بازار را نشان می‌دهد؛ β تغییرات مورد انتظار بازده دارایی به ازای تغییرات مورد انتظار بازده بازار و ε بیانگر مقدار خطا یا جزء اخلال خواهد بود (بخشی از ریسک که توسط بتا اندازه‌گیری نمی‌شود). با توجه به معادله رگرسیون، مقدار بتا بیانگر میزان حساسیت بازده دارایی نسبت به بازده بازار است. اگر بتای دارایی برابر با یک باشد، در این صورت می توان ادعا نمود که این دارایی به رویدادهای اقتصادی بازتابی یکسان با شاخص، نشان خواهد داد.

روش ایجاد پرتفویی با بتای برابر با یک، می‌تواند به عنوان یک روش مناسب جهت تشکیل پرتفوی ردیاب مورد استفاده قرار گیرد زیرا پرتفوی ردیاب شاخص باید مطابق با شاخص بازار حرکت کند و از طرفی ضریب رگرسیون شاخص نسبت به خودش برابر ۱ خواهد بود.

۲-۲-۲- بهینه سازی در شرایط عدم قطعیت

به طور کلی در دنیای تئوریک مسئله بهینه‌سازی، فرض بر این است که پارامترهای ورودی مدل دارای قطعیت هستند. اما واضح است که برای به کار بردن روش‌های بهینه‌سازی در دنیای واقعی فرض قطعیت پارامترها، با توجه به مواردی که در ادامه بیان شده‌است، فرض صحیحی نیست[۴]:

- برخی از داده‌های ورودی مثل تقاضا برای یک کالای خاص در مسائل تولیدی و یا بازده دارایی‌ها در مسائل مالی در زمانی که مسئله مورد تحلیل قرار می‌گیرد، موجود نیستند و باید پیش‌بینی شوند. مقدار حقیقی پارامتر مورد نظر می‌تواند از مقدار پیش‌بینی شده نوسان کند، لذا این داده‌ها، در برگیرنده خطای پیش‌بینی هستند.
- برخی از داده‌های ورودی مثل پارامترهای مربوط به فرایندهای تکنولوژیکی نمی‌توانند به طور دقیق مورد اندازه‌گیری قرار گیرند. در واقع این پارامترها حول یک مقدار اسمی نوسان می‌کنند. این داده‌ها، در برگیرنده خطای اندازه‌گیری هستند.

با توجه به توضیحات بالا، در نظر گرفتن عدم اطمینان پارامترهای مدل‌های بهینه‌سازی، برای به کار بردن آنها در واقعیت، مسئله مهمی است که در نتایج اکتسابی و صحت آنها نقش موثری دارد.

اگر پارامترهای مدل از مقدار اسمی خود نوسان کنند، امکان دارد جواب بهینه‌ای که بر اساس مقدار اسمی پارامترها محاسبه شده است، شرایط بهینگی را از دست بدهد و یا برخی از محدودیت‌ها را نقض کند و از محدوده جواب‌های موجه خارج شود[۸]. موضوع بهینه‌سازی در شرایط عدم اطمینان در دهه ۱۹۵۰ توسط دانتزیک با ارائه بهینه‌سازی تصادفی و کارنس و کوپر با ارائه بهینه‌سازی در شرایط محدودیت‌های احتمالی مطرح گردید. با اینکه دو رویکرد بهینه‌سازی تصادفی و بهینه‌سازی در شرایط محدودیت‌های احتمالی بر اصول و روش‌های تحلیلی متفاوتی مبتنی هستند، بر فرض "مشخص بودن توزیع احتمال پارامترهای تصادفی مدل" بنا شده‌اند. به عبارتی از اطلاعات موجود برای این پارامترها، برای تبدیل مدل تصادفی به مدل قطعی استفاده می‌شود. مدل قطعی نهایی می‌تواند به صورت برنامه‌ریزی خطی، غیر خطی و ... باشد. امروزه بهینه‌سازی تصادفی، خود را به عنوان یکی از ابزارهای توانمند مدل‌سازی عدم اطمینان تحت شرایطی که اطلاعات کافی و مشروح در مورد توزیع احتمال پارامترهای مدل مشخص باشد، توسعه داده است اما واضح است که در مسائل دنیای واقعی، تصمیم‌گیرنده چنین اطلاعات دقیقی را در اختیار ندارد[۵]. این مسئله نیاز به تکنیک‌های کمّی که عدم اطمینان پارامترهای مدل را بدون نیاز به بررسی توزیع احتمال آنها در نظر می‌گیرند، آشکار می سازد. این رویکرد در ادبیات موضوع با عنوان بهینه‌سازی پایدار مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۲-۳- بهینه سازی پایدار

بهینه‌سازی پایدار زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که تحلیل‌گر به دنبال جوابی است که به ازای تمامی مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت خوب رفتار کند یا به عبارت دیگر شدنی باقی بماند. بر خلاف برنامه‌ریزی تصادفی که بر اساس تئوری احتمالات با عدم قطعیت پارامترها رفتار می‌کند، این رویکرد به تمامی مقادیر ممکن برای پارامتر دارای عدم قطعیت، اهمیت یکسان می‌دهد. به عبارت دیگر این رویکرد، فرضی در مورد توزیع پارامترهای مدل نمی نماید. عدم اطمینان پارامترهای مدل در این رویکرد توسط مجموعه عدم قطعیت، که در برگیرنده تمامی مقادیر ممکن برای پارامترهای مدل است، توضیح داده می‌شود [۸]. در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به فرم عمومی زیر، بدون اینکه فرضی در مورد توزیع پارامتر مدل شود، برای هر یک از پارامترها یک مجموعه عدم قطعیت متقارن مطابق (۲-۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$min_x c'.x \quad \text{St} \quad Ax \geq b \quad x \in X$$ (رابطه ۲-۴)

$$a_{ij} = [\overline{a_{ij}} - \widehat{a_{ij}}, \overline{a_{ij}} + \widehat{a_{ij}}]$$ (رابطه ۲-۵)

