



## آنالیز ترموالاستیک ارتعاشی کوپل برای یک تیر اویلر-برنولی

محسن جباری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد تهران جنوب، تهران، ایران

علی علانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، تهران، ایران

حسین دهبانی

مرکز آموزش علمی کاربردی شرکت تولیدی قند کرج، البرز، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰-۳-۲۷ تاریخ دریافت: ۱۴۰۰-۲-۱۸

**چکیده:** در این مقاله حل تحلیلی ارتعاشات ترموالاستیک کوپل برای تیر اویلر-برنولی مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور معادله حاکم بر ارتعاش تیر در جابجایی عرضی با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی برای ماده همگن و هموزن استخراج شده است. در ادامه معادله دینامیکی تیر به صورت تحلیلی و با استفاده از بسط فوریه سینوسی حل شده است. در پایان مثالهای عددی با اعمال شرایط مرزی مختلف به شکل شوکهای مکانیکی و حرارتی بصورت تابع دیراک به تیر وارد شده و منحنیهای دو بعدی جابجایی عرضی و گشتاور حرارتی بر حسب طول تیر و برای زمانهای مختلف ترسیم شده است. پیشانی موج که مشخصه مسائل کوپله هستند در گرافها مشاهده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** تیر اویلر-برنولی، ارتعاش ترموالاستیک کوپل، حل تحلیلی

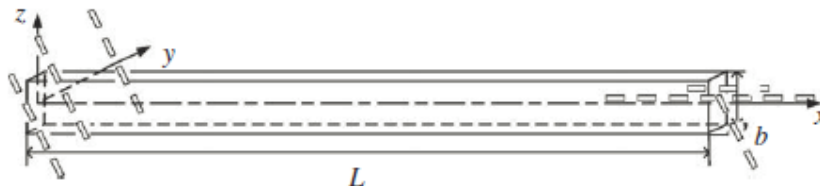
### ۱. مقدمه

تنشهای حرارتی و مسائل ارتعاشاتی ناشی از حرارت در تیرها، صفحات، پوسته‌ها و سازه‌های سه بعدی به‌عنوان مسائل کلاسیک و پرکاربرد همواره مورد توجه قرار گرفته‌اند. همچنین تحلیل ارتعاشات ترموالاستیک در حالت کوپله، به دلیل اثرات نامطلوب کوپله که بر روی تیرها به وجود آمده و باعث مستهلک شدن زود هنگام آنها می‌گردد، حائز اهمیت می‌باشد. در سالهای اخیر تحقیقات قابل توجهی بر روی این موضوع صورت گرفته است که از جمله این پژوهش‌ها می‌توان به مقالات زیر اشاره کرد: اسلامی و واحدی [1] در سال ۱۹۸۸ روش اجزا محدود گالرکین را برای مسائل دو بعدی و سه بعدی تیر ترموالاستیسیته کوپل پیشنهاد کردند. اندرسون و همکاران [2] در سال ۲۰۰۱ برای به دست آوردن حل عددی ارتعاشات تیر نامحدود اویلر-برنولی که بر روی بستر خطی الاستیک کلون-ویت قرار داشته و تحت تأثیر بار متحرک یکنواخت بود از روش المان محدود استفاده کردند. ژائو و همکارانش [3] در سال ۲۰۰۹ ارتعاشات ترموالاستیسیته کوپله برای یک تیر متحرک بر اساس تیر اویلر-برنولی را با استفاده از روش تفاضلات مربعی مورد بررسی قرار دادند. انصاری و همکارانش [4] در سال ۲۰۱۱ یک مدل تیر اویلر-برنولی روی بستر غیر خطی ویسکوالاستیک را تحت بار متحرک با استفاده از روش اجزا محدود گالرکین مورد مطالعه

