



تحلیل استاتیکی تیر های مگنت در مقیاس میکرو بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم

محسن جباری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد تهران جنوب، تهران، ایران

حسین دهبانی

مرکز آموزش علمی کاربردی شرکت تولیدی قند کرج، البرز، ایران

چکیده

در این مقاله خمش تیر میکرو تحت بار عرضی یکنواخت و بار محوری در میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار گرفته است. شرایط مرزی تیر نیز از نوع شرایط مفصل ساده در نظر گرفته می شوند. برای استخراج معادلات حاکم بر تیر ها از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده شده است و معادلات حاکم بر این مسئله برای تیرهای مگنت در مقیاس میکرو استخراج شده اند. در تحلیل تیرها در مقیاس میکرو، علاوه بر روابط موجود برای تیر های معمولی، تنش های کوپل شده نیز وجود خواهند داشت، به همین دلیل معادلات حاکم بر تیر میکرو با معادلات حاکم بر تیرهای معمولی متفاوت خواهد بود. همچنین، تئوری های مختلف تغییر شکل های برشی از جمله تئوری تیر اویلر-برنولی، تئوری تیر تیموشنکو، و تئوری تیر مرتبه سوم ردی در یک میدان مغناطیسی برای تیر تحت بارهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. در این تحقیق از روش تحلیلی برای حل مسئله خمش تیر میکرو استفاده شده است و مسئله خمش خیز تیر مگنت بصورت تابعی صریح بدست آمده است. در نهایت نتایج حاصل از این تحقیق بصورت نمودارهای دو بعدی ارائه شده اند.

واژه های کلیدی: تیر میکرومگنت، تیر اویلر-برنولی، تئوری تیر تیموشنکو، تئوری تیر مرتبه سوم ردی، میدان مغناطیسی، حل تحلیلی

۱. مقدمه

تیرها یکی از مهمترین اجزای سازه ای هستند که به صورت گسترده مورد بررسی قرار گرفته اند. پژوهشهای بسیاری به مطالعه ی تاثیر بارها بر روی رفتار استاتیکی تیرها اختصاص یافته است. از طرفی تاثیر میدان مغناطیسی بر روی رفتار سازه ها و تیرهای فلزی در حوزه مهندسی مکانیک مورد توجه قرار گرفته است.

همچنین بررسی رفتار تیرها از اهمیت زیادی در بسیاری از کاربردهای مهندسی همچون طراحی ماشینها و سازه ها برخوردار است.

از همان زمان که تئوری و تحلیل کلاسیک سازه ها مطرح شد، بحث تحلیل تیرها نیز بعنوان سر فصلی جدید از آن تئوری مورد بررسی قرار گرفت. در بررسی های صورت گرفته بر تحلیل تیر ها که شامل خمش، کمانش، و ارتعاش تیر ها می باشند بررسی ارتعاش بر اثر نیروی خارجی نیز مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است. یکی از راه های بررسی ارتعاشات استفاده از بار خارجی بر روی سازه می باشد که این نوع ارتعاشات با عنوان ارتعاشات اجباری مطرح می شود.

لی [۱] مسأله تیر با فرض خیز بزرگ تحت بارگذاریهای مرکب، ناشی از بار گسترده عرضی و بار متمرکز محوری را با روش عددی رانج کوتای مرتبه پنجم بررسی کرد. وگا پاسودا [2] پاسخ و کمانش تیر با فرض خیز بزرگ را با در نظر گرفتن سطح مقطع متقارن با استفاده از روشهای عددی انتگرال بیضوی و بسط تیلور تعیین کرد. بورگرین [3] نوسانات آزاد تیر با تکیه گاههای مفصلی را بررسی نمود و پاسخ را برحسب توابع بیضوی ارائه کرد. درویزه و همکاران [4] رفتار غیرخطی هندسی تیر، با فرض ثابت بودن خواص مادی را به کمک روش المان محدود و بادر نظر گرفتن المانهای یک بعدی و دوبعدی بررسی کرده اند. میدان جابجایی ابتدا بر اساس دیدگاه مکانیک پیوسته، تعریف شده و سپس جملات مثلثاتی، با بسط تیلور خود جایگزین شده است. این میدان جابجایی، حرکت انتقالی و چرخش مقطع، مد نظر قرار گرفته است. بازی و وینگارتن [5] از روش المان محدود برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی تیر تحت بار نوسانی استفاده کردند. بکائیان [6,7] تأثیر بار محوری کششی و فشاری را بر روی فرکانسهای طبیعی و شکل مدهای تیر یکنواخت یک دهانه تحت بارگذاریهای مختلف بررسی نمود. جتگانکار و چهیل [8] فرکانسهای طبیعی یک تیر با ضخامت متغیر را با تعریف پارامترهای اینرسی معادل، سطح مقطع معادل و جرم معادل تعیین کردند. فریرا و فسشار [9] فرکانس طبیعی تیر تیموشنکو با خیز کم را با روشهای عددی به دست آوردهاند. برای این منظور از توابع شکل جدیدی به همراه روش شبه طیفی استفاده شده است. یون و همکاران [10] از روش اجزای محدود برای تعیین فرکانسهای طبیعی تیرهای خمیده استفاده و نتایج را با مقالات دیگر مقایسه کردند. لین [۱۱] فرکانسهای طبیعی یک تیر تیموشنکو چند دهانه را به دست آورده است. هر بخش تیر به صورت یک قسمت مستقل در نظر گرفته شده و با توجه به معلوم بودن حل تیر تیموشنکو و مونتاژ پاسخهای هر بخش، فرکانس تیر تعیین شده است. دینگ و چن [12] با روش گالرکین به تحلیل فرکانسی و بررسی پایداری تیر متحرک محوری پرداخته اند. سو و ما [13] پاسخ تحلیلی تیر تیموشنکو تحت بار ضربهای را با روشهای تبدیل لاپلاس و مدهای نرمال ارائه کردند. کاپانیا و راسیتی در مقاله ای مروری، مطالعات قبلی خود در زمینه تحلیل تیرها و صفحات لایه ای را گردآوری نمودند. [14] آنها در بخشی از مرور کارهای قبلی، روی تئوریهای برشی مختلف برای صفحات و تیرها بحث نمودند و در مرور خود به چندین روش تحلیل، بر پایه المان محدود اشاره کردند. یکی از روش های المان محدودی که آنها به آن اشاره نمودند، روش المان محدودی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاست. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی باز هم مورد توجه محققان برای تحلیل تیرها، بالاخص تیرهای کامپوزیتی ارائه دادند. جالب اینکه اصل

