فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره چهل و پنجم / زمستان ۱۳۹۹

بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری(ICA) و الگوریتم ازدحام ذرات (PSO)تحت معیار ریسک ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR)

آرزو کریمی[۱]
سارا گودرزی دهریزی[۲]

تاریخ دریافت مقاله : ۹۹/۰۲/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله : ۹۹/۰۴/۲۶

چکیده

انتخاب سبد سهام یک مبحث ویژه در حوزه‌ی سرمایه‌گذاری است. با توجه به گستردگی انتخاب‌ها در بازار سهام یکی از دغدغه‌های مهم مجموعه‌های سرمایه‌گذاری تخصیص بهینه‌ی دارایی‌هاست. ازاین‌رو اغلب این مجموعه‌ها از مدل‌های انتخاب سبد استفاده می‌کنند. ارزش در معرض خطر مشروط که یکی از مدل‌های انتخاب سبد است از برنامه‌ریزی درجه دوم تبعیت می‌کند. با توجه به اینکه برنامه‌ریزی درجه دوم نیازمند محاسبات وسیعی است، استفاده از الگوریتم‌های فرا ابتکاری در حل این مسائل سرعت و دقت محاسبات را افزایش می‌دهند. هدف این پژوهش حداقل سازی ارزش در معرض خطر مشروط با استفاده از دو الگوریتم رقابت استعماری و ازدحام ذرات است. ازاین‌رو با استفاده از داده‌های ۸۰۰ روز از ۱۲ شرکت پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۹۲/۲/۵ تا ۹۸/۱/۲۸ به تشکیل سبد پرداخته شد و وزن مربوط به هر سهم در سبد بهینه و میزان ریسک و بازدهی سبدها با استفاده از نرم‌افزار MATLAB2018 محاسبه شد. سپس با استفاده از امکانات نرم‌افزار SPSS به آزمون میانگین تفاوت بین ریسک و بازدهی دو الگوریتم پرداخته شد. نتایج نشان داد که ریسک و بازدهی دو الگوریتم ازنظر آماری تفاوت معناداری ندارند، اما الگوریتم رقابت استعماری در زمان کوتاه‌تری به جواب بهینه می‌رسد.

کلمات کلیدی

سبد سهام، ارزش در معرض خطر مشروط، الگوریتم رقابت استعماری، الگوریتم ازدحام ذرات، مرز کارا

۱-گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت‌اله بروجردی، بروجرد، ایران. (نویسنده مسئول) karimiar355@gmail.com
۲-گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آیت‌اله بروجردی، بروجرد، ایران. s.goodarzi1995@ gmail.com

مقدمه

مدیریت سبد سرمایه‌گذاری به‌عنوان مسئله‌ای مهم درزمینه‌ی اقتصاد مطرح است و موضوع اصلی آن مدیریت علمی و انتخاب ترکیبی از دارایی‌ها است که اهداف سرمایه‌گذاری خاصی را برآورده کند. با توجه به عدم اطمینانی که بر بورس اوراق بهادار حاکم است و همچنین کارا نبودن مدلِ پایه‌ای میانگین-واریانس در بازارهای امروزی، به نظر می‌رسد که طراحی یک سیستم خبره با استفاده از تکنیک‌های هوشمند که صحت و دقت مدل را افزایش می‌دهند، برای ارائه‌ی سبد سهام بهینه ضروری است تا درنهایت سود بیشتری برای سرمایه‌گذاران فراهم گردد. در سال‌های اخیر الگوریتم‌های تکاملی برای بهینه‌سازی سبد مورداستفاده قرارگرفته‌اند. الگوریتم‌های تکاملی تکنیک‌های بهینه‌سازی تصادفی هستند که ایده‌ی آن‌ها در نظریه داروین نهفته است (وی پیشنهاد کرد که هر موجود زنده‌ای دائماً در حال تکامل است). در حال حاضر الگوریتم‌های تکاملی متنوعی وجود دارند که هرکدام بر اساس ایده‌ای به وجود آمده‌اند؛ اما آنچه در همه‌ی آن‌ها عمومیت دارد این است که برخلاف روش‌های بهینه‌سازی سنتی که تنها بر روی یک نقطه متمرکز می‌شوند، بر روی یک جمعیت یا مجموعه‌ای از جواب‌ها کار می‌کنند و درنهایت با توجه به تابع برازش و همچنین عملیاتِ مربوط به نوع الگوریتم به جواب بهینه دست پیدا می‌کنند. ازجمله این الگوریتم‌ها می‌توان به الگوریتم‌های رقابت استعماری و ازدحام ذرات اشاره کرد. در پژوهش‌های گذشته از الگوریتم رقابت استعماری و ازدحام ذرات با معیار ریسک‌های چون؛ میانگین-واریانس و ارزش در معرض خطر به بهینه‌سازی سبد پرداخته‌شده است. هدف این پژوهش بهینه‌سازی سبد با استفاده از الگوریتم‌های رقابت استعماری و ازدحام ذرات تحت معیار ریسک ارزش در معرض خطر مشروط است. به‌عبارت‌دیگر ارزش در معرض خطر مشروط با استفاده از این دو الگوریتم محاسبه می‌شود.

مبانی نظری و پیشینه تحقیق

بهینه‌سازی

بهینه‌سازی توابع، به معنای یافتن پاسخ بهینه‌ی تابع هدف یک مسئله است. این مسائل به دو گروه بیشینه‌سازی و کمینه‌سازی تقسیم می‌شوند. همچنین می‌توان روش‌های بهینه‌سازی را نیز در دو حوزه‌ی بهینه‌سازی کلاسیک و بهینه‌سازی‌های ابتکاری یا تکاملی به‌صورت زیر طبقه‌بندی نمود [۱۰]:

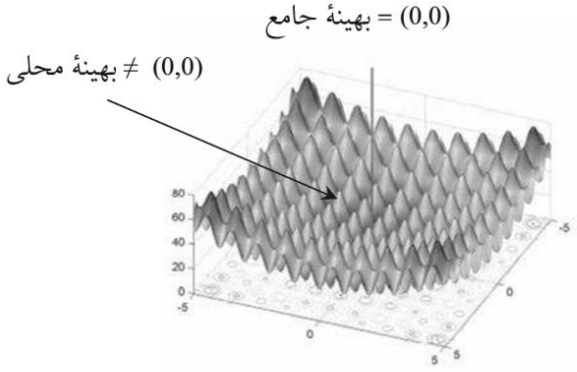
روش‌های کلاسیک

روش‌های کلاسیک که کم‌وبیش همگان با آن‌ها آشنایی دارند، همان روش‌های مبتنی بر مشتق ریاضی است. یکی از نقایص روش‌های کلاسیک این است که در مسائل پیچیده و چندبعدی و یا مسائلی

که ویژگی‌های گسستگی، مشتق ناپذیری، نویز و اغتشاش اطلاعات، فضای حالت ناپیوسته و معادله‌های غیرخطی پیچیده دارند، همانند مسئله انتخاب و بهینه‌سازی سبد فقط تا حد یافتن بهینه‌های محلی پیش می‌روند و از یافتن بهینه جامع و کلی مسئله ناتوان هستند. در این روش‌ها برای برون‌رفت از جواب‌های محلی تصمیمی گرفته نشده است و همین‌که به پاسخی به نسبت بهینه می‌رسند اگرچه ممکن است محلی باشد، حل را متوقف کرده و پاسخ را به‌عنوان بهینه جامع و کلی اعلام می‌کنند.