قرار دادند. جباری و همکاران [5] در سال ۲۰۱۱ از یک روش کاملا تحلیلی برای حل معادلات ترموالاستیسیته کوپل در یک سیلندر تو خالی استفاده کردند. در این روش شرایط مرزی مکانیکی و حرارتی، نیروی حجمی، منبع گرما و ... در عمومی ترین حالت در نظر گرفته شده است. آنها از تابع دلتا دیراک به عنوان شوک های حرارتی و مکانیکی بر روی سطح خارجی استوانه برای بررسی رفتار جابجایی و حرارت کوپل استفاده کردند. ژائو و هانگ [6] در سال ۲۰۱۸ اثرات دما بر روی تیر اویلر-برنولی را با شرایط مرزی متقارن و غیر متقارن بررسی کردند. آنها با استفاده از اصل همپلتون، معادلات دیفرانسیل جزئی توسعه یافته ای را با در نظر گرفتن بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه کردند و حرکت صفحه ای را با استفاده از روش گالرکین به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کردند. سپس حل تخمینی را با استفاده از روش لیندستد-پوانکاره و روش مولتی اسکیل برای ارتعاشات آزاد و اجباری غیر خطی بدست آوردند. بندرای و شارما [7] در سال ۲۰۲۰ تنش نرمال، تنش برشی و خیز تیر را برای مواد مدرج تابعی، تحت بارگذاری و دمای های مختلف با استفاده از نرم افزار انسیس مورد بررسی قرار دادند. هدف از انجام تحقیق حاضر بیان ارتعاش ترموالاستیک در یک تیر اویلر-برنولی در شرایط کوپله است که در آن با استخراج روابط کوپله یک بعدی در مختصات کارتزین برای یک تیر مستطیلی با استفاده از سری فوریه سینوسی و اعمال شرایط مرزی مختلف به شکل شوکهای مکانیکی و حرارتی بصورت تابع دیراک، جابجایی  $w=w(x,t)$  در جهت محور  $Z$  و گشتاور حرارتی  $M_T$  بدست آمده و ترسیم شده اند. در فصل اول چکیده و مروری مختصر از مقالات منتشر شده در زمینه تئوری ترموالاستیسیته کوپل ذکر گردیده است. در فصل دوم معادله ترموالاستیسیته کوپل تیر اویلر-برنولی استخراج شده است. در فصل سوم معادلات ناویر با استفاده از سریهای فوری سینوسی حل شده است و در فصل چهارم نتایج عددی به شکل گراف ترسیم و مورد بحث قرار گرفته است.

## ۲. استخراج روابط اولیه و معادلات ترموالاستیسیته کوپل حاکم در تیر اویلر-برنولی

یک تیر الاستیک یک سر گیردار همانند شکل زیر با طول  $L$ ، عرض  $b$  و ضخامت  $h$  به ترتیب در جهت های  $x$ ،  $y$  و  $z$  در نظر گرفته شده است



شکل (۱-۲) تیر اویلر-برنولی در میدان دمایی

همچنین دانسیته تیر  $\rho$  و مدول الاستیسیته آن  $E$  در نظر گرفته می شود. گشتاور خمشی سطح مقطع به شکل زیر تعریف می شود [3]

$$M = -\int_{-h/2}^{h/2} b \sigma_x z dz = bE \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z^2 dz + bE \alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T z dz = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_T \quad (1)$$

در رابطه فوق  $I = \frac{1}{12} bh^3$  ممان اینرسی سطح مقطع و  $M_T = bE \alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T z dz$  گشتاور حرارتی می باشد. معادله تعادل تیر برابر است با

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

در رابطه فوق  $A = bh$  برابر با مساحت سطح مقطع می باشد. با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲) خواهیم داشت

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

معادله انتقال حرارت هدایتی به همراه کوپل ترموالاستیک برابر است با [3]

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{E \alpha_T T_0}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial t} \left( -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (4)$$

که در روابط فوق  $a = \frac{k}{\rho c_v}$  ضریب نفوذ حرارتی،  $k$  ضریب هدایت حرارتی و  $c_v$  گرمای ویژه در حجم ثابت است.

فرض می‌کنیم که بین سطح بالایی و پایینی تیر با محیط اطراف تبدیل حرارتی وجود داشته باشد. این شرایط مرزی را به شکل همرفتی در نظر میگیریم. شرایط مرز حرارتی در سطح بالا و پایین تیر به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=h/2} &= H [T_e - (T)_{h/2}] \\ \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=-h/2} &= -H [T_e - (T)_{-h/2}] \end{aligned} \quad (5)$$

در رابطه بالا  $T_e$  تغییرات دمای محیط بوده و برابر با صفر در نظر گرفته میشود. همچنین  $(T)_{z=h/2}$  و  $(T)_{z=-h/2}$  به ترتیب تغییرات دما روی سطح بالایی و پایینی تیر می‌باشد.  $H$  ضریب تغییرات گرما بر اثر همرفتی می‌باشد. دمای سایر سطوح ثابت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=h/2} &= -\frac{H}{k} (T)_{h/2} \\ \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=-h/2} &= \frac{H}{k} (T)_{-h/2} \end{aligned} \quad (6)$$