و اساس این مدل، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی است. سنکر [15] در پژوهشی حل تحلیلی الاستیک برای تیرهای ساخته شده از مواد مدرج، تابعی ارائه نمود. در پژوهش ایشان خواص مکانیکی مانند مدول یانگ، مدول برشی و... تابعی از ضخامت تیر است. هرچند در این پژوهش، روش ارائه شده در تحلیل تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی قابل استفاده نیست که تقویت کننده در راستای طولی تیر توزیع شده باشد. به روش مشابهی ایشان و همکارانش، تنش های حرارتی در تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی را مورد بررسی و تحلیل قرار دادند. در اینجا نیز تقویت کننده در جهت ضخامت متغیر است [16]. در تحقیق دیگری چاکروباتی و همکارانش، تیر سه لایه ای را به روش المان محدود، مورد بررسی قرار دادند. این تیر از دو لایه ماده هموزن متفاوت در سطوح بالا و پایین و یک هسته ساخته شده از ماده مدرج تابعی تشکیل شده است. در این تحقیق نیز، خواص تابعی از ضخامت هسته است، همچنین کادولی و همکارانش [17]، تحلیل استاتیکی برای تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی به کمک تئوری تغییر شکل برشی ارائه کردند. آنها در بخشی از تحقیقات خود مقایسه ای بین نتایج استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه های بالاتر انجام دادند و به این نتیجه رسیدند که تفاوت نتایج بسیار اندک و ناچیز است. تحقیقات روی کمانش حرارتی تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی توسط کیانی و همکاران انجام شده است. در اینجا نیز تقویت کننده در ضخامت تیر متغیر در نظر گرفته شده است [18]. این پژوهش برای شرایط مرزی گوناگون تحت توزی های حرارتی مختلف بررسی شده است. ژو و همکارانش تحلیل دو بعدی ترموالاستیک تیرهای هموزن با ضخامتهای متغیر تحت نیروهای ترمودینامیکی برای شرایط مرزی ساده ارائه کرده اند [19]. آنها در ابتدا سری های هارمونیکی باضرایب مجهول برای توزیع دما و تنش فرض کرده و سپس به کمک شرایط مرزی بالا و پایین سطوح و شرایط مرزی ساده، شرایط مذکور را اخذ کرده اند. سپس تحلیل خود را به کمک المان محدود اعتبارسنجی نمودند. در مقاله دیگری نگوین و همکارانش [20] روشی برای تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه کردند. آنها توزیع تقویت کننده را در راستای ضخامت به صورت رابطه توانی فرض کردند. آنها تاثیر ضریب توانی رابطه خواص مواد مدرج تابعی بر تغییر شکلها، تنشها، فرکانسهای طبیعی، نیروهای بحرانی کمانشی و منحنی نیرو-فرکانس مربوط به مودهای ارتعاشی را بررسی و گزارش کردند.

در این مقاله ابتدا با استفاده از معادلات الاستیسیته خطی تیر میکرو، معادلات خطی تیر در خمش تیر تحت بار عرضی آمده و برای حل آن از روش تحلیلی استفاده خواهد شد. در مسئله خمش، خیز تیر بصورت تابعی صریح بدست آمده است و در ادامه نتایج حاصل از این تحقیق بصورت نمودار ارائه شده اند.

2- معادلات حاکم بر حرکت میکرو تیر تیموشنکو

معادلات میدان جابه جایی یک میکروتیر تیموشنکو به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} u_1(x,t) = z\phi(x,t) \\ u_2(x,t) = 0 \\ u_3(x,t) = w(x,t) \end{cases} \quad (1)$$

بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده برای مواد الاستیک خطی و تغییرشکل های بسیار کوچک، انرژی کرنشی ذخیره شده در میکروسازه به صورت رابطه (۲) بیان می شود:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (2)$$

در این رابطه، تانسور تنش کوشی، تنش مرتبه بالاتر نامیده می شوند که مقادیر آنها به صورت زیر قابل ارائه می باشند:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E \varepsilon_{ij} \\ m_{ij} &= 2\mu l_2^2 \chi_{ij} \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه فوق، ε_{ij} مؤلفه های ماتریس کرنش و χ_{ij} بخش متقارن تانسور گرادیان چرخشی است که مؤلفه های آنها به صورت روابط ارائه شده (۴) تعریف و با استفاده از رابطه (۱)، مقادیر آنها به دست می آید.

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = z \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right) \end{cases} \quad (4-a)$$

$$\begin{cases} \chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \\ \theta_i = \frac{1}{2} (\text{curl}(u)) \\ \chi_{12} = \chi_{21} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \chi_{11} = \chi_{13} = \chi_{22} = \chi_{23} = \chi_{31} = 0, \chi_{32} = \chi_{33} = 0 \end{cases} \quad (4-b)$$

با جایگذاری معادلات (۳) و (۴) در رابطه (۲)، معادله ی تغییرات انرژی کرنشی میکرو تیر تیموشنکو به صورت زیر تعیین می شود:

$$\delta U = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} b (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{31} \delta \varepsilon_{31} + m_{12} \delta \chi_{12} + m_{21} \delta \chi_{21}) dz dx \quad (5)$$

در رابطه فوق، b به پهنای میکرو تیر تیموشنکو اشاره دارد که در کار حاضر مقدار آن به صورت ثابت در نظر گرفته شده است. پس از تعیین معادله ی انرژی کرنشی میکرو تیر تیموشنکو، تغییرات انرژی جنبشی میکروسازه به شکل زیر بیان می شود [31,30]:

$$\delta T = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b \left(z \frac{\partial \phi}{\partial t} \delta \left(z \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(z \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) dz dx \quad (6)$$

۲-۱- اثرات میدان مغناطیسی در میکروتیر تیموشنکو

در این قسمت اثر میدان مغناطیسی در میکروتیر تیموشنکو مورد بررسی قرار میگیرد. بردارهای شار مغناطیسی $B = \{B_x, B_y, B_z\}^T$ مطابق شکل زیر تعریف می شوند. لازم به ذکر است در نظریه میکروتیر کوپله شده، مؤلفه های در راستای محور y برابر صفر در نظر گرفته شده اند.

$$\begin{aligned} B_x &= q\phi \\ B_y &= 0 \\ B_z &= q \left(z \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - d \frac{\partial \beta}{\partial z} - \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{aligned} \quad (7)$$

در رابطه فوق d ، q و μ به ترتیب ضرایب مگنتوالکتریک، پیزومگنتیک و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی هستند. همچنین داریم [104]:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه (8) در دسته معادلات رابطه (7) و تشکیل معادلات جدید و حل آنها براساس شرایط مرزی مدار بسته، پتانسیل مغناطیسی به شکل زیر محاسبه می شوند:

$$\psi = \left(\frac{-q\eta}{d^2 - \mu\eta} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \quad (9)$$

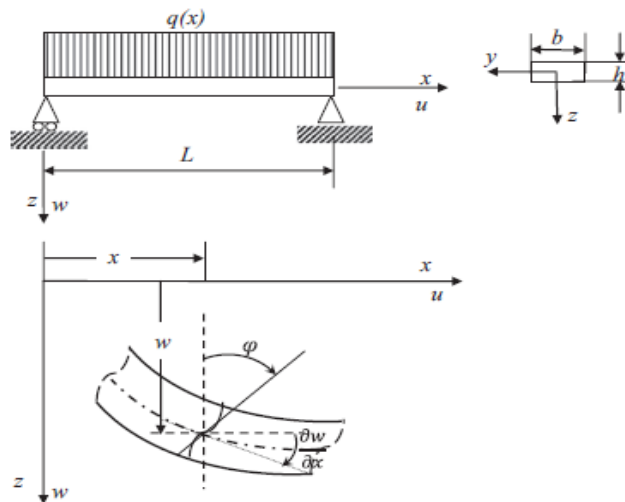
۳- تعیین تغییرات انرژیهای کرنشی و جنبشی در میکروتیر تیموشنکو