روش‌های ابتکاری

روش‌های ابتکاری (فرا ابتکاری یا تکاملی نیز نامیده می‌شوند)، برای حل مشکلات بیان‌شده که غالباً مسائل بهینه‌سازی با آن‌ها روبه‌روست به وجود آمده‌اند. اگرچه نمی‌توان هیچ تضمینی قائل شد؛ اما آزمون این روش‌ها در مسائل مختلف فنی‌ومهندسی، اقتصاد، مالی و غیر نشان داده است که در صورت اجرای درست و انتخاب مناسب پارامترهای داخلی و متناسب با نوع مسئله، با استفاده از این روش‌ها می‌تواند به پاسخ‌های مناسب‌تری از پاسخ‌های همتاهای کلاسیک‌شان دست‌یافت. عملکرد بهتر این روش‌ها به ماهیت طراحی آن‌ها بازمی‌گردد؛ به‌عبارت‌دیگر، اصولاً این روش‌ها ایجاد شد تا کاستی‌های روش‌های کلاسیک را جبران کند. آن‌ها به‌گونه‌ای برنامه‌ریزی‌شده‌اند که تا در صورت امکان از بهینه‌های محلی، به‌اصطلاح «بیرون بپرند» و در آن‌ها «گرفتار نشوند» و به بهینه‌ی جامع برسند. به‌عبارت‌دیگر ازآنجاکه روش‌های ابتکاری به یک جستجوی جامع تصادفی دست می‌زنند، احتمال به تله افتادن آن‌ها در بهینه‌های محلی به‌شدت کاهش می‌یابد.



شکل ۱ : مفهوم بهینه محلی و جامع

منبع: مولایی و طالبی، ۱۳۸۹

بهینه‌سازی سبد

مارکوئیتز نشان داد که وقتی اطلاعات لازم برای مدل وی فراهم شود می‌توان با استفاده از برنامه‌های بهینه‌سازی سبد، به دست‌کاری و تغییر در اوزان سهام سبد پرداخت و به‌واسطه‌ی این تغییرها، به تعریف دقیقی از سبدهای کارآمد رسید. یکی از اولین روش‌هایی که برای بهینه‌سازی این مدل توسط خود مارکوئیتز به کار رفت، « برنامه‌ریزی درجه دوم» نام دارد. به‌طورکلی، استفاده از بهینه‌سازی‌ها دو مورد زیر را مشخص می‌نماید [۱۰]:

الف) سهامی که باید در سبد نگهداری شود

ب) نسبت بودجه‌ی تخصیصی بین سهام تعیین‌شده

ارزش در معرض خطر (VaR)

مفهوم ارزش در معرض خطر به‌عنوان یک الگوی جدید سنجش ریسک، نخستین بار توسط بامول در سال ۱۹۶۳ پیشنهاد شد، اما از اوایل دهه ۱۹۹۰ به‌عنوان ابزاری برای اندازه‌گیری ریسک، کاربرد وسیعی یافت. دلیل محبوبیت و همچنین عمومیت این روش، سادگی آن در ایجاد شکل آماری خلاصه از زیان‌های بالقوه، طی یک افق زمانی معین بود. باوجوداینکه، تغییر در ارزش یک پرتفوی می‌تواند به عناصر گوناگون ریسک مربوط باشد، ارزش در معرض خطر می‌کوشد تا کاهش ارزش پرتفوی را ازنقطه‌نظر ریسک بازار برآورد کند. ریسک بازار، نااطمینانی در درآمدهای آینده را به علت تغییر شرایط بازار (قیمت‌ها یا نرخ‌ها) در برمی‌گیرد. در حقیقت ارزش در معرض خطر طراحی شد تا عدد معینی به تحلیلگر ارائه کند و در آن عدد اطلاعاتی در مورد ریسک پرتفوی به‌طور فشرده مستتر باشد. این معیار برآوردی از سطح زیان روی یک پرتفوی یا سبد سرمایه‌گذاری است که به‌احتمال معین کوچکی پیش‌بینی می‌شود که با آن مساوی شود و یا از آن تجاوز کند. ارزش در معرض خطر برخلاف سنجه‌های سنتی ریسک، نمایی کلی و جامع از ریسک پرتفوی ارائه می‌نماید. درنتیجه ارزش در معرض خطر، درواقع سنجش ریسک با نگاهی آینده‌نگر است که برای تمام انواع اسناد مالی کارایی دارد. مدل ارزش در معرض خطر دربردارنده سه عامل اصلی افق زمانی، سطح اطمینان و میزان سرمایه است [۱].

ارزش در معرض خطر را می‌توان معیاری کمی در نظر گرفت که حداکثر زیان مورد انتظار یک دارایی یا یک سبد از دارایی‌ها را در یک دوره زمانی مشخص و برای یک سطح اطمینان معین نشان می‌دهد. ازنظر ریاضی می‌توان ارزش در معرض خطر را به‌صورت زیر نشان داد:

$$\Pr\{p_0 - p_1 \geq VaR\} \leq \alpha$$

یا

$$\Pr\{p_1 - p_0 \leq -VaR\} \leq \alpha$$

که در آن p_0ارزش پرتفوی در زمان صفر و p_1 ارزش پرتفوی در زمان۱ بوده و α سطح خطای آماری است. رابطه فوق بیان می‌کند که احتمال اینکه کاهش ارزش پرتفوی در دوره آتی، بیش از ارزش در معرض ریسک باشد حداکثر برابر با α درصد است [۱].

پیشینه تحقیق

یان و همکاران (۲۰۰۷) در پژوهشی از مدل میانگین – نیم واریانس استفاده کرده و به‌جای انتخاب پرتفوی یک دوره‌ایی از چند دوره‌ایی استفاده کرده‌اند. آن‌ها برای انجام بهینه‌سازی از گونه‌ای الگوریتم ژنتیک که از استراتژی جایگزینی موقعیت بهینه‌سازی ازدحام ذرات به‌عنوان عملگر جهش استفاده می‌کند، بهره جسته‌اند. آن‌ها همچنین اعلام کردند که نتایج نشان‌دهنده قابل‌قبول و مؤثر بودن این نوع الگوریتم ژنتیک است [۱۸].

کورا (۲۰۰۹) در مقاله‌ای از الگوریتم ازدحام ذرات برای بهینه‌سازی سبد استفاده کرد. وی بر اساس مدل میانگین- واریانس و با در نظر گرفتن محدودیت‌های عدد صحیح به بهینه‌سازی پرداخته است. وی نتایج را با الگوریتم‌های ژنتیک، تبرید شبیه‌سازی‌شده و جستجوی ممنوعه مقایسه کرده است و اعلام می‌کند که بهینه‌سازی ازدحام ذرات در بهینه‌سازی سبد سهام موفق است [۱۴].