سویستر [۲۲] در مقاله خود با یک رویکرد کاملا محافظه‌کارانه بهینه‌سازی پایدار را برای یک مسئله خطی مطرح نمود. به این شرح که "جواب مسئله بهینه‌سازی باید به ازای تمامی مقادیر ممکن برای پارامترهای مدل، شدنی باقی بماند. بنابراین به ازای بدترین حالت ممکن، پارامترها شدنی باقی خواهد ماند". با توجه به اینکه سمت راست ماتریس محدودیت‌ها به صورت بزرگتر مساوی مقدار b تعریف شده است، بدترین حالت ممکن برای محدودیت‌ها زمانی رخ می‌دهد که هرکدام از a_{ij}ها کمترین مقدار خود یعنی $\overline{a_{ij}} - s_{ij}$را اختیار کنند. بنابراین رویکرد سویستر به تمامی پارامترهای مدل اجازه می‌دهد که از مقدار اسمی خود نوسان نموده و بدترین مقدار خود را اختیار نمایند. به عبارتی این مدل برای اینکه بتواند محافظه‌کارانه-ترین حالت ممکن را برای تصمیم‌گیرنده ایجاد کند، بدبینانه‌ترین شرایط را در نظر می‌گیرد.

برتسیماس و سیم [۶] با اشاره به این مطلب که احتمال رخ دادن بدترین شرایط برای همه پارامترها بسیار اندک است، به تصمیم گیرنده این اختیار را می‌دهد که میزان محافظه‌کاری را با تعریف یک پارامتر تعیین نماید. مقدار z_{ij} به صورت رابطه (۲-۶) معرفی می‌شود.

$$z_{ij} = \frac{a_{ij} - \overline{a_{ij}}}{\widehat{a_{ij}}}$$ (رابطه ۲-۶)

چون فرض بر این است که پارامتر a_{ij} قطعا در بازه رابطه (۲-۲) نوسان می‌کند، مقدار z_{ij} در بازه [-1,1] نوسان خواهد نمود. با این توضیح رابطه (۲-۷) برقرار خواهد بود. در بدترین حالتِ ممکن، به پارامترها اجازه بیشترین نوسان داده می‌شود که در رابطه (۲-۸) نمایش داده شده است:

$$-n \le \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \le n \qquad \forall i$$ (رابطه ۲-۷)

$$\sum_{j=1}^{n} |z_{ij}| = n \qquad \forall i$$ (رابطه ۲-۸)

اما رویکرد برتسیماس و سیم با تعریف پارامتر Γ برای هر محدودیت، مقدار انحراف پارامترها از مقدار مرکزی خود را محدود می‌کند. به عبارتی داریم:

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \le \Gamma_i \qquad \forall i$$ (رابطه ۲-۹)

- اگر $\Gamma_i = 0$ باشد، تمامی z_{ij} ها برابر با صفر می‌باشند. پس محدودیت i در حالت قطعیت کامل تحلیل می‌گردد.
- اگر $\Gamma_i = n$ باشد، در واقع پارامترهای محدودیت iام می‌توانند بیشترین مقدار نوسان، از مقدار مرکزی خود را داشته باشند. محدودیت iام در این شرایط، در محتاطانه‌ترین حالت خواهد بود.

با این توضیحات مدل پایدار برنامه ریزی خطی مشتمل بر دو مسئله بهینه‌سازی اصلی و داخلی به صورت (۲-۱۰) ارائه خواهد شد:

$$min_x c'.x$$
St
$$\sum_j \overline{a_{ij}}.x_j + min_{z_i} \sum_j \widehat{a_{ij}}.x_j.z_{ij} \ge b_i$$
$$x \in X$$
$$Z = \left\{ z \middle| |z_{ij}| \le 1 , \sum_j |z_{ij}| \le \Gamma_i , \forall i,j \right\}$$
(رابطه ۲-۱۰)

مسئله کمینه‌سازی داخلی در این فرم عبارت است از:

$$max_{z_{ij}} - \sum_j \widehat{a_{ij}}.|x_j|.z_{ij}$$
St:
$$\sum_j z_{ij} \le \Gamma_i$$
$$0 \le z_{ij} \le 1$$
(رابطه ۲-۱۱)

با استفاده از قضیه قوی دوگانگی در این مسئله بهینه‌سازی داخلی، مسئله اصلی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

(رابطه ۲-۱۲)

$$
\begin{aligned}
&min_x c'.x \\
&\text{St} \\
&\sum_j \overline{a_{ij}}.x_j - \Gamma_i.p_i - \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \geq b_i \\
&p_i + q_{ij} \geq \widehat{a_{ij}}.y_j \\
&-y_j \leq x_j \leq y_j \\
&x \in X \\
&y \geq 0
\end{aligned}
$$

برای تکمیل این فرایند لازم است که مقدار مناسبی را برای پارامتر Γ که مقدار محافظه‌کاری برای هر محدودیت مشخص می‌کند، انتخاب نمود. برای هر محدودیت به شکل $a'_i x \geq b_i$ مقدار $1-\varepsilon_i$ به عنوان سطح اطمینان تصمیم‌گیرنده نسبت به محدودیت iام، معرفی می‌شود. در چنین حالتی مقدار مناسب برای Γ را می‌توان از رابطه (۲-۱۳) محاسبه نمود که Φ نشان دهنده تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است [۶].

$$\Gamma_i = 1 + \Phi^{-1}(1-\varepsilon_i)\sqrt{n} \qquad \text{(رابطه ۲-۱۳)}$$

۳- فرضیه پژوهش

این پژوهش به دنبال آزمودن این فرضیه است که آیا استفاده از رویکرد بهینه سازی استوار برای در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامترهای مدل بهینه سازی ردیابی شاخص، عملکرد مدل را بهبود می‌دهد یا خیر.