معادلات حاکم بر حرکت میکروتیر تیموشنکو با استفاده از روش انرژی و به کارگیری اصل همیلتون به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \Pi &= T - (U + W) \Rightarrow \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi dt &= \int_{t_1}^{t_2} \delta (T - (U + W)) dt = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، Π انرژی پتانسیل کل، T انرژی جنبشی و U انرژی کرنشی می باشند. با جایگذاری معادلات به دست آمده از روابط (۵)، (۶) و (۹) در معادله (۱۰) و فاکتورگیری از ضرایب $\delta \phi$ و $\delta \omega$ ، معادلات حاکم بر حرکت میکروتیر تیموشنکو کوپل شده تحت میدانهای فیزیکی مختلف شامل میدانهای الکتریکی و مغناطیسی بر بستر الاستیک به صورت معادلات ارائه شده در رابطه (۱۱) نوشته می شوند:

$$\begin{aligned}
 & -((EI)_{eq} + 2(EPI)_{eq} + \frac{1}{4}(a_2 A)_{eq}) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2} k(\mu A)_{eq} \right) \left(\varphi_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{1}{4} (a_2 A)_{eq} \right) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (\rho l)_{eq} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = 0 \\
 & \left(-\frac{1}{4} (a_2 A)_{eq} \right) \frac{\partial^3 \varphi_1}{\partial x^3} - \left(\frac{1}{2} k(\mu A)_{eq} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left(\frac{1}{4} (a_2 A)_{eq} \right) \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{2} k(\mu A)_{eq} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_w (2w_1 - w_2) \\
 & + k_G \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) + (\rho A)_{eq} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad (11)
 \end{aligned}$$



شکل (۱) شماتیک یک تیر مستقیم میکرو

۴- معادلات الاستیسیته تیر میکرو

برای تحلیل یک جسم الاستیک در مقیاس میکرو نیز مراحل شبیه به تحلیل یک جسم در محیط ماکرو که در قسمت قبلی ارائه شده است خواهیم داشت. با این تفاوت که برای تحلیل یک محیط الاستیک در مقیاس میکرو، فرضیات جدیدی به روابطی که قبلاً داشته ایم اضافه خواهد شد.

تیر مذکور تحت بار گسترده یکنواخت (q) قرار دارند. شرایط مرزی تیر نیز از نوع شرایط مرزی مفصل ساده می باشند. همانطور که در شکل (۱) ملاحظه می شود طول تیر (L)، عرض تیر (b)، و ارتفاع تیر (h) می باشد. برای خلاصه نویسی، معادلات الاستیسیته حاکم بر یک محیط الاستیک در مقیاس میکرو را با روابط اندیسی بصورت زیر نشان می دهیم:

چگالی انرژی کرنشی در مقیاس میکرو بصورت زیر نوشته می شود

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) \quad (11)$$

که در رابطه بالا، (u) چگالی انرژی کرنشی می باشد. و (σ_{ij}) تنسور تنش، (ε_{ij}) تنسور کرنش، (m_{ij}) تنسور تنشهای کوپل شده، و (χ_{ij}) تنسور متقارن انحنا می باشند. روابط کرنش- تغییر مکان نیز بصورت زیر نوشته می شوند

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[(\nabla u)_{ij} + (\nabla u)^T_{ij} \right] \quad (12)$$

روابط تنش - کرنش (معادلات ساختاری) نیز بصورت زیر خواهند بود.

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (13)$$

همچنین رابطه تنشهای کوپل شده (m_{ij}) و تنسور متقارن انحنای (χ_{ij}) نیز برابر است با

$$m_{ij} = 2 \mu \chi_{ij} \quad (14)$$

این روابط برای یک محیط الاستیک سه بعدی در مقیاس میکرو ارائه شده اند. در صورتیکه بخواهیم از روابط بالا برای تحلیل تیر استفاده کنیم، روابط ساده تر خواهند شد.

۵- معادلات خطی تیر میکرو

برای تحلیل تیرها در مقیاس میکرو نیز مراحل شبیه به تحلیل تیرهای ایزوتروپیک که در قسمت قبلی ارائه شده است طی خواهیم کرد. با فرض اینکه تغییر مکان در داخل تیر بصورت زیر باشد،

$$\begin{aligned} u_x(x, z) &= -z \frac{dw_b(x)}{dx} + f(z) \frac{dw_s(x)}{dx} \\ u_y(x, z) &= 0 \\ u_z(x, z) &= w_b(x) + w_s(x) \end{aligned} \quad (15)$$

که در میدان تغییر مکان ارائه شده در بالا، به ازای مقادیر مشخصی از تابع $f(z)$ تئوری های مختلف تغییرشکل برشی برای تیرها بصورت زیر حاصل می گردند.

If: $f(z) = -z \rightarrow$ Timoshenko theory

If: $f(z) = 0 \rightarrow$ Euler-Bernoulli theory

If: $f(z) = -4z^3/3h^2 \rightarrow$ Reddy theory

بر اساس روابط بالا، تئوری های مختلف تیر به ازای مقادیر مختلف تابع $f(z)$ حاصل می شوند. طبق این روابط با در نظر گرفتن $f(z) = 0$ تئوری کلاسیک تیر اویلر-برنولی حاصل می شود. با در نظر گرفتن $f(z) = -z$ تئوری مرتبه اول تیر تیموشنکو حاصل می شود. در نهایت با در نظر گرفتن تابعی بصورت $f(z) = -4z^3/3h^2$ تئوری تیر مرتبه سوم ردی برای تیرها حاصل می شود. بعد بدست آمدن میدان تغییر مکان می توان کرنش ها را نیز بدست آورد. کرنش های مربوطه نیز بصورت زیر می باشند

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \quad (16)$$

همچنین مولفه های تنسور انحنای نیز بر حسب مولفه های تغییر مکان بصورت زیر مشخص می شوند

$$\chi_{xy} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right\}$$

$$\chi_{yz} = \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right) \frac{dw_s}{dx} \quad (17)$$

و روابط تنش ها (معادلات ساختاری) نیز بصورت زیر نوشته خواهند شد

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \left\{ -z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right\}$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx}$$

$$m_{xy} = 2 G \chi_{xy} = G \left\{ -\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right\}$$

$$m_{yz} = 2 G \chi_{yz} = \frac{G}{2} \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right) \frac{dw_s}{dx} \quad (18)$$

شرایط مرزی برای تنش ها و تنش های کوپل شده نیز بصورت زیر هستند

$$\text{at: } z = \pm \frac{h}{2} \quad m_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (19)$$

بعد از بدست آمدن تنش ها، منتهای تنش را تعریف خواهیم کرد. بنابراین منتهای تنش با انتگرال گیری از تنش ها و ممان تنش بصورت زیر تعریف می شوند

$$P_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[-z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right] dz \quad (20)$$

که P_x منتهای نیروی محوری در جهت طول تیر می باشد. همچنین داریم

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xy} dz \\
 &= E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \left(-z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) dz \\
 &+ G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) dz \quad (21)
 \end{aligned}$$

که M_x منتهی گشتاور در تیر می باشد. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
 V_{xz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\tau_{xz} - \frac{dm_{xy}}{dx} - \frac{dm_{yz}}{dz} \right) dz \\
 &= G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} - \left(-\frac{d^3 w_b}{dx^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^3 w_s}{dx^3} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 f}{dz^3} \right) \frac{dw_s}{dx} \right\} dz \quad (22)
 \end{aligned}$$

که V_{xz} نیز منتهی نیروی برشی در ضخامت تیر می باشد.