فرض می‌شود که تغییرات دما به صورت خطی بوده و در جهت محور  $Z$  باشد داریم

$$T = \frac{[(T)_{-h/2} + (T)_{h/2}]}{2} + \frac{[(T)_{h/2} - (T)_{-h/2}]}{h} z \quad (7)$$

با جایگذاری معادله (۷) در معادله (۱) خواهیم داشت

$$M_T = bE\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T z dz = \frac{E\alpha_T b h^2}{12} [(T)_{h/2} - (T)_{-h/2}] \quad (8)$$

با ضرب عبارت  $bE\alpha_T z$  در معادله (۴) و انتگرال گیری نسبت به متغیر  $Z$  از  $-\frac{h}{2}$  تا  $\frac{h}{2}$  خواهیم داشت

$$bE\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial T}{\partial t} z dz - abE\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} z dz - abE\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} z dz - \frac{E^2 \alpha_T^2 T_0}{\rho c_v} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} dz = 0 \quad (9)$$

با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۹) داریم

$$\frac{\partial M_T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} - abE\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} z dz - \frac{E^2 \alpha_T^2 T_0 I}{\rho c_v} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (10)$$

با در نظر گرفتن روابط (۶) و (۷) و عبارت  $abE\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} z dz$  در رابطه (۱۰) داریم

$$abE\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} z dz = abE\alpha_T \left[ \left( z \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} - (T)_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right] = abE\alpha_T \left( \frac{Hh}{2k} + 1 \right) \left[ (T)_{-\frac{h}{2}} - (T)_{\frac{h}{2}} \right] = -\frac{12a}{h^2} \left( \frac{Hh}{2k} + 1 \right) M_T \quad (11)$$

با جایگذاری روابط (۱۱) در رابطه (۱۰)، معادله انتقال حرارتی هدایتی کوپله برای تیر به شکل زیر محاسبه می شود

$$\frac{\partial M_T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{12a}{h^2} \left( \frac{Hh}{2k} + 1 \right) M_T - \frac{E^2 \alpha_T^2 T_0 I}{\rho c_v} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (12)$$

### ۳. حل معادلات ترموالاستیسیته کوپل تیر یک بعدی:

معادلات ترموالاستیسیته کوپل حاکم در تیر اویلر-برنولی بر اساس معادلات (۳) و (۱۲) برابر است با

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_T}{\partial t} - a \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + \frac{12a}{h^2} \left( \frac{Hh}{2k} + 1 \right) M_T - \frac{E^2 \alpha_T^2 T_0 I}{\rho c_v} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

جهت سادگی در محاسبات، پارمترهای زیر به شکل زیر تعریف می شود

$$A_1 = EI, A_2 = \rho A, A_3 = a, A_4 = \frac{12a}{h^2} \left( \frac{Hh}{2k} + 1 \right), A_5 = \frac{E^2 \alpha_T^2 T_0 I}{\rho c_v} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) در روابط (۱۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_T}{\partial t} - A_3 \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + A_4 M_T - A_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

### ۳-۱ یافتن پاسخ عمومی معادلات تیر یک بعدی ترموالاستیسیته کوپل

به منظور حل عمومی معادلات (۱۵) جوابهای به شکل زیر در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ M_T(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \end{aligned} \quad (16)$$

با مشتق گیری از روابط (۱۶) بر اساس مشتقات مورد نیاز در رابطه (۱۵) داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} &= \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t} &= -\lambda \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ \frac{\partial^2 M_T(x,t)}{\partial x^2} &= -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x\end{aligned}\quad (17)$$

با جایگذاری روابط (۱۶) و (۱۷) در روابط (۱۵) داریم

$$\begin{cases} A_1 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\} + \left\{ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\} + A_2 \left\{ \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\} = 0 \\ \lambda \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x - A_3 \left\{ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\} + A_4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\} - A_5 \left\{ -\lambda \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \right\} + \left\{ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \right\} + A_2 \left\{ \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \right\} = 0 \\ \lambda \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} - A_3 \left\{ -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \right\} + A_4 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C e^{\lambda t} \right\} - A_5 \left\{ -\lambda \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} B e^{\lambda t} \right\} = 0 \end{cases}\quad (18)$$