۴- روش شناسی پژوهش

۴-۱- مدل بررسی شده در پژوهش

در این پژوهش به بررسی دقیق‌تر رویکرد مبتنی بر مدل‌های عاملی در ردیابی شاخص تحت شرایط عدم قطعیت پرداخته می‌شود. همان‌طور که پیش از این اشاره شد در یک مدل تک عاملی، بازده یک دارایی به بازده شاخص بازار مرتبط می‌شود که بر این اساس خط مشخصه هر دارایی دارای عرض از مبدا α و شیب β است. انحرافات عمودی از خط مشخصه با عنوان واریانس پسماند یا جزء اخلال نامیده می شوند.

واضح است که شیب خط مشخصه، بیانگر معیاری از ریسک سیستماتیک هر دارایی و انحرافات و جزء اخلال ظاهر شده در این خط، نمایانگر ریسک غیرسیستماتیک هر دارایی می‌باشند. همان‌طور که در مفهوم پرتفوی ردیاب شاخص بیان گردید، پرتفوی و شاخص باید نسبت به رویدادهای اقتصادی بازتابی یکسان نشان دهند. به عبارتی ریسک سیستماتیک هر دو باید با هم برابر باشد و این یعنی پرتفوی باید بتایی نزدیک به مقدار بتای بازار که برابر با عدد یک است، داشته باشد. مسئله دیگری که در ردیابی شاخص اهمیت دارد، این است که نوسان تصادفی بازده پرتفوی نسبت به شاخص باید تا حد امکان کم باشد. این نوسان تصادفی در نتیجه‌ی ریسک غیرسیستماتیک و یا واریانس پسماند به وجود می‌آید. به عبارتی می‌توان

مدل رابطه (۴-۱) را به عنوان مدلی برای تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص معرفی نمود که در آن واریانس پسماند کمینه می‌شود. با معرفی متغیر باینری y که تعداد دارایی‌های موجود در پرتفوی را نشان می‌دهد، می توان تعداد دارایی‌های مورد نظر برای تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص و به تبع آن هزینه‌های معاملاتی را کنترل نمود که با توجه به آن محدودیت‌های دوم و سوم به مدل اضافه می‌شود.

$$min_w w_j^2 . \sigma_{e_i}^2$$ (رابطه ۴-۱)

St

$$0.95 \le \sum_{j=1}^{n} w_j . \beta_j \le 1.05$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = p$$

$$w_j \le y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

$$w_j \ge 0$$

آنچه که در کاربرد این مدل اهمیت دارد این است که پارامتر بتای هر دارایی بر اساس داده های گذشته استخراج می شود و تضمینی وجود ندارد که بتاهای محاسبه شده از طریق تشکیل معادله خط مشخصه هر دارایی در مورد عملکرد آینده دارایی نیز صدق نمایند. بنابراین، این پارامتر مدل دارای عدم قطعیت است. به منظور در نظر گرفتن این عدم قطعیت در مدل، از رویکرد بهینه‌سازی پایدار استفاده می‌شود. به عبارتی به جای در نظر گرفتن برآورد نقطه‌ای برای ضریب رگرسیون، می توان از برآورد فاصله‌ای برای این ضریب استفاده نمود. لذا فرض می شود که:

$$\widehat{\beta_j} - \varepsilon_j \le \boldsymbol{\beta}_j \le \widehat{\beta_j} + \varepsilon_j$$ (رابطه ۴-۲)

به منظور برآورد فاصله‌ای بتا از روابط (۳-۳) استفاده می‌شود. در هنگام تشکیل معادله رگرسیون برای بازده دارایی، آماره زیر دارای توزیع t خواهد بود [2].

$$t = \frac{\boldsymbol{\beta}_j - \widehat{\beta_j}}{se(\widehat{\beta_j})} = \frac{(\boldsymbol{\beta}_j - \widehat{\beta_j})\sqrt{\sum_{t=1}^{k}(r_{I,t} - \overline{r_I})^2}}{\sigma_{e_j}}$$ (رابطه ۴-۳)

که در آن $\boldsymbol{\beta}_j$ بیانگر مقدار واقعی بتا، $\widehat{\beta_j}$ برابر مقدار تخمین زده شده برای بتا و $se(\widehat{\beta_j})$ بیانگر خطای استاندارد تخمین‌زننده، $\sqrt{\sum_{t=1}^{k}(r_{I,t} - \overline{r_I})^2}$ برابر مجذور مجموع مربعات اختلاف بازده شاخص و میانگین بازده شاخص در دوره‌ای است که به منظور برآورد بتا در آن دوره از رگرسیون بین بازده شاخص و بازده دارایی استفاده شده است و σ_{e_j} نشان‌دهنده جذر واریانس پسماند دارایی است. با این توضیحات خواهیم داشت:

$$\Pr\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\boldsymbol{\beta}_j - \widehat{\beta}_j}{se(\widehat{\beta}_j)} < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{(رابطه ۴-۴)}$$

$$\Pr\left(\widehat{\beta}_\iota - \frac{\sigma_{e_j}.t_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{k}(r_{I,t}-\overline{r_I})^2}} < \boldsymbol{\beta_j} < \widehat{\beta}_j + \frac{\sigma_{e_j}.t_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{k}(r_{I,t}-\overline{r_I})^2}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{(رابطه ۴-۵)}$$

حال با توجه به مدل توضیح داده شده در قسمت (۲-۱۲) ، مدل (۳-۱) به شکل رابطه (۳-۶) تبدیل خواهد شد:

$$min_w w_j^2.\sigma_{e_i}^2 \quad \text{(رابطه ۴-۶)}$$

St

$$\sum_{j=1}^{n} w_j.\beta_j + \Gamma.P + \sum_{j=1}^{n} q_j \le 10.5$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j.\beta_j - \Gamma.P - \sum_{j=1}^{n} q_j \ge 0.95$$

$$P + q_j \ge \varepsilon_j.w_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = p$$

$$w_j \le y_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$$

$$w_j \ge 0$$

$$y_j \in \{0,1\}$$

۴-۲- معیارهای ارزیابی عملکرد

به منظور ارزیابی عملکرد پرتفوی، از معیار خطای ردیابی استفاده می‌شود. این معیار که از طریق رابطه زیر محاسبه می شود، به بررسی اختلاف عملکرد بازده شاخص و بازده پرتفوی، در دوره زمانی مورد آزمون خواهد پرداخت.