اکنون برای آنکه بتوانیم معادلات تعادل حاکم بر مسئله را استخراج نماییم از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می کنیم. طبق اصل حداقل انرژی پتانسیل، ابتدا باید انرژی پتانسیل کل سیستم که شامل انرژی کرنشی، کار انجام شده توسط بار عرضی، و کار انجام شده توسط بار محوری می باشد را محاسبه نمود. در حالت کلی انرژی کرنشی مربوط یک جسم الاستیک سه بعدی در مقیاس میکرو بصورت زیر می باشد

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (23)$$

در صورتیکه بخواهیم انرژی کرنش مربوط به تیر را محاسبه کنیم، با استفاده از روابط تعریف شده در قسمت قبل برای تیر میکرو، انرژی کرنشی تیر بصورت زیر نوشته می شود

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ E \left(-z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right)^2 + G \left[\left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \right]^2 + G \left(-\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right)^2 - \frac{G}{4} \left[\left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right) \frac{dw_s}{dx} \right]^2 \right\} dz dy dx \quad (24)$$

که بعد از محاسبه انتگرال در جهت های ضخامت و عرض تیر، انرژی کرنشی بصورت زیر نوشته می شود

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ 2A_1 \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^2 + 2A_2 \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right)^2 + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2A_4 \left(\frac{dw_s}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (25)$$

که در رابطه بالا ضرایب بصورت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Ez^2 + G) dz \\ A_2 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{G}{16} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right)^2 + Ef^2(z) \right] dz \\ A_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[-2Ezf(z) - \frac{G}{2} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \right] dz \\ A_4 &= G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(1 + \frac{df}{dz} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right)^2 \right] dz \quad (26) \end{aligned}$$

کار نیرو خارجی (بار یکنواخت عرضی) بصورت زیر نوشته می شود

$$\Omega = - \int_0^L q (w_b + w_s) dx \quad (27)$$

همچنین کار نیروی خارجی (نیروی محوری) نیز بصورت زیر نوشته می شود

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw_b}{dx} + \frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx \quad (28)$$

بنابر این با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل (اصل کار مجازی) که بصورت زیر است، می توان معادلات حاکم بر مسئله تیر میکرو تحت اثر همزمان بار عرضی و بار محوری را بدست آورد

$$\delta \Pi = \delta U + \delta \Gamma + \delta \Omega = 0 \quad (29)$$

که اولین وریشن انرژی کرنشی بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta U = \int_0^L \left\{ 2A_1 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) + 2A_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + A_3 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) + 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \right\} dx \quad (30)$$

با گرفتن انتگرال جز به جز از رابطه بالا خواهیم داشت

$$\delta U = \int_0^L \left\{ 2A_1 \frac{d^4 w_b}{dx^4} \delta w_b + 2A_2 \frac{d^4 w_s}{dx^4} \delta w_s + A_3 \frac{d^4 w_b}{dx^4} \delta w_s + A_3 \frac{d^4 w_s}{dx^4} \delta w_b - 2A_4 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \delta w_s \right\} dx + \left\{ \left(2A_1 \frac{d^3 w_b}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_s}{dx^3} \right) \delta w_b + \left(2A_1 \frac{d^2 w_b}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) + \left(2A_2 \frac{d^3 w_s}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_b}{dx^3} - 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \right) \delta w_s + \left(2A_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \right\}_0^L \quad (31)$$

وریشن کار نیرو خارجی (بار یکنواخت عرضی) بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta \Omega = - \int_0^L q (\delta w_b + \delta w_s) dx \quad (32)$$

همچنین، وریشن کار نیروی خارجی (نیروی محوری) نیز بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta \Gamma = P \int_0^L \left\{ \left(\frac{dw_b}{dx} + \frac{dw_s}{dx} \right) \left[\delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) + \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \right] \right\} dx \quad (33)$$

که بعد از انتگرال گیری با تکنیک جز به جز بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta \Gamma = -P \int_0^L \left\{ \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) (\delta w_b + \delta w_s) \right\} dx + \left\{ \left(\frac{dw_b}{dx} + \frac{dw_s}{dx} \right) (\delta w_b + \delta w_s) \right\}_0^L \quad (34)$$

با توجه به روابط بالا و با استفاده از اصل کار مجازی که گفته شد، به رابطه زیر می رسیم

$$\begin{aligned}
\delta \Pi &= \delta U + \delta \Gamma + \delta \Omega \\
&= \int_0^L \left\{ \left[2A_1 \frac{d^4 w_b}{dx^4} + A_3 \frac{d^4 w_s}{dx^4} - P \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) - q \right] \delta w_b \right. \\
&\quad + \left[2A_2 \frac{d^4 w_s}{dx^4} + A_3 \frac{d^4 w_b}{dx^4} - 2A_4 \frac{d^2 w_s}{dx^2} - P \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - q \right] \delta w_s \right\} dx \\
&+ \left\{ \left(2A_1 \frac{d^3 w_b}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_s}{dx^3} \right) \delta w_b + \left(2A_1 \frac{d^2 w_b}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) \right. \\
&\quad + \left(2A_2 \frac{d^3 w_s}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_b}{dx^3} - 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \right) \delta w_s \\
&\quad \left. + \left(2A_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \right\}_0^L = 0 \quad (35)
\end{aligned}$$

در نهایت، معادلات دیفرانسیل خطی حاکم بر تیر میکرو بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
-2A_1 \frac{d^4 w_b}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_s}{dx^4} + P \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + q &= 0 \\
-2A_2 \frac{d^4 w_s}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_b}{dx^4} + 2A_4 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + P \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + q &= 0 \quad (36)
\end{aligned}$$

معادلات بالا معادلات دیفرانسیل تعادل حاکم بر تیر میکرو ایزوتروپیک می باشند که با استفاده از روش انرژی بدست آمده اند. این معادلات بر پایه یک تئوری تغییر شکل برشی کلی نوشته شده اند.

همچنین شرایط مرزی طبیعی نیز بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}
\left[2A_1 \frac{d^3 w_b}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_s}{dx^3} \right] &= 0. \quad or \quad \delta w_b = 0 \\
\left[2A_2 \frac{d^3 w_s}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_b}{dx^3} - 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \right] &= 0. \quad or \quad \delta w_s = 0 \\
\left[2A_1 \frac{d^2 w_b}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right] &= 0. \quad or \quad \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) = 0 \\
\left[2A_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] &= 0. \quad or \quad \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) = 0 \quad (37)
\end{aligned}$$

معادلات بالا معادلات حاکم بر تیر میکرو و شرایط مرزی طبیعی می باشند. اکنون می توان با استفاده از روش های تحلیلی یا روش های عددی ذکر شده در فصول قبلی معادلات دیفرانسیل شرایط مرزی بالا را حل نمود. که ما در این تحقیق از روش تحلیلی برای حل معادلات استفاده می کنیم.