ژو و همکاران (۲۰۱۱) در مقاله‌ای به یک روش فرا ابتکاری برای مسئله بهینه‌سازی با استفاده از بهینه‌سازی ازدحام ذرات پرداختند. این مدل بر روی پرتفوی‌های مختلف سرمایه‌گذاری که ریسک آن‌ها، محدود و غیر محدودشده است، آزمایش‌شده است و به مقایسه‌ی آن با الگوریتم ژنتیک پرداخته‌شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که مدل بهینه‌سازی ازدحام ذرات در مقایسه با الگوریتم ژنتیک به جواب‌های بهتری می‌رسد [۱۹].

دنگ و همکاران (۲۰۱۲) از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات بهبودیافته برای بهینه‌سازی سبد استفاده کردند. الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات بهبودیافته پیشنهادی، جستجو در قدم‌های اولیه را بیشتر می‌کند و سرعت همگرایی در قدم‌های جستجوی نهایی را بهبود می‌بخشد. نتایج آزمایش نشان می‌دهند که بهینه‌سازی ازدحام ذرات پیشنهادی، قوی‌تر و تأثیرگذارتر از بهینه‌سازی ازدحام ذرات موجود و مخصوصاً برای پرتفوی‌های کم ریسک است [۱۵].

بابایی و همکاران (۲۰۱۵) از دو نوع الگوریتم ازدحام ذرات چند هدفه (2MOPSO) برای بهینه‌سازی سبد استفاده کردند. آنان این مسئله را به شکل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط چند هدفه با محدودیت کاردینالیتی فرموله کرده و از معیار ارزش در معرض ریسک برای سنجش ریسک استفاده کردند. این محققان با مقایسه الگوریتم ازدحام ذرات چند هدفه، الگوریتم ژنتیک با مرتب‌سازی نا مغلوب II و الگوریتم تکاملی مبتنی بر قوت پارتو ۲ دریافتند که یکی از MOPSO های پیشنهادی شاخص‌های عملکردی بهتری نسبت به سایر الگوریتم‌ها دارند [۱۳].

مگوانی و تاکور (۲۰۱۷) رویه ایجاد کاندیدا و مکانیزم تعمیری به الگوریتم‌های تکاملی چند هدفه می‌افزایند که سبب می‌شود این الگوریتم‌ها بتوانند محدودیت‌های بیشتری از قبیل کاردینالیتی، بودجه، کف و سقف مقادیر و حجم ثابت انباشته را در مسئله اعمال کنند [۱۷].

راعی و همکاران (۱۳۸۹) در مقاله‌ای بیان کرده‌اند که مسئله بهینه‌سازی مارکوئیتز و تعیین مرز کارای سرمایه‌گذاری، زمانی که تعداد دارایی‌های قابل سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار کم باشد، توسط مدل‌های ریاضی حل‌شدنی است، اما هنگامی‌که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسئله بهینه‌سازی پرتفوی به‌راحتی با استفاده از شیوه‌های ریاضی حل نمی‌شود و به همین دلیل باید از شیوه‌های ابتکاری همچون شبکه‌های عصبی و الگوریتم‌های تکاملی استفاده کرد. آن‌ها در این راستا و به‌منظور بهینه‌سازی پرتفوی بر اساس مدل میانگین- واریانس از روش بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات استفاده کرده‌اند. آن‌ها نشان دادند که باوجود محدودیت‌های بازار روش بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات در بهینه‌سازی پرتفوی موفق عمل می‌کند [۴].

گلمکانی و فاضل (۱۳۹۰) از یک روش فرا اکتشافی در مدل گسترش‌یافته مدل میانگین- واریانس جهت انتخاب پرتفوی استفاده کردند. مدل گسترش‌یافته شامل حداکثر تعداد، رتبه سهام، حداقل سازی هزینه معاملاتی و رتبه بازار سهام است. نتایج تحقیق بیانگر کارایی بهتر الگوریتم ازدحام ذرات نسبت به الگوریتم ژنتیک است [۸].

سجادی (۱۳۹۰) در پایان‌نامه کارشناسی ارشد از دو الگوریتم ژنتیک و رقابت استعماری برای بهینه-سازی سبد استفاده کرد. در این پژوهش از ارزش در معرض ریسک به‌عنوان معیار ریسک استفاده‌شده است. وی با استفاده از ۷۵ سهم از تاریخ ۸۹-۸۸ نشان داد که الگوریتم رقابت استعماری علاوه بر سود بیشتر زمان کمتری را برای رسیدن به جواب بهینه صرف می‌کند [۶].

رجبی و خالوزاده (۱۳۹۳) در مقاله‌ای به بهینه‌سازی سبد با استفاده از الگوریتم‌های چند هدفه ژنتیک و ازدحام ذرات پرداختند. آن‌ها از معیار ارزش در معرض خطر شرطی به‌عنوان معیار ریسک

استفاده کردند. نتایج، عملکرد بهتر روش الگوریتم ژنتیک را نسبت به ازدحام ذرات برای هر دو معیار همگرایی و گستردگی جبهه‌های بهینه‌ی پارتو نشان می‌دهد [۵].

نصرالله زاده (۱۳۹۴) در پایان‌نامه کارشناسی ارشد به مقایسه دو الگوریتم رقابت استعماری و زنبورعسل پرداخت. وی با استفاده از داده‌های ۸ سهم از بازار بورس اوراق بهادار تهران نشان داد که الگوریتم رقابت استعماری کارایی، دقت و سرعت بیشتری دررسیدن به جواب بهینه دارد [۱۲].

شریف‌آبادی و همکاران (۱۳۹۴) در مقاله‌ای تحت عنوان « به‌کارگیری الگوریتم رقابت استعماری در بهینه‌سازی و تشکیل پرتفولیو» به انتخاب سبد بهینه پرداختند. آن‌ها در این پژوهش از معیار ریسک میانگین- واریانس استفاده کردند. نتایج نشان می‌دهد که الگوریتم رقابت استعماری در تشکیل پرتفوی سهام به‌گونه‌ای موفق عمل می‌کند [۹].

نشاطی زاده و حیدری (۱۳۹۷) در پژوهشی به بررسی عملکرد الگوریتم رقابت استعماری با استفاده از معیار ریسک‌هایی چون؛ میانگین- واریانس، میانگین- نیم واریانس، میانگین- ارزش در معرض خطر شرطی پرداختند. آن‌ها با استفاده از داده‌های روزانه ۲۵ سهم از ۹۵-۸۸ نشان دادند که الگوریتم رقابت استعماری با معیار ریسک ارزش در معرض ریسک شرطی نسبت به سایر مدل‌ها دقت بالاتری دارد [۱۱].