$$TE^t = stdev(r_p - r_m) \quad \text{(۴-۷)}$$

به منظور ارزیابی عملکرد پرتفوهای تشکیل شده از معیار نسبت اطلاعاتی استفاده شده‌است. مقدار این معیار از طریق رابطه ۳-۹ محاسبه می‌شود.

$$IR^t = \frac{r_p^t - r_m^t}{TE^t} \quad \text{(۴-۸)}$$

نسبت بازده بازار نیز که از طریق رابطه (۳-۱۰) محاسبه می‌شود به منظور مقایسه عملکرد بازار و پرتفوی در دوره‌های پس از تشکیل پرتفوی مورد استفاده قرار گرفته است. مقدار مناسب این نسبت برای پرتفوی مبتنی بر شاخص با بتای ۱، برابر عدد یک است. مقدار بالاتر از یک نشان دهنده بازده اضافی و مقدار پایین‌تر از یک نشان دهنده عملکرد پایین‌تر نسبت به بازار است.

$$MR^t = \frac{1 + r_p^t}{1 + r_m^t} \qquad (۹-۴)$$

در تمامی معیار های ارائه شده r_m نشان دهنده بازده بازار و r_p نشان دهنده بازده پرتفوی است.

۴-۳- داده های مورد استفاده

در این پژوهش، مدل بهینه‌سازی پایدار برای انتخاب پرتفوی سهام ۵۰ شرکت فعال‌تر بورس اوراق بهادار تهران مورد استفاده قرار گرفته است. هر چند واضح است که تغییرات بازده شاخص ۵۰ شرکت فعالتر بورس اوراق بهادار نمی‌تواند تعیین کننده اگر واقعی بازده بازار بر دارایی‌ها باشد. از داده‌های هر یک از دارایی‌های ۵۰ گانه این شاخص در بازه زمانی ۱۳۹۰/۷/۱ الی ۱۳۹۲/۱/۱ برای تخمین پارامترهای (β، ε، σ_e^2) و آزمون خارج از نمونه[1] مربوط به مقایسه این مدل بهینه‌سازی با مدل ناپایدار با استفاده از داده‌های مذکور طی بازه زمانی ۱۳۹۲/۱/۱ الی ۱۳۹۲/۹/۱ استفاده شده است تا معیار مناسبی برای انجام مقایسه‌های زوجی بین مدل پایدار و ناپایدار در اختیار باشد.

۵- نتایج تحلیل مدل

۵-۱- تحلیل مدل

بر اساس خروجی‌های حاصل از مرحله پیشین که مقادیر پارامترهای (β، ε، σ_e^2) برای هر یک از ۵۰ شرکت موجود در شاخص مربوطه، تخمین زده شده‌است، مدل شماره (۳-۱) که مدل ناپایدار و مدل (۳-۶) که مدل پایدار می‌باشند، با استفاده از نرم‌افزار GAMS و تحلیل کننده MINLP(Mixes Integer Nonlinear Programming) وزن‌های هر یک از q شرکت انتخابی در دو پرتفوی ناپایدار و پایدار استخراج شده و بر اساس داده‌های بازه زمانی ۱۳۹۲/۱/۱ لغایت ۱۳۹۲/۱۰/۱ هر دو پرتفوی تشکیل شده است و در قسمت‌های بعدی عملکرد این دو پرتفوی با توجه به معیارهای معرفی شده در قسمت ۲-۵، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۵-۲- محاسبه معیارهای ارزیابی عملکرد

در این قسمت از پژوهش، بر آن هستیم تا نتایج حاصل از بخش‌های تجزیه و تحلیل مدل را بر اساس معیارهای ارزیابی عملکرد انتخابی مورد بررسی قرار دهیم. در گام نخست، عملکرد هر دو پرتفوی پایدار و ناپایدار تشکیل شده، با شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر مقایسه می‌شود. بدین منظور از معیار نسبت بازار استفاده شده است. در جدول شماره ۱ مقدار نسبت بازار برای هر دو پرتفوی در ماه‌های اول تا نهم سال ۱۳۹۲ ارائه

شده است. با توجه به مدل پیشنهادی این پژوهش، نسبت بازار برای هر یک از دو پرتفوی پایدار و ناپایدار بایستی به طور آماری برابر یک باشد که برای این منظور از آزمون فرض میانگین جامعه نرمال با انحراف معیار نامعلوم در بازه‌های روزانه استفاده شده است. لازم به ذکر است که پیش از استفاده از این آزمون فرض، از نرمال بودن داده‌های نسبت بازار هر دو پرتفوی، توسط آزمون کولموگروف-اسمیرینف در سطح ۹۹ درصد اطمینان حاصل شده است. نتایج آزمون مربوط به برابری نسبت بازار دو پرتفوی با عدد یک در جدول‌های ۲ و ۳ ارائه شده است.