۶- معادلات ماکسول تیر اویلر-برنولی

برای یک تیر اویلر-برنولی تحت تاثیر میدان مغناطیسی H ، نیروی لورنتس (*Lorentz's force*) به شکل زیر تعریف می شود:

$$f = q\vec{V} \times \vec{B} = \vec{J} \times \mu\vec{H} = \mu(\vec{J} \times \vec{H}) \quad (38)$$

از رابطه فوق داریم:

$$\vec{J} = \text{Curl } \vec{h} \rightarrow \vec{h} = \text{Curl}(\vec{U} \times \vec{H}) = \nabla \times \begin{vmatrix} u & 0 & w \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \nabla \times (0, wH_x, 0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & wH_x & 0 \end{vmatrix} \quad (39)$$

با ساده سازی روابط فوق داریم:

$$\vec{J} = \left(-\frac{\partial}{\partial z} wH_x, 0, \frac{\partial}{\partial x} wH_x \right) = \left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} wH_x \right) \quad (40)$$

برای ساده سازی تحلیل، یک بردار طولی به صورت $H = (H_x, 0, 0)$ در نظر گرفته می شود. چگالی جریان (J) و معادلات ماکسول برابر است با

$$\vec{J} = \text{Curl}(h) = \nabla \times h = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} wH_x \end{vmatrix} = \left(0, -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} wH_x \right), 0 \right) \quad (41)$$

نیروی لورنتس (*Lorentz's force*) برابر است با:

$$f = \mu_0 \times (J \times h) = \mu_0 \times \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} wH_x \right) & 0 \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mu_0 H_x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu_0 H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (42)$$

که در رابطه فوق، μ_0 ضریب نفوذپذیری میدان مغناطیسی است. بنابراین مولفه نیروهای لورنتس در امتداد جهت های X ، Y و Z به شکل زیر تعریف می شود:

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = \mu_0 H_x^2 \quad (43)$$

۷- تحلیل خمش تیر تحت بار عرضی

در این قسمت خمش تیر میکرو مگنت تحت بار عرضی بررسی می شود. همچنین از یک روش تحلیلی برای محاسبه خیز و تغییر مکان کلی تیر استفاده می شود. معادلات حاکم بر خمش تیر بصورت زیر هستند

$$\begin{aligned} -2A_1 \frac{d^4 w_b}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q + f &= 0 \\ -2A_2 \frac{d^4 w_s}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_b}{dx^4} + 2A_4 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q + f &= 0 \end{aligned} \quad (44)$$

شرایط مرزی دو سر تیر نیز مفصل ساده در نظر گرفته می شوند. و برای شرایط مرزی مفصل ساده روابط زیر برقرار می باشند

$$\begin{aligned} w_b(0) = w_b(L) &= 0 \\ w_s(0) = w_s(L) &= 0 \\ \left[2A_1 \frac{d^2 w_b(0)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s(0)}{dx^2} \right] &= \left[2A_1 \frac{d^2 w_b(L)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s(L)}{dx^2} \right] = 0 \\ \left[2A_2 \frac{d^2 w_s(0)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b(0)}{dx^2} \right] &= \left[2A_2 \frac{d^2 w_s(L)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b(L)}{dx^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

در تحلیل خمش، برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل شده بالا و شرایط مرزی مشخص، معادلات را بصورت زیر دوباره باز نویسی می نماییم

$$\begin{aligned} -2A_1 D^4 w_b - A_3 D^4 w_s + q + f &= 0 \\ -A_3 D^4 w_b + 2(A_4 D^2 - A_2 D^4) w_s + q + f &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

که در دستگاه بالا داریم: $(D = \frac{d}{dx})$
و یا بصورت ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} -2A_1 D^4 & -A_3 D^4 \\ -A_3 D^4 & 2(A_4 D^2 - A_2 D^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ w_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q - f \\ -q - f \end{bmatrix} \quad (47)$$

حالا دترمینان ضرایب و دترمینان نظیر مجهولات را بصورت زیر تعریف می نماییم:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -2A_1D^4 & -A_3D^4 \\ -A_3D^4 & 2(A_4D^2 - A_2D^4) \end{bmatrix} = 4A_1(A_2D^8 - A_4D^6) - A_3^2D^8$$

$$\Delta_b = \begin{bmatrix} -q - f & -A_3D^4 \\ -q - f & 2(A_4D^2 - A_2D^4) \end{bmatrix} = (q + f)(2A_2D^4 - 2A_4D^2 - A_3D^4)$$

$$\Delta_s = \begin{bmatrix} -2A_1D^4 & -q - f \\ -A_3D^4 & -q - f \end{bmatrix} = (q + f)(2A_1D^4 - A_3D^4) \quad (48)$$

حالا می توان مجهولات را بصورت زیر بدست آورد

$$w_b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{q(2A_2D^4 - 2A_4D^2 - A_3D^4)}{4A_1(A_2D^8 - A_4D^6) - A_3^2D^8}$$

$$w_s = \frac{\Delta_s}{\Delta} = \frac{q(2A_1D^4 - A_3D^4)}{4A_1(A_2D^8 - A_4D^6) - A_3^2D^8} \quad (49)$$

پس از حل هر کدام از معادلات جبری بالا، حل نهایی معادلات دیفرانسیل حاکم بصورت زیر می باشند

$$w_b(x) = \frac{-1}{8A_1A_3A_4^2} (A_3^4 - 8A_1A_2A_3^2 + 16A_1^2A_2^2)(C_3e^{-\beta x} + C_4e^{\beta x})$$

$$+ \frac{x^2}{6}(C_5x + C_6) + (C_7x + C_8) + \frac{(q + f)x^4}{48A_1}$$

$$w_s(x) = \frac{-1}{8A_1A_3A_4^2} (A_3^4 - 8A_1A_2A_3^2 + 16A_1^2A_2^2)(C_3e^{-\beta x} + C_4e^{\beta x})$$