فلاح‌پور و همکاران (۱۳۹۷) در تحقیقی به مقایسه الگوریتم فرا ابتکاری نهنگ با دو الگوریتم رقابت استعماری و ازدحام ذرات با معیار ریسک، ریزش مورد انتظار پرداختند. تحقیقات آن‌ها نشان داد سرعت همگرایی الگوریتم نهنگ نسبت به سایر الگوریتم‌ها بیشتر است و میانگین بازدهی را افزایش می‌دهد [۷].

مدل تحقیق

ارزش در معرض خطر مشروط (CVaR)

ارزش در معرض خطر مشروط، زیان انتظاری در یک سطح اطمینان تعیین‌شده را برآورده می‌کند. استفاده از ارزش در معرض خطر مشروط، باعث می‌شود که مدل انتخاب سبد سهام به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود. مدل (CVaR) که توسط کانداسمی (Kandasamy) ارائه‌شده است، به‌صورت زیر است:

اگر $f(x,\varepsilon)$ تابع زیان یک سبد سهام باشد و α یک سطح اطمینان باشد، در این صورت $CVaR$ متوسط $(1-\alpha)$ درصد زیان‌هاست.

$$CVaR_{\alpha}(x,\eta) = \eta + (1-\alpha)^{-1} \int_{\varepsilon \varepsilon R^{\alpha}} [f(x,\varepsilon) - \eta]^{+} p(\varepsilon) d\varepsilon$$

η : VaR

متغیر تصادفی : ε

$$Z^{+} = \max(Z, 0)$$

مدل میانگین- ارزش در معرض خطر مشروط، به کمک یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$min\, \eta + \frac{1}{(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{N} (y_i)$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & y_i \geq \sum_{j=1}^{n} \left[\left(-r_{ij} \right) - \eta \right] \qquad i = 1,2,3, \dots s \\ & y_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3, \dots, s \\ & x'\mu = E_0 \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن r_{ij} بازده سهم i ام در دوره j ام، x_j درصد سرمایه‌گذاری در سهم j ام، E_0 حداقل بازده مورد انتظار و μ میانگین بازده مورد انتظاری در سهمj ام است[۱۶].

هدف از تابع هدف حداقل کردن زیان‌های بیشتر یا مساوی ارزش در معرض خطر است. به‌عبارت‌دیگر مسئله تلاش می‌کند میانگین مقادیر بدتر از (α -۱) درصد را محاسبه کند.

الگوریتم رقابت استعماری (ICA)

الگوریتم رقابت استعماری با الهام گیری از یک فرآیند اجتماعی سیاسی، در سال ۲۰۰۷ توسط اسماعیل آتشپزگرگری و همکاران ارائه شد. ازاین‌جهت در نوع خود یک الگوریتم جدید و قابل‌رقابت با سایر الگوریتم‌های تکاملی ازجمله الگوریتم ژنتیک، الگوریتم توده ذرات و ... است، از جهت کارایی نیز تاکنون در حل مسائل زیادی درزمینه بهینه‌سازی در مهندسی برق، کامپیوتر، صنایع، مکانیک، اقتصاد، مدیریت و ... استفاده‌شده است. دلیل استقبال بسیار زیاد از این الگوریتم در کنار کارایی بالای آن بیشتر به جنبه نوآوری جدید و جذاب بودن آن برای متخصصین حوزه بهینه‌سازی است. در الگوریتم رقابت استعماری، برای حل مسئله بهینه‌سازی مفروض، N کشور در نظر گرفته می‌شود که هرکدام با یک بردار نمایش داده‌شده و نشان‌دهنده یک نقطه در فضای n بعدی است در حقیقت کشورها جواب‌های ممکن مسئله هستند. همه‌ی کشورها، به دودسته تقسیم می‌شوند: امپریالیست و مستعمره. کشورهای استعمارگر

با اعمال سیاست جذب (همگون‌سازی) در راستای محورهای مختلف بهینه‌سازی، کشورهای مستعمره را به سمت خود می‌کشند. رقابت امپریالیستی در کنار سیاست همگون سازی، هسته‌ی اصلی این الگوریتم را تشکیل می‌دهد و باعث می‌شود که کشورها به سمت مینیمم مطلق تابع حرکت کنند. با توجه به توضیحات ارائه‌شده می‌توان گام‌های اصلی در پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی رقابت استعماری را در هفت مرحله، به‌صورت زیر بیان نمود [۱۱]:

گام صفر: ورودی‌های موردنیاز

تعریف توابع هدف و محدودیت‌ها، تعیین تعداد تکرار یا شرط توقف الگوریتم و همچنین تعیین پارامترهای موردنیاز برای اجرای الگوریتم رقابت استعماری.

گام اول: شکل‌دهی امپراطوری اولیه

در بهینه‌سازی، هدف یافتن یک جواب بهینه برحسب متغیرهای مسئله است. ما یک آرایه از متغیرهای مسئله را که باید بهینه شوند، ایجاد می‌کنیم. در الگوریتم رقابت استعماری جمعیت اولیه، یک کشور است. برای شروع الگوریتم، تعداد$N_{country}$ کشور اولیه را ایجاد می‌کنیم، N_{imp} تا از بهترین اعضای این جمعیت که دارای کمترین مقدار تابع هزینه می‌باشند را به‌عنوان امپریالیست انتخاب می‌کنیم. باقیمانده N_{col} تا از کشورها، مستعمراتی را تشکیل می‌دهند که هرکدام به یک امپراطوری تعلق دارند. درواقع در گام اول، چند نقطه تصادفی بر روی تابع انتخاب کرده و امپراطوری اولیه را تشکیل می‌دهیم.

گام دوم: مدل‌سازی سیاست جذب

در گام بعدی مستعمرات را به سمت کشور امپریالیست حرکت می‌دهیم (سیاست همگون سازی)

گام سوم: جابه‌جایی موقعیت مستعمره و امپریالیست

اگر مستعمره‌ای در یک امپراطوری وجود داشته باشد که هزینه‌ای کم‌تر از امپریالیست داشته باشد، جای مستعمره و امپریالیست را باهم عوض می‌کنیم.

گام چهارم: قدرت کل یک امپراطوری

قدرت یک امپراطوری برابر است باقدرت کشور استعمارگر، به‌اضافه درصدی از قدرت کل مستعمرات آن. در این مرحله، هزینه کل یک امپراطوری را با در نظر گرفتن هزینه‌ی امپریالیست و مستعمراتش حساب می‌کنیم.

گام پنجم: رقابت استعماری

هر امپراطوریی که نتواند بر قدرت خود بیفزاید و قدرت رقابت خود را از دست بدهد، در جریان رقابت‌های امپریالیستی، حذف خواهد شد. امپراطوری در حال حذف، ضعیف‌ترین امپراطوری موجود است. بدین ترتیب، در تکرار الگوریتم، یکی یا چند تا از ضعیف‌ترین مستعمرات، ضعیف‌ترین امپراطوری را برداشته و برای تصاحب این مستعمرات، رقابتی را میان کلیه امپراطوری‌ها ایجاد می‌کنیم. مستعمرات مذکور، لزوماً توسط قوی‌ترین امپراطوری تصاحب نخواهند شد، بلکه امپراطوری قوی‌تر، احتمال تصاحب بیشتری دارد. درنتیجه در مرحله پنجم، یک مستعمره از ضعیف‌ترین امپراطوری را انتخاب کرده و آن را به امپراطوریی که بیش‌ترین احتمال تصاحب را دارد، می‌دهیم.