با ساده سازی روابط (۱۸) داریم

$$\begin{cases} \left( A_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + A_2 \lambda^2 \right) B - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C = 0 \\ A_5 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \lambda B + \left( \lambda + A_4 + A_3 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right) C = 0 \end{cases}\quad (19)$$

معادلات (۱۹) به شکل زیر و به صورت ماتریسی نوشته می شوند

$$\begin{bmatrix} \left( A_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + A_2 \lambda^2 \right) & -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \\ A_5 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \lambda & \left( \lambda + A_4 + A_3 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ C \end{Bmatrix} = 0\quad (20)$$

همچنین با قراردادن دترمینان ضرایب رابطه (۲۰) برابر صفر، سه ریشه  $\lambda = \lambda_i$  ( $n \neq 0$ )  $i = 1, 2, 3$  بدست می آیند.

جواب عمومی برابر است با

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 B_{ni} e^{\lambda_{ni}} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$M_T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 N_{ni} B_{ni} e^{\lambda_{ni}} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (21)$$

در رابطه فوق  $N_{ni}$  بیانگر رابطه میان  $C_{ni}$  و  $B_{ni}$  بوده و از رابطه زیر بدست می آید

$$N_{ni} = \frac{A_1 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 + A_2 \lambda_{ni}}{\left( \frac{n\pi}{L} \right)^2} \quad (22)$$

### ۲-۳- یافتن پاسخ خصوصی معادلات بعدی ترموالاستیسیته کوپل تیر اویلر- برنولی

در صورتیکه تحریک خارجی بر روی تیر و یا در لبه های آن باشد، معادلات حرکت و شرایط مرزی آن به صورت غیر همگن زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F_1(x,t) \\ \frac{\partial M_T}{\partial t} - A_3 \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + A_4 M_T - A_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = F_2(x,t) \end{cases} \quad (23)$$

در حل خصوصی شرایط اولیه تیر برابر صفر در نظر گرفته می شود. همچنین شرایط مرزی جهت حل دستگاه فوق به شکل تعریف می شود

$$\begin{cases} w(0,t) = P_1(t) \\ w_{xx}(0,t) = P_2(t) \\ w(L,t) = P_3(t) \\ w_{xx}(L,t) = P_4(t) \\ M_T(0,t) = P_5(t) \\ M_T(L,t) = P_6(t) \end{cases} \quad (24)$$

برای حل معادلات (۲۳)، یک تبدیل فوریه سینوسی به شکل زیر تعریف می شود:

$$\bar{w}(t) = \frac{2}{L} \int_0^L w(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\bar{M}_T(t) = \frac{2}{L} \int_0^L M_T(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (25)$$

برای تبدیل فوریه سینوسی گرفتن از روابط (۲۳)، می بایست از روابط زیر استفاده شود

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{L} \int_0^L f''(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx &= \frac{2n\pi}{L^2} [(-1)^{n+1} f(L) - f(0)] - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\ \frac{2}{L} \int_0^L f^{(4)}(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx &= -\frac{2n\pi}{L^2} [(-1)^n f''(L) - f''(0)] + 2\frac{n^3\pi^3}{L^4} [(-1)^n f(L) - f(0)] \\ &+ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \end{aligned} \right. \quad (26)$$

همچنین با تبدیل فوریه سینوسی گرفتن از روابط (۲۵) و مشتقات آنها خواهیم داشت

$$\begin{aligned} F_s\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{d^2}{dt^2} \frac{2}{L} \int_0^L w(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \ddot{w}(t) \\ F_s\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right) &= -\frac{2n\pi}{L^2} [(-1)^n P_4(t) - P_2(t)] + 2\frac{n^3\pi^3}{L^4} [(-1)^n P_3(t) - P_1(t)] + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \bar{w}(t) \\ F_s\left(\frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2}\right) &= \frac{2n\pi}{L^2} [(-1)^{n+1} P_6(t) - P_5(t)] - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \bar{M}_T(t) \end{aligned} \quad (27)$$