$$+ 2(C_1x + C_2) - \frac{1}{2A_3A_4} (4A_1A_2 - A_3^2)(C_5x + C_6)$$

$$+ \frac{(q + f)A_3x^2}{8A_1A_4} \quad (50)$$

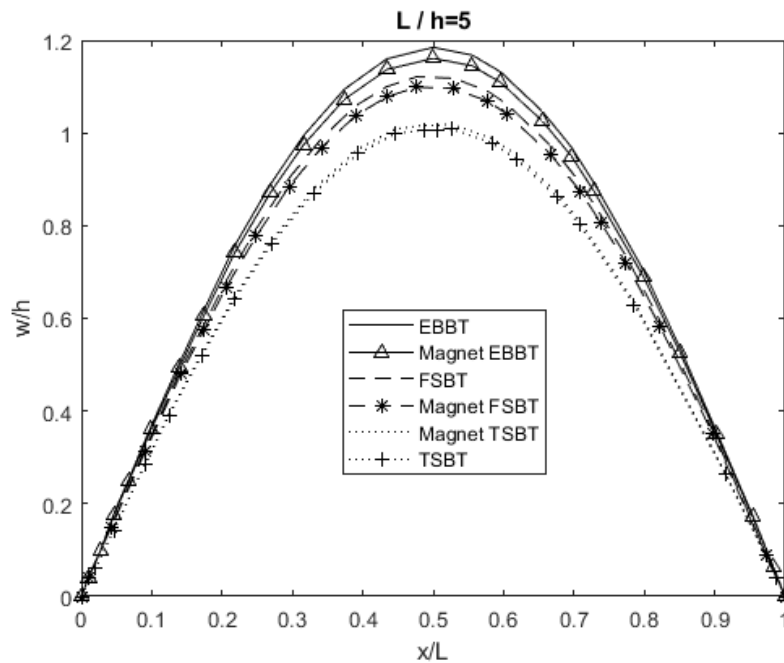
که در روابط بالا ضریب زیر استفاده شده است

$$\beta = 2 \left[\frac{A_1A_4}{4A_1A_2 - A_3^2} \right]^{1/2} \quad (51)$$

همچنین، همه ضرایب مجهول در روابط بالا از شرایط مرزی نوشته شده بدست می آیند.

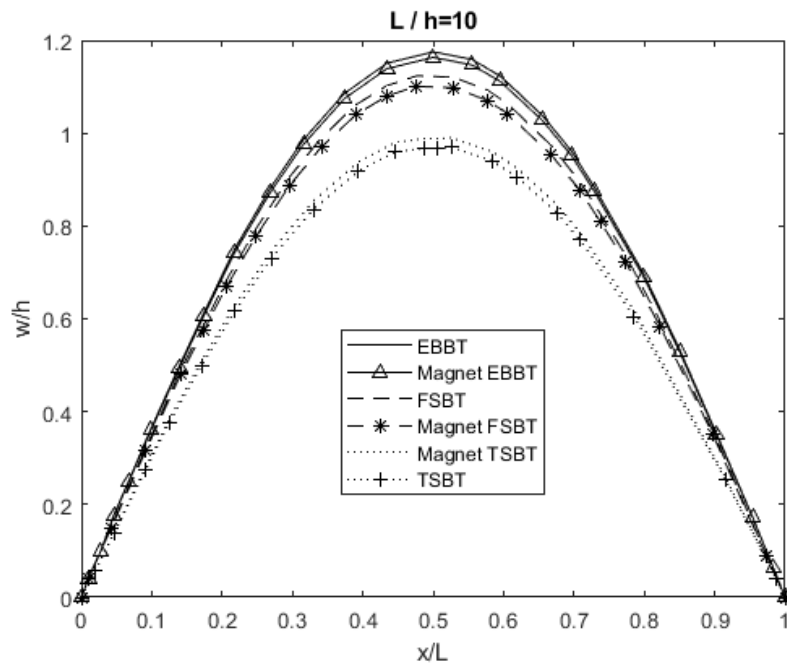
۸- نتایج مربوط به تحلیل خمش تیر

در این بخش نتایج مربوط به تحلیل خمش تیر میکرو بر اساس تئوری های مختلف تغییرشکل برشی ارائه شده اند.

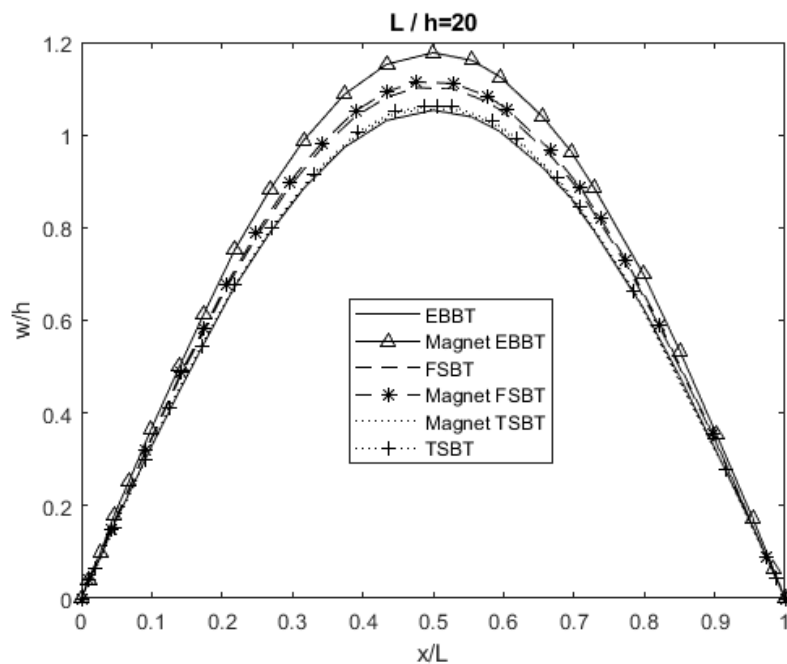


شکل (۱-۶) مقایسه تئوری های مختلف تیرها با میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی برای منحنی های تغییرمکان تیر میکرو تحت بار عرضی برای نسبت $(L/h=5)$

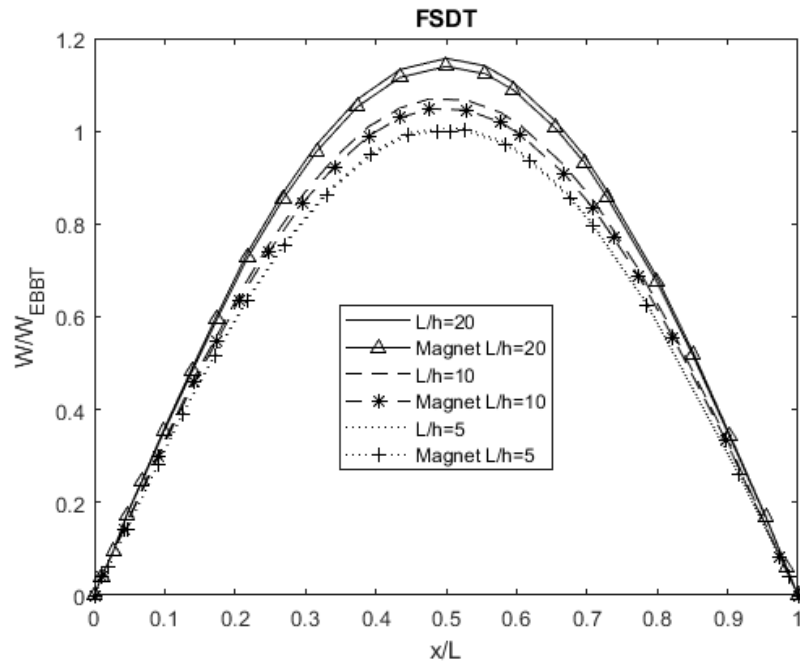
در هر شکلی سعی شده است که نتایج حاصل شده از تئوری های مختلف طوری نمایش داده شوند که تفاوت تئوری های مختلف تیرها با میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی بخوبی نشان داده شود.