گام ششم: سقوط امپراطوری ضعیف

در این مرحله امپراطوری ضعیف را حذف می‌کنیم. در الگوریتم پیشنهادشده برای این پژوهش، یک امپراطوری زمانی حذف‌شده تلقی می‌شود که مستعمرات خود را ازدست‌داده باشد.

گام هفتم: همگرایی

تکرار از گام دوم تا رسیدن به شرایطی توقفی که از پیش تعیین کرده‌ایم، شرایط توقف می‌تواند بر اساس زمان الگوریتم، تعداد دفعات تکرار، میزان جمعیت، تغییر در تابع هدف و ... تعیین شود.

الگوریتم ازدحام ذرات (PSO)

الگوریتم ازدحام ذرات بهینه‌سازی تصادفی گروهی است که از شبیه‌سازی رفتار اجتماعی گروه پرندگان الهام گرفته‌شده است. ازآنجاکه به‌صورت گروهی کار می‌کند و دارای تابع شایستگی است، شبیه به الگوریتم‌های تکاملی است ولی تفاوت اصلی در آن است که هر فرد از اطلاعات گذشته خود سود می‌برد. درحالی‌که چنین رفتاری در الگوریتم‌های تکاملی دیگر وجود ندارد و هر عضو جامعه موقعیت خود را با توجه به تجربیات شخصی و تجربیات کل جامعه تغییر می‌دهد. اشتراک اجتماعی اطلاعات بین اعضای یک جامعه یک سری مزیت‌های تکاملی را در پی دارد و این فرضیه پایه و اساس الگوریتم ازدحام ذرات و توسعه آن محسوب می‌شود. الگوریتم ازدحام ذرات به‌آسانی قابل‌اجرا است و در حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی گسسته و غیرخطی پیوسته مورداستفاده قرارگرفته است [۲].

در این الگوریتم ابتدا یک جمعیت اولیه تولید می‌شود که ذرات موجود در این جمعیت دارای یک سرعت اولیه هستند. هر ذره نشان‌دهنده یک راه‌حل مسئله است. سپس ذرات با توجه به بهترین موقعیت سرعت خود را تغییر می‌دهند. سرعت جدید با موقعیت فعلی ذره جمع می‌شود و موقعیت جدید ذره را

به وجود می‌آورد. اگرچه توانایی هر ذره در پیدا کردن بهترین مسیر محدود است، ولی ازآنجایی‌که هر ذره دارای حافظه است و بهترین موقعیت خود و همسایگان خود را ثبت می‌کند درنتیجه ذره با کل گروه در تعامل است و قابلیت پیدا کردن بهترین مسیر را دارد. در این الگوریتم $C1$ و $C2$ ضرایب ثابتی هستند که $C1$ ضریب یادگیری مربوط به تجربه شخصی ذره و $C2$ مربوط به ضریب یادگیری مربوط به تجربه جمعی ذره است و معمولاً $C1 + C2 = ۴$ است. تابع $rand$ مولد عدد تصادفی در بازه (۰,۱) است.

$$V^{k+1}i,j = WV^k i,j + C1\ rand1\big(\ pbest - s^k i,j\big) + C2\ rand2\ \big(gbest - s^k i,j\big) \qquad (I)$$

$V^{k+1}i,j$: سرعت ذره i ام در بعد j ام و در تکرار $k+1$ ام،

$pbest$: بهترین موقعیت ذره

$Gbest$: بهترین موقعیت گروه

W: پارامتر اینرسی

$C1$: پارامتر ادراکی

$C2$: پارامتر اجتماعی

$S^K i,j$: موقعیت ذره i ام در بعد j ام و در تکرار k ام

$$S^{K+1}i = V^{K+1}i + S^K i \qquad (II)$$

مراحل لازم برای بهینه‌سازی تجمع ذرات می‌تواند به‌صورت شبه کد زیر خلاصه گردد [۳]:

- **مرحله ۱: تعیین مشخصات اولیه الگوریتم**
- معرفی تابع هدف $f(x): x = (x_1, , x_2, \dots, x_n)^T$
- معرفی ذرات اولیه، مختصات مجاز x_i، بردار سرعت v_i برای هر ذره، حداکثر تعداد تکرار مجاز در کل الگوریتم (K)
- **مرحله ۲: اجرای الگوریتم**
- تا هنگامی‌که تعداد تکرارها کمتر از K باشد، $(k < K)$:
- $\mathrm{k} = \mathrm{k} + 1$
- ایجاد بردار سرعت جدید v_i^{k+1} برای هر یک از ذرات با استفاده از معادله I
- محاسبه مختصات جدید با استفاده از رابطه II
- ارزیابی تابع هدف به ازای مختصات نقاط جدید

اگر $k = K$ شد، توقف کنید و x^*_i و f^* را گزارش کنید.

سؤالات و فرضیه‌های پژوهش

سؤالات

۱. آیا بازدهی سبد الگوریتم رقابت استعماری با بازدهی سبد الگوریتم ازدحام ذرات متفاوت است؟

۲. آیا ریسک سبد الگوریتم رقابت استعماری با ریسک سبد الگوریتم ازدحام ذرات متفاوت است؟

فرضیه‌ها

۱. بازدهی سبد الگوریتم رقابت استعماری بزرگ‌تر از بازدهی سبد الگوریتم ازدحام ذرات است.

۲. ریسک سبد الگوریتم رقابت استعماری بزرگ‌تر از ریسک سبد الگوریتم ازدحام ذرات است.

روش‌شناسی پژوهش

پژوهش حاضر از منظر داده‌ها کمی است و ازآنجاکه از داده‌های تاریخی شرکت‌ها استفاده می‌کند ازلحاظ طرح تحقیق پس رویداد است. در این پژوهش ابتدا سری زمانی قیمت ۸۰۰ روز از ۱۲ شرکت عضو بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۹۲/۲/۵ تا ۹۸/۱/۲۸ از سایت بورس اوراق بهادار (www.tse.ir) در قالب داده‌های اکسل گردآوری شد. سپس با انتقال داده‌ها به نرم‌افزار MATLAB2018، سری زمانی ازنظر هم انباشتگی موردبررسی قرار گرفت، زیرا زمانی که متغیرهای مورداستفاده در رگرسیون از نوع سری زمانی بوده و مانا نباشند، پدیده‌ای به نام رگرسیون کاذب به وجود می‌آید، اما اگر تمام متغیرهای به‌کاررفته در مدل رگرسیونی باهم (جمعاً) مانا شوند یعنی باقیمانده‌های حاصل از مدل ایستا باشند آنگاه پدیده هم انباشتگی یا هم‌جمعی به وجود می‌آید. روش‌های متعددی برای آزمون هم انباشتگی وجود دارد که یکی از آن‌ها آزمون انگل- گرانجر (EG)، است. در این آزمون، آزمون ریشه واحد دیکی- فولر بر روی پسماندهای مدل انجام می‌شود و اگر سری پسماندها مانا شوند تأییدی بر هم انباشتگی سری زمانی است. فرضیه‌ها در این آزمون به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} H_0 = \text{عدم هم انباشتگی} \\ H_1 = \text{هم انباشتگی} \end{cases}$$