جدول ۱- محاسبه نسبت بازار برای پرتفوی پایدار و ناپایدار

دوره زمانی	شاخص	پرتفوی ردیاب پایدار		پرتفوی ردیاب ناپایدار	
		بازده	نسبت بازار	بازده	نسبت بازار
۱۳۹۲/۲/۱	۰,۰۰۹۷	۰,۰۵۵۹	۱,۰۴۵۷	۰,۰۸۹۰	۱,۰۷۸۵
۱۳۹۲/۳/۱	-۰,۰۱۵۹	-۰,۰۰۳۴	۱,۰۱۲۷	۰,۰۱۰۳	۱,۰۲۶۶
۱۳۹۲/۴/۱	۰,۱۱۹۲	۰,۱۶۹۰	۱,۰۴۴۵	۰,۰۹۰۸	۰,۹۷۴۷
۱۳۹۲/۵/۱	۰,۱۵۹۹	۰,۲۰۸۴	۱,۰۴۱۹	۰,۲۱۳۷	۱,۰۴۶۴
۱۳۹۲/۶/۱	۰,۰۰۵۱	۰,۰۴۰۷	۱,۰۳۵۴	۰,۰۶۸۷	۱,۰۶۳۲
۱۳۹۲/۷/۱	-۰,۰۰۴۲	۰,۰۰۵۷	۱,۰۰۹۹	۰,۰۱۴۹	۱,۰۱۹۲
۱۳۹۲/۸/۱	۰,۰۷۸۳	۰,۰۷۸۲	۰,۹۹۹۹	۰,۰۲۰۳	۰,۹۴۶۲
۱۳۹۲/۹/۱	۰,۱۱۷۸	۰,۱۶۰۹	۱,۰۳۸۶	۰,۲۴۵۲	۱,۱۱۴۰
۱۳۹۲/۱۰/۱	۰,۱۵۵۲	۰,۱۵۹۰	۱,۰۰۳۳	۰,۱۰۱۲	۰,۹۵۳۲

جدول ۲- نتایج آزمون فرض مقایسه عملکرد پرتفوی پایدار و شاخص

میانگین	انحراف استاندارد	مقدار آماره	ناحیه پذیرش	مقدار P
۱,۰۰۱۶	۰,۰۱۶۶	۱,۳۱۵۵	[-۲,۶۶ , ۲,۶۶]	٪۹,۴۹

جدول۳- نتایج آزمون فرض مقایسه عملکرد پرتفوی ناپایدار و شاخص

میانگین	انحراف استاندارد	مقدار آماره	ناحیه پذیرش	مقدار P
۱,۰۰۱۵	۰,۰۱۷۳	۱,۱۳۴۳	[-۲,۶۶ , ۲,۶۶]	٪۱۲,۹

این نتایج نشان می‌دهند که فرض عملکرد یکسان هر دو پرتفوی با شاخص، در طول بازه زمانی مورد بررسی قابل رد شدن نیست. به عبارتی دو پرتفوی از نظر نسبت بازار، عملکرد یکسانی با بازار داشته‌اند.

در این قسمت دو پرتفوی پایدار و ناپایدار با توجه به مقدار خطای ردیابی ماهانه که اطلاعات آنها در جدول ۴ ارائه شده، مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند. مقایسه مذکور با توجه به مقدار جذر خطای ردیابی و آزمون مقایسه زوجی در سطح اطمینان ۹۷,۵ درصد انجام شده است، که نتایج آن در جدول ۷ قابل مشاهده است.

جدول ۴- مقدار خطای ردیابی روزانه در دوره های زمانی مختلف

دوره ها	مدل پایدار		مدل ناپایدار		اطلاعات محاسبه شده جهت آزمون
	خطای ردیابی	جذر خطای ردیابی	خطای ردیابی	جذر خطای ردیابی	اختلاف جذر خطای ردیابی دو مدل
۱۳۹۲/۲/۱	۰,۰۰۱۲	۰,۰۳۴۳	۰,۰۰۱۰	۰,۰۳۲۰	۰,۰۰۲۳
۱۳۹۲/۳/۱	۰,۰۰۴۴	۰,۰۶۶۱	۰,۰۰۳۲	۰,۰۵۶۶	۰,۰۰۹۵
۱۳۹۲/۴/۱	۰,۰۰۳۰	۰,۰۵۴۸	۰,۰۰۶۰	۰,۰۷۷۴	-۰,۰۲۲۶
۱۳۹۲/۵/۱	۰,۰۰۷۵	۰,۰۸۶۵	۰,۰۰۷۹	۰,۰۹۲۴	-۰,۰۰۵۹
۱۳۹۲/۶/۱	۰,۰۱۳۷	۰,۱۱۶۸	۰,۰۱۰۵	۰,۱۰۲۲	۰,۰۱۴۶
۱۳۹۲/۷/۱	۰,۰۰۵۳	۰,۰۷۲۵	۰,۰۰۶۷	۰,۰۸۶۶	-۰,۰۱۴۲
۱۳۹۲/۸/۱	۰,۰۰۴۰	۰,۰۶۲۹	۰,۰۰۴۲	۰,۰۶۴۷	-۰,۰۰۱۸
۱۳۹۲/۹/۱	۰,۰۰۴۰	۰,۰۶۳۲	۰,۰۰۵۲	۰,۰۷۲۴	-۰,۰۰۹۲
۱۳۹۲/۱۰/۱	۰,۰۰۶۴	۰,۰۷۹۹	۰,۰۰۷۰	۰,۰۸۴۴	-۰,۰۰۴۶

به منظور مقایسه مقدار خطای ردیابی پرتفوی پایدار و پرتفوی ناپایدار، از آزمون مقایسه زوجی استفاده می شود. بدین منظور پیش از انجام آزمون بر روی اطلاعات هر پرتفوی آزمون نرمالیتی کولموگروف-اسمیرنف انجام می‌شود که نتایج مربوط به این آزمون بر نرمال بودن این داده‌ها صحه می‌گذارد.