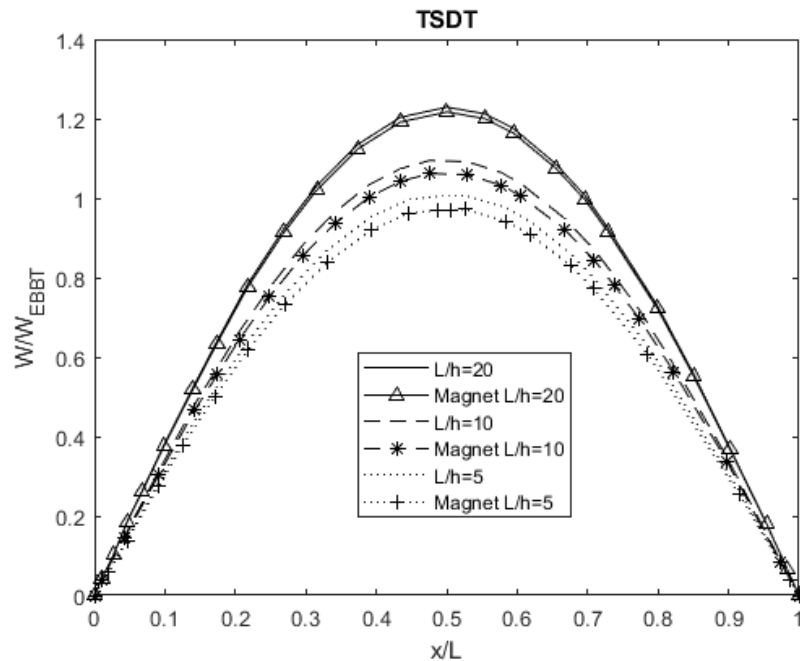
شکل (۳-۶) مقایسه تئوری های مختلف تیرها با میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی برای منحنی های تغییر مکان تیر میکرو تحت بار عرضی برای نسبت $(L/h=10)$



شکل (۳-۶) مقایسه تئوری های مختلف تیرها با میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی برای منحنی های تغییر مکان تیر میکرو تحت بار عرضی برای نسبت $(L/h=20)$



شکل (۴-۶) اثر نسبت بی بعد (L/h) با میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی بر روی منحنی های تغییر مکان تیر میکرو تحت بار عرضی با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی تیر



شکل (۵-۶) اثر نسبت بی بعد (L/h) با میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی بر روی منحنی های تغییر مکان تیر میکرو تحت بار عرضی با تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی تیر

در شکل های (۱-۶) تا (۵-۶) نمودارهای تغییر مکان بی بعد شده بر روی نسبت بی بعد (x/L) نشان داده با اثر میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی نشان داده شده است. در این شکلها اثرات نسبت طول به ضخامت تیر ($L/h=5$) و همچنین تفاوت تئوری های مختلف تیر ها در نشان داده شده است.

در این شکل ها برای کوتاهی و اختصار از نماد های زیر استفاده شده است. برای تئوری تیر اولر - برنولی نماد $(EBBT)$ ، برای تئوری تیر مرتبه اول برشی نماد $(FSBT)$ ، و برای تئوری تیر مرتبه سوم برشی از نماد $(TSBT)$ استفاده شده است.

در شکل (۶-۱) نمودار تغییر مکان بی بعد (w/h) بر روی نسبت بی بعد (x/L) با حضور میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی نشان داده شده است. در این شکل نسبت طول به ضخامت تیر $(L/h=5)$ در نظر گرفته شده است. در این شکل مقایسه ای بین انواع تئوری های تغییر شکل برشی برای تیرها صورت گرفته است. همانطور که از این شکل پیداست حداکثر تغییر مکان تیر در وسط تیر می باشد. همچنین تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم خیز بیشتری نسبت دیگر تئوری ها نشان می دهد. و تئوری کلاسیک اولر- برنولی نیز کمترین خیز را نشان می دهد. همچنین، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی هم مقدار تغییر مکان را بین دو تئوری دیگر نشان می دهد. از این شکل می توان نتیجه گرفت که خیز تیر برای تئوری های مختلف تغییر شکل برشی تفاوت محسوسی دارد. همچنین مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/h) بر سه تئوری در میدان مغناطیسی کمتر از مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/h) بدون اثر میدان مغناطیسی می باشد. تفاوت در مقادیر این سه تئوری با حضور میدان و بدون حضور میدان مغناطیسی در تئوری اولر- برنولی $(EBBT)$ از سایر تئوری ها بیشتر می باشد.

در شکل (۶-۲) نیز نمودار تغییر مکان بی بعد (w/h) بر روی نسبت بی بعد (x/L) با حضور میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی نشان داده شده است. در این شکل نسبت طول به ضخامت تیر $(L/h=10)$ در نظر گرفته شده است. در این شکل نیز تفاوت تئوری های مختلف تغییر شکل برشی نشان داده شده است. همانطور که می توان مشاهده کرد در این شکل تئوری های مختلف تیر با یکدیگر متفاوت هستند. و مثل شکل قبل تئوری مرتبه سوم خیز بیشتری را نشان می دهد. و بعد از آن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی نسبت به تئوری اولر- برنولی خیز بیشتری را نشان می دهد. ولی در این شکل تئوری های مختلف با یکدیگر تفاوت های کمتری نسبت به شکل قبلی دارند. همچنین مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/h) بر سه تئوری در میدان مغناطیسی کمتر از مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/h) بدون اثر میدان مغناطیسی می باشد. تفاوت در مقادیر این سه تئوری با حضور میدان و بدون حضور میدان مغناطیسی در تئوری تیر مرتبه اول برشی $(FSBT)$ ، از سایر تئوری ها بیشتر می باشد.

در شکل (۶-۳) نیز نمودار تغییر مکان بی بعد (w/h) بر روی نسبت بی بعد (x/L) با حضور میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی نشان داده شده است. در این شکل نسبت طول به ضخامت تیر $(L/h=20)$ در نظر گرفته شده است. همانطور که می توان مشاهده کرد در این شکل تئوری های مختلف تیر با یکدیگر تفاوت کمتری نسبت به شکل های قبلی دارند. مثل شکل قبل تئوری مرتبه سوم خیز بیشتری را نشان می دهد. و بعد از آن تئوری مرتبه اول نسبت به تئوری اولر- برنولی خیز بیشتری را نشان می دهد. همچنین مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/h) بر سه تئوری در حضور میدان مغناطیسی کمتر از مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/h)

بدون اثر میدان مغناطیسی می باشد. تفاوت در مقادیر این سه توری با حضور میدان و بدون حضور میدان مغناطیسی در تئوری تیر مرتبه سوم برشی ($TSBT$)، از سایر تئوری ها بیشتر می باشد.