جدول ۱: آزمون هم انباشتگی انگل- گرانجر

متغیر	آماره دیکی- فولر	آماره در سطح ۰/۰۱	آماره در سطح ۰/۰۵	آماره در سطح ۰/۱۰	احتمال آزمون
سری زمانی قیمت سهم‌ها (ماتریس قیمت سهم‌ها)	-۱۱/۷۰۰۱	-۶/۷۰۷۶	-۶/۱۶۳۳	-۵/۸۷۹۰	۰/۰۰۱

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

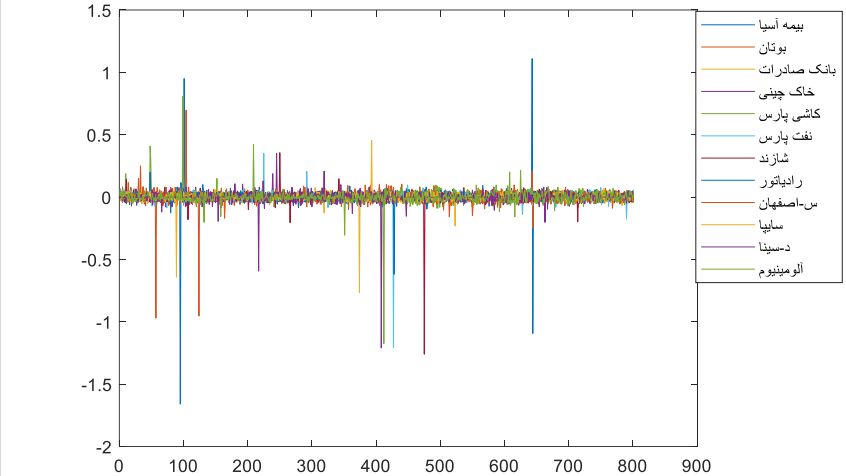
با توجه به جدول ۱ چون احتمال آزمون از ۰/۰۵ کمتر است و همچنین قدر مطلق آماره دیکی- فولر از قدر مطلق سه سطح آماری بیشتر است، بنابراین فرض H_0 رد می‌شود و درنتیجه سری زمانی هم انباشته است و داده‌ها مانا هستند.

پس از اطمینان از مانایی داده‌ها، برای محاسبه بازدهی از بازده لگاریتمی استفاده شد. محاسبه بازده لگاریتمی قیمت، کمک خواهد کرد که در صورت عدم همگن بودن داده‌های مورداستفاده، آن‌ها همگن و همنوع گشته و محاسبات آماری و احتمالاتی آن‌ها ساده گردد. بازده لگاریتمی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_t = \ln(1 + R_t) = ln\frac{p_t}{p_{t-1}}$$

که در آن p_t قیمت در زمان t و p_{t-1} قیمت در زمان $t-1$ است.

پس از محاسبه بازدهی، شبیه‌سازی دو الگوریتم رقابت استعماری و ازدحام ذرات در محیط نرم‌افزار MATLAB 2018پیاده‌سازی گردید و با استفاده از سری زمانی بازده سهم‌ها و پارامترهای ورودی دو الگوریتم به بهینه‌سازی سبد پرداخته شد.



شکل ۲ : نمودار بازده لگاریتمی هر سهم

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

جدول ۲ : پارامترهای الگوریتم رقابت استعماری

تعداد کشورها	۴۰
تعداد استعمارگران	۵
حداکثر تکرار	۱۵۰
ضریب همگون سازی یا ضریب جذب	۰/۹
احتمال انقلاب	۰/۱
نرخ انقلاب	۰/۰۵
ضریب تأثیر قدرت مستعمرات در قدرت کل امپراطور	۰/۰۲
تعداد متغیرها	۱۲
ماکزیمم مقدار	۱
مینیمم مقدار	۰

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

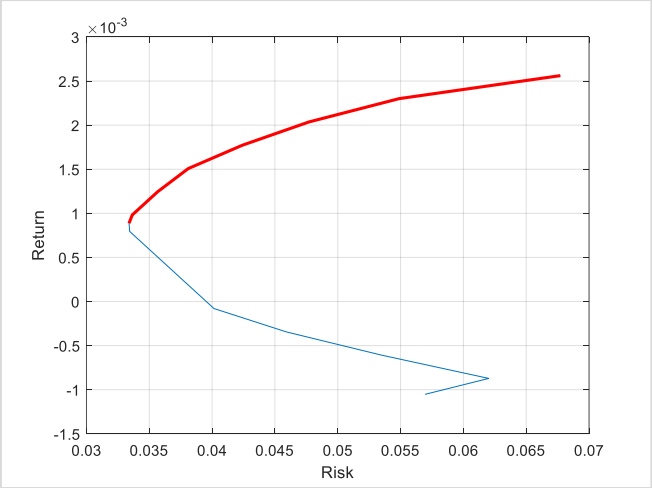
جدول ۳ : پارامترهای الگوریتم ازدحام ذرات

تعداد جمعیت	۴۰
حداکثر تکرار	۱۰۰
پارامتر اینرسی (کنترل سرعت)	۱
پارامتر ادراکی	۲
پارامتر اجتماعی	۲
تعداد متغیرها	۱۲
ماکزیمم مقدار	۱
مینیمم مقدار	۰

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

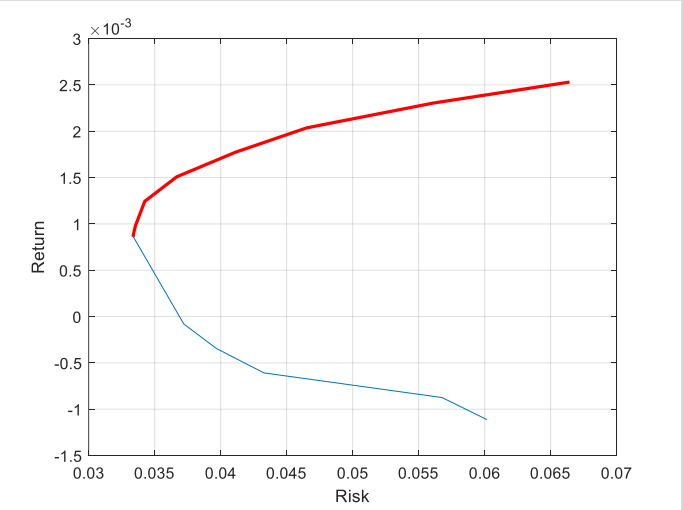
یافته‌های تحقیق

با توجه به جمعیت اولیه الگوریتم‌ها ۴۰ سبد سهام در دو حالت به دست آمد. سپس با توجه به میزان ریسک و بازده هر سبد مرز کارا هر یک از الگوریتم‌ها ترسیم شد. در شکل‌های ۳ و ۴ نمودار قرمزرنگ مربوط به مرز کارا و نمودار آبی‌رنگ مربوط به روند همگرایی است. یکی از ویژگی‌های مهم در الگوریتم‌های فرا ابتکاری روند همگرایی به سمت جواب بهینه است. الگوریتم‌هایی که زودتر همگرا می‌شوند نسبت به سایر الگوریتم‌ها زودتر از نقاط بهینه موضعی خارج‌شده و به سمت نقطه بهینه کلی حرکت می‌کنند و سریع‌تر به جواب بهینه می‌رسند. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار تنزیل جواب اولیه در الگوریتم رقابت استعماری بیشتر است و سریع‌تر به جواب بهینه می‌رسد.