جدول ۵- نتایج آزمون نرمالیتی بر روی خطای ردیابی پرتفوی پایدار

آزمون	کولموگروف – اسمیرینف
P-value	> 0.15

جدول ۶-نتایج آزمون نرمالیتی بر روی خطای ردیابی پرتفوی ناپایدار

آزمون	کولموگروف – اسمیرینف
P-value	> 0.15

با توجه به نتایج فوق فرض عدم نرمالیتی داده‌های هیچ یک از دو پرتفوی، رد نمی‌شود، بنابراین انجام آزمون مقایسه زوجی امکان پذیر است. این آزمون نشان می‌دهد که مدل پایدار نسبت به مدل ناپایدار به لحاظ کمینه‌سازی خطای ردیابی عملکرد بهتری نشان داده است. در این آزمون اختلاف بین خطای ردیابی دو پرتفوی در هر یک از ۹ ماه مورد بررسی محاسبه شده و آماره آزمون از طریق رابطه ۳-۱ محاسبه می‌شود. در این رابطه μ_D نشان دهنده میانگین اختلافات و S_D نشان دهنده انحراف استاندارد اختلافات است. n نیز نشان دهنده تعداد دوره‌های مورد نظر برای آزمون مقایسه زوجی (در اینجا ۹) است.

$$t = \frac{\mu_D}{s_D/\sqrt{n}}$$ (رابطه ۵-۱)

آزمون انجام شده به صورت زیر قابل ارائه است:

$$\begin{cases} H_0: \mu_D \leq 0 \\ H_1: \mu_D > 0 \end{cases}$$ (رابطه ۵-۲)

در این آزمون پذیرفتن فرض صفر به معنی این است که از نظر معیار خطای ردیابی، مدل پایدار از مدل ناپایدار عملکرد بهتری داشته است. نتایج این آزمون را در جدول زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

جدول ۷ - تایج آزمون مقایسه عملکرد پرتفوی پایدار و ناپایدار بر اساس خطای ردیابی

میانگین اختلافات	انحراف معیار اختلافات	مقدار آماره آزمون	ناحیه پذیرش	مقدار P
-۰,۰۰۳۵	۰,۰۱۰۸	-۰,۱۰۸۷	]۲,۳۰۶(-∞ ,	٪۵۴,۱۹

با توجه به جدول فوق، دلیلی برای رد کردن فرض صفر وجود ندارد.

در ادامه به مقایسه دو پرتفوی پایدار و ناپایدار با استفاده از معیار نسبت اطلاعاتی پرداخته شده است. همانطور که در رابطه (۳-۹) مشاهده می‌شود برای استفاده از این معیار ارزیابی عملکرد، نیاز به محاسبه اختلاف بین بازده شاخص و بازده پرتفوهای پایدار و ناپایدار می‌باشد. مقدار محاسبه شده برای هر دوره زمانی بر مقدار جذر خطای ردیابی تقسیم شده و مقدار نسبت اطلاعاتی برای هر دوره زمانی محاسبه می‌شود.

جدول ۸ - محاسبه نسبت اطلاعاتی برای پرتفوی پایدار

زمان	بازده پرتفوی	بازده شاخص	اختلاف بازده پرتفوی و شاخص	جذر خطای ردیابی	نسبت اطلاعاتی
۱۳۹۲/۲/۱	۰,۰۵۵۹	۰,۰۰۹۷	۰,۰۴۶۱	۰,۰۳۴۳	۱,۳۴۴۵
۱۳۹۲/۳/۱	-۰,۰۰۳۴	-۰,۰۱۵۹	۰,۰۱۲۵	۰,۰۶۶۱	۰,۱۸۸۵
۱۳۹۲/۴/۱	۰,۱۶۹۰	۰,۱۱۹۲	۰,۰۴۹۸	۰,۰۵۴۸	۰,۹۰۹۰
۱۳۹۲/۵/۱	۰,۲۰۸۴	۰,۱۵۹۹	۰,۰۴۸۵	۰,۰۸۶۵	۰,۵۶۱۳
۱۳۹۲/۶/۱	۰,۰۴۰۷	۰,۰۰۵۱	۰,۰۳۵۶	۰,۱۱۶۸	۰,۳۰۴۸
۱۳۹۲/۷/۱	۰,۰۰۵۷	-۰,۰۰۴۲	۰,۰۰۹۹	۰,۰۷۲۵	۰,۱۳۶۷
۱۳۹۲/۸/۱	۰,۰۷۸۲	۰,۰۷۸۳	-۰,۰۰۰۱	۰,۰۶۲۹	-۰,۰۰۱۹
۱۳۹۲/۹/۱	۰,۱۶۰۹	۰,۱۱۷۸	۰,۰۴۳۲	۰,۰۶۳۲	۰,۶۸۲۶
۱۳۹۲/۱۰/۱	۰,۱۵۹۰	۰,۱۵۵۲	۰,۰۰۳۸	۰,۰۷۹۹	۰,۰۴۷۳

جدول ۹- محاسبه نسبت اطلاعاتی برای پرتفوی ناپایدار

زمان	بازده پرتفوی	بازده شاخص	اختلاف بازده پرتفوی و شاخص	جذر خطای ردیابی	نسبت اطلاعاتی
۱۳۹۲/۲/۱	۰,۰۸۹۰	۰,۰۰۹۷	۰,۰۷۹۲	۰,۰۳۲۰	۲,۴۷۶۲
۱۳۹۲/۳/۱	۰,۰۱۰۳	-۰,۰۱۵۹	۰,۰۲۶۱	۰,۰۵۶۶	۰,۴۶۲۰
۱۳۹۲/۴/۱	۰,۰۹۰۸	۰,۱۱۹۲	-۰,۰۲۸۴	۰,۰۷۷۴	-۰,۳۶۶۷
۱۳۹۲/۵/۱	۰,۲۱۳۷	۰,۱۵۹۹	۰,۰۵۳۸	۰,۰۹۲۴	۰,۵۸۱۹
۱۳۹۲/۶/۱	۰,۰۶۸۷	۰,۰۰۵۱	۰,۰۶۳۶	۰,۱۰۲۲	۰,۶۲۱۹
۱۳۹۲/۷/۱	۰,۰۱۴۹	-۰,۰۰۴۲	۰,۰۱۹۲	۰,۰۸۶۶	۰,۲۲۱۲
۱۳۹۲/۸/۱	۰,۰۲۰۳	۰,۰۷۸۳	-۰,۰۵۸۰	۰,۰۶۴۷	-۰,۸۹۶۷
۱۳۹۲/۹/۱	۰,۲۴۵۲	۰,۱۱۷۸	۰,۱۲۷۴	۰,۰۷۲۴	۰,۷۵۹۲
۱۳۹۲/۱۰/۱	۰,۱۰۱۲	۰,۱۵۵۲	-۰,۰۵۴۰	۰,۰۸۴۴	-۰,۶۳۹۹

به منظور مقایسه عملکرد دو پرتفوی از آزمون مقایسه زوجی استفاده می شود.