از این سه شکل می توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) تفاوت تئوری های مختلف تغییرشکل برشی تیرها کمتر می شود. همچنین می توان نتیجه گرفت که تئوری مرتبه سوم ردی در همه حالت ها مقدار خیز کمتری را نسبت به دو تئوری دیگر نشان می دهد. و بعد از آن نیز تئوری تیر اولر-برنولی بیشترین خیز را نشان می دهد. در نهایت تئوری اولر-برنولی کمترین خیز را نسبت به دو تئوری دیگر نشان می دهد. مقادیر تغییر شکل برشی تیرها در میدان مغناطیسی در مقایسه با سه تئوری بدون میدان مغناطیسی، مقادیر کمتری را نشان می دهد.

در شکل (۴-۶) نمودار تغییر مکان بی بعد (w/W_{EBBT}) بر روی نسبت بی بعد (x/L)، بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی با حضور میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی نشان داده شده است. که (W_{EBBT}) حداکثر تغییر مکان تیر (تغییر مکان وسط تیر) بر اساس تئوری اولر-برنولی می باشد. در این شکل اثر نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) بر روی خیز تیر نشان داده شده است. در این شکل مقایسه ای بین منحنی های خیز تیر بر اساس انواع نسبت های (L/h) صورت گرفته است. همانطور که از این شکل پیداست، برای تیر با نسبت طول به ضخامت ($L/h=5$)، تفاوت منحنی مربوطه با دیگر منحنی ها بیشتر می باشد. یعنی در این حالت تئوری مرتبه اول برشی خیز نسبتاً زیاد تری را نسبت به تئوری اولر-برنولی نشان می دهد. برای دیگر نسبت های ضخامت ($L/h=10$)، و ($L/h=20$) نیز به ترتیب، تفاوت خیز تئوری مرتبه اول و تئوری اولر-برنولی کمتر می شود. مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/W_{EBBT}) تغییر شکل برشی تیرها در میدان مغناطیسی در مقایسه با تغییر مکان بدون حضور میدان مغناطیسی، مقادیر کمتری را نشان می دهد.

در شکل (۵-۶) نمودار تغییر مکان بی بعد (w/W_{EBBT}) بر روی نسبت بی بعد (x/L)، بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی با حضور میدان مغناطیسی و بدون میدان مغناطیسی نشان داده شده است. در این شکل نیز اثر نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) بر روی خیز تیر نشان داده شده است. همانطور که از این شکل پیداست، برای تیر با نسبت طول به ضخامت ($L/h=5$)، تئوری مرتبه سوم برشی خیز زیاد تری را نسبت به تئوری اولر-برنولی نشان می دهد. برای دیگر نسبت های طول به ضخامت ($L/h=10$)، و ($L/h=20$) نیز به ترتیب، تفاوت خیز تئوری مرتبه سوم و تئوری اولر-برنولی کمتر می شود. مقادیر تغییر مکان بی بعد (w/W_{EBBT}) تغییر شکل برشی تیرها در میدان مغناطیسی در مقایسه با تغییر مکان بدون حضور میدان مغناطیسی، مقادیر کمتری را نشان می دهد.

در مجموع می توان نتیجه گرفت که تئوری مرتبه سوم خیزی بیشتری را نسبت به تئوری مرتبه اول نشان می دهد. و تئوری مرتبه اول نیز خیز بیشتری را نسبت به تئوری اولر-برنولی نشان می دهد.

همچنین می توان نتیجه گرفت که هر چقدر نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) کاهش پیدا می کند، تفاوت تئوری های مختلف تیرها برای خمش تیر تحت بار عرضی نیز بیشتر می شود. نهایتاً از گراف های دوبعدی

میتوان نتیجه گرفت که کلیه خیزها در حضور میدان مغناطیسی در مقایسه با عدم وجود میدان مغناطیسی، مقادیر کمتری را نشان می دهد.

فهرست منابع:

- [1] Lee K., "Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 37, pp. 439-443, 2002.
- [2] Vega-Posada C., Mauricio Areiza-Hurtadob J. Dario Aristizabal-Ochoa C.N., "Large-deflection and post-buckling behavior of slender beamcolumns with non-linear end-estrains", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 46, pp. 79-95, 2011.
- [3] Burgreen D., "Free vibrations of a pin-ended column with constant distance between pin ends", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp. 135- 139, 1951.
- [4] Darvizeh M, Darvizeh A, Ansari R, Alijani A., "One and two-dimensional analysis of large deformations of beams using continuum mechanics theory", *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 11, No. 4, pp. 40-33, 1390. (In Persian).
- [5] Busby H., Weingarten V.I., "Non-linear response of a beam to periodic loading", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 7, pp. 289-303, 1972.
- [6] Bokaian A., "Natural frequencies of beams under compressive axial loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 49-65, 1988.
- [7] Bokaian A., "Natural frequencies of beams under tensile axial loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, pp. 481-498, 1988.
- [8] Jategaonkar R., Chehil D.S., "Natural frequencies of a beam with varying section properties", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 133, pp. 303-322, 1989.
- [9] Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E., "Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF pseudospectral method", *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 196, pp. 134-146, 2006.
- [10] Yoon K.Y., Park N.H., Choi Y.J., Kang Y.J., "Natural frequencies of thin-walled curved beams", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, pp. 1176-1186, 2006.
- [11] Lin H.Y., "On the natural frequencies and mode shapes of a multi-span Timoshenko beam carrying a number of various concentrated elements", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 593-605, 2009.
- [12] Ding H., Chen L.Q., "Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 3484-3494, 2010.
- [13] Su Y., Ma C., "Transient wave analysis of a cantilever Timoshenko beam subjected to impact loading by Laplace transform and normal mode methods", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 49, pp. 1158-1176, 2012.
- [14] Kapania RK, Raciti S (1989) Recent advances in analysis of laminated beams and plates. Part I - Shear effects and buckling. *AIAA J* 27(7): 923-935.
- [15] Sankar BV (2001) An elasticity solution for functionally graded beams. *Compos Sci Tech* 61(5): 689-696.
- [16] Sankar BV, Tzeng JT (2002) Thermal Stresses in Functionally Graded Beams. *AIAA J* 40(6): 1228- 1232.

[17] Chakraborty A, Gopalakrishnan S, Reddy J N (2003) A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *Int J Mech Sci* 45(3): 519-539.

[18] Kiani Y, Eslami MR (2010) Thermal buckling analysis of functionally graded material beams. *Int J Mech Materi Design* 6(3): 229-238.

[19] Xu Y, Zhou D (2012) Two-dimensional thermoelastic analysis of beams with variable thickness subjected to thermo-mechanical loads. *Appl Math Modelling* 36(12): 5818-5829.

[20] Nguyen TK, Vo TP, Thai HT (2013) Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Compos B: Eng* 55 147-157.

[30] Mohammadimehr. M, Bazrlar.M, Determination of transverse elastic coefficient of reinforced composites with shape memory polymer-based carbon nanotube on, temperature parameter and mass density parameter, fraction volume n 12th Conference of Iranian of Aerospace Society, Amirkabir University of Technology(2013).

[31] Q.-s.Yang,X.-q.He, X.Liu, F.-f.Leng,Y.-W.Mai,The effective properties, *Composites Part B:Engineering*,43(1) (2012) 33-38.