شکل ۳. مرز کارا و روند همگرایی الگوریتم رقابت استعماری

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹



شکل ۴. مرز کارا و روند همگرایی الگوریتم ازدحام ذرات

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

با اجرای دو الگوریتم مشخص شد که چه سهامی باید در سبد نگهداری شود و چه میزان سرمایه-گذاری بر روی آن انجام پذیرد. الگوریتم رقابت استعماری ۹ سهم و الگوریتم ازدحام ذرات ۶ سهم را از ۱۲ سهم موجود برای سرمایه‌گذاری پیشنهاد می‌دهند. همچنین دو الگوریتم پیشنهاد می‌کنند که

بیشترین سرمایه‌گذاری بر روی شرکت کاشی پارس صورت پذیرد. جدول ۴ وزن هر سهم در سبد بهینه را نشان می‌دهد:

جدول ۴ : وزن سهم

نام سهام	رقابت استعماری	ازدحام ذرات
بیمه آسیا	۰/۰۰۰۱	۰
گروه صنعتی بوتان	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۷۵
بانک صادرات	۰/۰۰۰۰	۰
صنایع خاک چینی ایران	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱۶
کاشی پارس	۰/۹۹۸۶	۰/۹۸۰۹
نفت پارس	۰/۰۰۰۵	۰
پتروشیمی شازند	۰/۰۰۰۱	۰
رادیاتور ایران	۰	۰/۰۰۶۸
سیمان اصفهان	۰	۰/۰۰۲۲
سرمایه‌گذاری سایپا	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱۰
داروسازی سینا	۰/۰۰۰۴	۰
آلومینیوم ایران	۰/۰۰۰۱	۰

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

پس از محاسبه‌ی وزن هریک از سهم‌ها، ریسک و بازده هر سبد با لحاظ کردن این اوزان برآورد شد. همان‌طور که در جدول ۵ ملاحظه می‌شود، میزان تفاوت ریسک الگوریتم‌ها ۰/۰۰۱۳ و میزان تفاوت بازدهی آن‌ها ۰/۰۰۰۱ است.

جدول ۵ : ریسک و بازده سبد بهینه‌شده به دو روش الگوریتم رقابت استعماری و ازدحام ذرات

نوع الگوریتم	ریسک(CVaR)	بازده
رقابت استعماری	۰/۰۶۷۷	۰/۰۰۲۶
ازدحام ذرات	۰/۰۶۶۴	۰/۰۰۲۵

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

آزمون نرمال بودن

مشخص شدن نوع توزیع ریسک و بازدهی سبدها برای آزمون نمودن فرضیه‌ها الزامی است. ازاین‌رو با استفاده از نرم‌افزار SPSS آزمون شاپیرو- ویک بر روی ریسک و بازدهی الگوریتم‌ها انجام شد. طبق جدول ۶ بازدهی الگوریتم‌ها دارای توزیع نرمال است، زیرا سطح معناداری (sig) از ۰/۰۵ بیشتر است.

همچنین با توجه به جدول ۶ ریسک الگوریتم رقابت استعماری دارای توزیع نرمال است، اما ریسک الگوریتم ازدحام ذرات نرمال نیست.

(قابل‌ذکر است که ۱۵ سبد از ۴۰ سبد به وجود آمده توسط الگوریتم‌ها بر روی مرز کارا قرار دارد، ازاین‌رو از آزمون شاپیرو- ویک استفاده‌شده است.)

جدول ۶: آزمون نرمال بودن شاپیرو-ویک

آزمون / بازدهی‌وریسک	Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	sig
بازدهی رقابت استعماری	۰/۹۵۰	۱۵	۰/۵۲۹
بازدهی ازدحام ذرات	۰/۹۴۰	۱۵	۰/۳۸۶
ریسک رقابت استعماری	۰/۹۰۰	۱۵	۰/۰۹۵
ریسک ازدحام ذرات	۰/۸۴۲	۱۵	۰/۰۱۳

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

آزمون فرضیه‌ها

آزمون t زوجی

ازآنجاکه توزیع بازدهی‌ها نرمال است برای آزمون فرضیه اول از آزمون t زوجی استفاده شد.

جدول ۷. آزمون t زوجی بازدهی الگوریتم‌ها

t آزمون / بازدهی	F	Sig	T	Sig	Mean Difference	Std.Error Difference	Lower	Upper
با فرض تساوی واریانس	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۴۲	-۰/۰۰۰۸۷	۰/۰۰۰۸۷
با فرض عدم‌تساوی واریانس			۰/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۴۲	-۰/۰۰۰۸۷	۰/۰۰۰۸۷

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

نتایج به‌دست‌آمده در خصوص آزمون نمودن بازدهی محاسبه‌شده نشان می‌دهد که مقدار معناداری (Sig) معادل ۱/۰۰۰ و بزرگ‌تر از سطح خطا (۰/۰۵) است و لذا فرضیه نابرابری میانگین بازدهی‌ها رد می‌شود. همچنین مختلف العلامه بودن حد پایین (۰/۰۰۰۸۷-) و حد بالا (۰/۰۰۰۸۷) حاکی از آن است که با توجه به داده‌های موردبررسی در سطح اطمینان ۰/۰۹۵ میانگین بازدهی‌های به‌دست‌آمده بر اساس دو الگوریتم رقابت استعماری و ازدحام ذرات تفاوت معناداری ندارند.

آزمون من-ویتنی زوجی

برای آزمون نمودن فرضیه دوم از آزمون من- ویتنی استفاده شد. این آزمون معادل ناپارامتریک آزمون t زوجی است و شرط نرمال بودن داده‌ها در آن الزامی نیست.