جدول ۱۰ - محاسبه مقدار اختلاف نسبت اطلاعاتی پرتفوی پایدار و ناپایدار

نسبت اطلاعاتی پرتفوی پایدار	نسبت اطلاعانی ناپایدار	اختلاف D
۱,۳۴۴۵	۲,۴۷۶۲	-۱,۱۳۱۷
۰,۱۸۸۵	۰,۴۶۲۰	-۰,۲۷۳۵
۰,۹۰۹۰	-۰,۳۶۶۷	۱,۲۷۵۶
۰,۵۶۱۳	۰,۵۸۱۹	-۰,۰۲۰۶
۰,۳۰۴۸	۰,۶۲۱۹	-۰,۳۱۷۱
۰,۱۳۶۷	۰,۲۲۱۲	-۰,۰۸۴۶
-۰,۰۰۱۹	-۰,۸۹۶۷	۰,۸۹۴۸
۰,۶۸۲۶	۱,۷۵۹۲	-۱,۰۷۶۶
۰,۰۴۷۳	-۰,۶۳۹۹	۰,۶۸۷۲
میانگین اختلافات		**-۰,۰۰۵۲**
انحراف استاندارد اختلافات		**۰,۸۳۰۹**

آزمون انجام شده به صورت زیر قابل ارائه است:

$$\begin{cases} H_0: \mu_D \leq 0 \\ H_1: \mu_D > 0 \end{cases}$$ (رابطه ۵-۳)

در این آزمون پذیرفتن فرض صفر به معنی این است که از نظر معیار نسبت اطلاعاتی، مدل پایدار از مدل ناپایدار عملکرد بهتری داشته است. نتایج این آزمون را در جدول زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

جدول۱۱- نتایج آزمون فرضیه مقایسه عملکرد پرتفوی پایدار و ناپایدار بر اساس نسبت اطلاعاتی

مقدار آماره t	ناحیه پذیرش	مقدار P
-۰,۰۰۲۱	[-۳,۳۵۵,+∞)	٪۵۰,۰۸

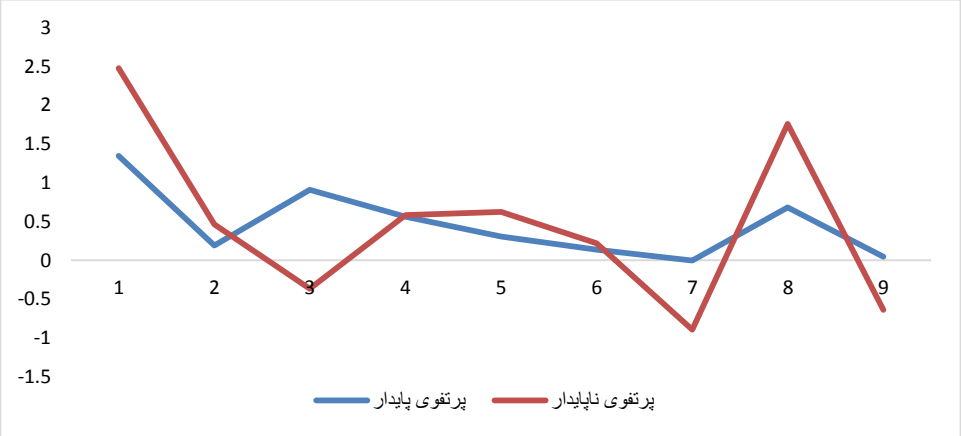
نتایج آزمون نشان می دهد که در سطح اطمینان ۹۹ درصد، دلیلی برای رد کردن فرض صفر وجود ندارد. به عبارتی مدل پایدار از نظر نسبت اطلاعاتی نسبت به مدل ناپایدار عملکرد بهتری دارد.

۵-۳- ارزیابی نتایج رویکرد پیشنهادی

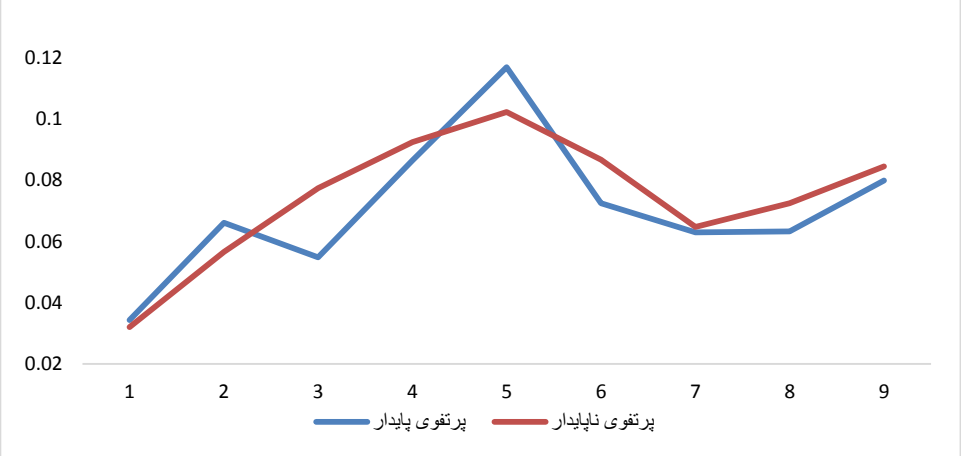
همان طور که در بخش قبل اشاره شد، تجزیه و تحلیل نسبت بازار دو پرتفوی پایدار و ناپایدار نشان می‌دهد که هر دو پرتفوی به طور آماری در طول دوره بررسی شده، بازدهی مطابق با بازده شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر داشته‌اند. بررسی نسبت اطلاعاتی دو پرتفوی مذکور به عنوان معیار ارزیابی عملکرد به کار گرفته شده در این پژوهش نشان داد که پرتفوی پایدار نسبت به پرتفوی ناپایدار از عملکرد بهتری برخوردار

است. هم‌چنین مطالعه معیار خطای ردیابی نیز برتری مدل پایدار را در تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص نسبت به مدل ناپایدار تایید می‌نماید.