جدول ۸ : آزمون من-ویتنی زوجی ریسک الگوریتم‌ها

	Mann-Whitny U	Wilcoxon W	Z	Asymp.Sig (2-tailed)
ریسک	۱۰۲/۵۰۰	۲۲۲/۵۰۰	-۰/۴۱۶	۰/۶۷۷

منبع: محاسبه‌شده توسط مؤلف، ۱۳۹۹

با توجه به مقدار معناداری (sig) که معادل ۰/۶۷۷ است و بزرگ‌تر از سطح خطا (۰/۰۵) است، فرضیه دوم مبنی بر نابرابری میانگین ریسک‌ها رد می‌شود. همچنین با توجه به کوچک بودن مقدار منفی آماره Z در سطح اطمینان ۰/۰۹۵ تفاوت معناداری بین ریسک الگوریتم‌ها وجود ندارد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از معیار ارزش در معرض خطر مشروط موردبررسی قرار گرفت. برای تخمین ارزش در معرض خطر مشروط از دو الگوریتم رقابت استعماری و ازدحام ذرات استفاده شد. پس از اجرای الگوریتم‌ها و آزمون نمودن فرضیه‌ها مشخص گردید که ارزش در معرض خطر مشروطِ الگوریتم‌ها و بازدهی آن‌ها تفاوت معناداری با یکدیگر ندارند. همچنین با توجه به هدف پژوهش (حداقل سازی ارزش در معرض خطر مشروط) دو الگوریتم با پیشنهاد بیشترین سرمایه-گذاری بر روی یک سهم (کاشی پارس) به دنبال کاهش ریسک سبد هستند. همچنین نمودار همگرایی الگوریتم‌ها مؤید این موضوع است که الگوریتم رقابت استعماری در زمان کوتاه‌تری به جواب بهینه می-رسد؛ این موضوع از این حیث قابل توجه است که در صورت افزایش محدودیت‌ها و پیچیده‌تر شدن مسئله به کمک این الگوریتم می‌توان سریعتر به جواب بهینه رسید. نتایج این پژوهش با تحقیقات سجادی (۱۳۹۰) که به مقایسه الگوریتم ژنتیک و رقابت استعماری پرداخت و نشان داد که الگوریتم رقابت

استعماری در زمان کمتری به جواب بهینه می‌رسد همخوانی دارد. در راستای پژوهش‌های آتی نیز پیشنهاد می‌شود که این تحقیق بر روی شاخص‌های چند صنعت خاص به کار گرفته شود تا تأثیر نوع صنعت به‌عنوان یکی از عوامل ریسک بر روی نتایج بررسی شود. همچنین پیشنهاد می‌شود ارزش در معرض خطر مشروط با الگوریتم فرا ابتکاری جهش قورباغه تخمین زده شود و نتایج حاصل از آن با الگوریتم رقابت استعماری مقایسه شود.

منابع

۱) اصغر پور حسین، رضازاده علی. تعیین سبد بهینه سهام با استفاده از روش ارزش در معرض خطر. فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد. ۱۳۹۴. شماره ۴: ۱۱۸-۹۳.

۲) بیات علی، اسدی لیدا. بهینه‌سازی پرتفوی سهام: سودمندی الگوریتم پرندگان و مدل مارکویتز. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار. ۱۳۹۶. شماره ۳۲: ۸۵-۶۳.

۳) رضایی اسعد اله، فلاحتی علی، سهیلی کیومرث. بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم تجمع ذرات سه هدفه. فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد. ۱۳۹۷. شماره ۴: ۵۲-۳۱.

۴) راعی رضا، محمدی شاپور، علی بیگی هدایت. بهینه‌سازی سبد سهام با رویکرد میانگین- نیم واریانس با استفاده از روش جستجوی هارمونی. مجله پژوهش‌های مدیریت در ایران. ۱۳۸۹. شماره ۳: ۱۲۸-۱۰۵.

۵) رجبی مهسا، خالوزاده حمید. بهینه‌سازی‌ومقایسه‌سبدسهام دربورس اوراق بهادارتهران‌با بهره‌مندی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی چندهدفه. مجله‌تحقیقات‌مالی. ۱۳۹۳. شماره ۲: ۲۷۰-۲۵۳.

۶) سجادی زینب. بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری بر اساس نظریه ارزش در معرض خطر و ارزیابی آن. پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی. دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر. دانشگاه شیخ بهایی. ۱۳۹۰.

۷) فلاح‌پور سعید، آصفی سپهر، فلاح تفتی سیما، باقری‌کاظم‌آباد محمدرضا. بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم فرا ابتکاری نهنگ با معیار ریسک ریزش مورد انتظار. فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار. ۱۳۹۷. شماره ۳۷: ۱۱۰-۱۳۲.

۸) گلمکانی حمیدرضا، فاضل مهرشاد. انتخاب پورتفولیوی مقید با استفاده از بهینه‌سازی ازدحام ذرات. مجله سیستم‌های متخصص به همراه کاربردها. ۱۳۹۰. شماره ۳۸: ۸۳۳۳-۸۳۲۷.

۹) مروتی‌شریف‌آبادی علی، عزیزی شیرین، احمدی نسترن. به‌کارگیری الگوریتم رقابت استعماری (ICA) در بهینه‌سازی و تشکیل پرتفلیو. فصلنامه دانش سرمایه‌گذاری. ۱۳۹۴. شماره ۱۳: ۴۱-۱۹.

۱۰) مولایی محمدعلی، آرش طالبی. بررسی کاربرد الگوریتم ابتکاری- ترکیبی ژنتیک ونلدر- مید در بهینه‌سازی پورتفوی. دو فصلنامه جستارهای اقتصادی. ۱۳۸۹. شماره ۱۴: ۲۰۴-۱۷۱.

۱۱) نشاطی زاده لعیا، حیدری حسن. بررسی معیارهای نوسان پذیری و ریسک در مدل‌های بهینه‌سازی مقید با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری. فصلنامه مدل‌سازی اقتصادسنجی.۱۳۹۷. شماره ۴: ۳۵-۱۱.

۱۲) نصرالله زاده کپری طاهره. بهینه‌سازی سبد سهام به کمک الگوریتم (ICA) و مدل ارزش در معرض خطر. پایان‌نامه کارشناسی ارشد مدیریت گرایش مالی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز. دانشکده مدیریت. ۱۳۹۴.

13) Babaei, S., Sepehri, M. M.; Babaei, E. (2015). Multi-objective portfolio optimization considering the dependence structure of asset returns, European Journal of Operational Research, Volume 244, Pages 525-539.

14) Cura, T. (2009). Particle swarm optimization approach to portfolio optimization, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume 10, Pages 2396-2406.

15) Deng, Guang F., Lin. Woo T., & Lo, Chih C. (2012). Markowitz- based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization, Expert Systems with Applications, Volume 39, Pages 4558- 4566.

16) Kandasamy, H. (2008). Portfolio Selection under Various Risk Measures, Ph.D thesis, Mathematical Sciences, Clemson University.

17) Meghwani, S. S., Thakur, M. (2017). Multi-criteria algorithms for portfolio optimization under practical constraints, Swarm and Evolutionary Computation, Volume 37, Pages 104 - 125.

18) Yan, W., Miao, R., & Li, S. (2007). Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and Numerical Solution, Applied Mathematics and Computation, Volume 194, Pages 128-134.

19) Zhu, Hanhong et al (2011). Particle swarm optimization for the constrained portfolio optimization problem, Expert Systems with Applications, Volume 38, Pages 10161-10169.