برای نشان دادن نتایج کسب شده از بررسی دو مدل پایدار و ناپایدار در تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص، نمودارهای ۲ و ۳ به ترتیب نسبت اطلاعاتی پرتفوهای استخراج شده از دو مدل پایدار و ناپایدار و خطای ردیابی این دو را در دوره‌های زمانی ۹ ماه اول سال ۱۳۹۲ نشان می‌دهد.



شکل۲ – نمودار نسبت اطلاعاتی پرتفوی های پایدار و ناپایدار



شکل۳ – نمودار خطای ردیابی پرتفوی پایدار و ناپایدار

۶- نتیجه‌گیری و بحث

این پژوهش با هدف در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامتر بتا در تشکیل پرتفوی ردیاب شاخص با استفاده از بهینه‌سازی پایدار انجام شده است. نتایج حاصل از این پژوهش نشان می‌دهد که در نظر گرفتن عدم قطعیت بتا، می‌تواند پرتفوی ردیاب شاخص را از دو منظر خطای ردیابی و نسبت اطلاعاتی بهبود بخشد. بنابراین برتری مدل پایدار نسبت به مدل ناپایدار در حل مسئله ردیابی شاخص تایید می‌گردد.

به منظور ارائه پیشنهاداتی برای پژوهش‌های آتی می توان به در نظر گرفتن هزینه‌های معاملاتی و تعدیل‌های مربوط به شاخص اشاره نمود. هم‌چنین مقایسه عملکرد رویکردهای متفاوت بهینه‌سازی در شرایط عدم قطعیت مثل رویکرد فازی و یا رویکرد بهینه‌سازی تصادفی نیز می تواند به عنوان موضوعی دیگر برای پژوهش‌ها انتخاب شود.

فهرست منابع

* راس استفان، وسترفیل رندلف، بردفورد جردن (۲۰۰۲) مدیریت مالی نوین-جلد دوم (ترجمه دکتر علی جهانخانی و مجتبی شوری) – چاپ پنجم: مرکز نشر دانشگاهی
* گجراتی دامادور؛ مبانی اقتصاد سنجی، (ترجمه حمید ابریشمی) چاپ دهم؛ انتشارت دانشگاه تهران
* Beasley JE, Meade N, Chang TJ. An evolutionary heuristic for the index tracking problem. European Journal of Operational Research 2003;148(3): 621–643.
* BenTal. A and ElGhaoui. L and Nemirovski. A, (2004), "Robust optimization", Princeton University Press
* Bertsimas D, Thiele A. Robust and data-driven optimization: modern decision-making under uncertainty. Tutorials in Operations Research 2006;4: 95–122.
* Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. Operations Research, 52(1):35{53, 2004.
* Chen Chen, Roy H kwon. Robust portfolio selection for index tracking, Computers & Operations Research 39 (2012) 829–837
* Cornuejols. G and Tutuncu. R (2005), "Optimization Methods in Finance", Carnegie Mellon University
* Erdogan E, Goldfarb D, Iyengar G. Robust portfolio management. CORC Technical Report TR-2004–11, Columbia University; 2004.
* Gilli M, Kellezi E. The threshold accepting heuristic for index tracking. In: Pardalos P, Tsitsiringos VK, editors. Financial engineering, e-commerce, and supply chain. Kluwer; 2002.p. 1–18 Kluwer Applied Optimization Series.
* Gaivoronski AA, Krylov S, van der Wijst N. Optimal portfolio selection and dynamic benchmark tracking. European Journal of Operational Research 2005;163(1):115–31.
* Jansen Roel, van Dijk Ronald. Optimal benchmark tracking with small portfolios. Journal of Portfolio Management 2002;28(2):33–9.
* Konno H, Wijayanayake A. Minimal cost index tracking under nonlinear transaction costs and minimal transaction unit constraints. International Journal of Theoretical and Applied Finance 2001;4(6):939–58.
* Meade N, Salkin GR. Developing and maintaining an equity index fund. Journal of the Operational Research Society 1990;41(7):599–607.
* MEADE and G. R. SALKIN (1989) Index funds-construction and performance measurement. J. Opl Res. Soc. 40, 871-879.

* Markowitz. H, (1952) "Portfolio selection", The journal of finance, 77-91
* Markowitz. H, (1959) "Portfolio selection: efficient diversification of investments" Yale university press
* Rohweder Herold C. Implementing stock selection ideas: does tracking error optimization do any good? Journal of Portfolio Management 1998; 24(3):49–59.
* Roll R. A mean/variance analysis of tracking error. Journal of Portfolio Management 1992;18:13–22.
* Rudolf Markus,Wolter Hans-Jurgen, Zimmermann Heinz .A linear model for tracking error minimization. Journal of Banking & Finance 1999; 23(1): 85–103.
* Rudd A. Optimal selection of passive portfolios. Financial Management 1980;9(1):57–66.
* Soyster. A, (1973) "Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming", Operations Research, 1154-1157,.
* William. F. Sharpe, Capital asset price: a theory of market equilibrium under conditions of risk the journal of finance, 1964

یادداشت ها

[1] Out of Sample