با جایگذاری روابط (۲۵) و (۲۷) در معادله (۲۳) داریم:

$$\left\{ \begin{aligned} &A_1 \left\{ -\frac{2n\pi}{L^2} [(-1)^n P_4(t) - P_2(t)] + 2\frac{n^3\pi^3}{L^4} [(-1)^n P_3(t) - P_1(t)] + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \bar{w}(t) \right\} \\ &+ \left\{ \frac{2n\pi}{L^2} [(-1)^{n+1} P_6(t) - P_5(t)] - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \bar{M}_T(t) \right\} + A_2 \ddot{w}(t) = \frac{2}{L} \int_0^L F_1(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \\ &\left\{ \frac{\partial M_T}{\partial t} - A_3 \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} + A_4 M_T - A_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = F_2(x,t) \right. \\ &\left. F_s \left\{ \frac{\partial M_T}{\partial t} \right\} - A_3 F_s \left\{ \frac{\partial^2 M_T}{\partial x^2} \right\} + A_4 \{M_T\} - A_5 F_s \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right\} = F_s \{F_2(x,t)\} \right. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

با ساده سازی روابط (۲۸) خواهیم داشت

$$\left\{ \begin{aligned} &A_2 \ddot{w}(t) + A_1 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \bar{w}(t) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \bar{M}_T(t) = g_1(t) \\ &A_5 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \dot{\bar{w}}(t) + \dot{\bar{M}}_T(t) + \left[ A_3 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + A_4 \right] \bar{M}_T = g_2(t) \end{aligned} \right. \quad (29)$$

در روابط فوق  $g_1(t)$  و  $g_2(t)$  برابر است با:

$$\begin{aligned}
 g_1(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L F_1(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x dx - 2 \frac{n^3 \pi^3}{L^4} A_1 [(-1)^n P_3(t) - P_1(t)] + \frac{2n\pi}{L^2} A_1 [(-1)^n P_4(t) - P_2(t)] \\
 &\quad - \frac{2n\pi}{L^2} [(-1)^{n+1} P_6(t) - P_5(t)] \\
 g_2(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L F_2(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x dx + \frac{2n\pi}{L^2} A_5 [(-1)^{n+1} P_1(t) - P_3(t)] + \frac{2n\pi}{L^2} A_3 [(-1)^{n+1} P_6(t) - P_5(t)]
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

تبدیل لاپلاس  $\bar{w}(t)$  و  $\bar{M}_T(t)$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} \tilde{w}(s) = L[\bar{w}(t)] \\ \tilde{M}_T(s) = L[\bar{M}_T] \end{cases} \tag{31}$$

با لاپلاس گیری از روابط (۲۹) با فرض شرایط اولیه صفر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \left[ A_2 S^2 + A_1 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] \tilde{w}(s) - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \tilde{M}_T(s) = \tilde{g}_1(s) \\ A_5 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 S \tilde{w}(s) + \left[ S + A_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + A_4 \right] \tilde{M}_T(s) = g_2(s) \end{cases} \tag{32}$$

که در روابط فوق  $\tilde{g}_1(s)$  و  $\tilde{g}_2(s)$  تبدیل لاپلاسهای  $g_1(t)$  و  $g_2(t)$  می باشند.

با نوشتن معادله (۳۲) به صورت ماتریس خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{w}(s) \\ \tilde{M}_T(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{g}_1(s) \\ \tilde{g}_2(s) \end{Bmatrix} \tag{33}$$

که مقادیر  $C_1$ ،  $C_2$ ،  $C_3$  و  $C_4$  در روابط (۳۳) به شکل زیر تعریف می شوند

$$C_1 = A_2 S^2 + A_1 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4, C_2 = - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, C_3 = A_5 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 S, C_4 = S + A_4 + A_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \tag{34}$$

با حل دستگاه معادلات جبری (۳۳) به روش کرامر خواهیم داشت

$$\tilde{w}(s) = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}_1(s) & C_2 \\ \tilde{g}_2(s) & C_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix}} = \frac{C_4 \tilde{g}_1(s) - C_2 \tilde{g}_2(s)}{C_1 C_4 - C_2 C_3}, \tilde{M}_T(s) = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & \tilde{g}_1(s) \\ C_3 & \tilde{g}_2(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{vmatrix}} = \frac{C_1 \tilde{g}_2(s) - C_3 \tilde{g}_1(s)}{C_1 C_4 - C_2 C_3} \tag{35}$$

از روابط (۳۵) تبدیل لاپلاس معکوس گرفته می شود تا مقادیر  $\bar{w}(t)$  و  $\bar{M}_T(t)$  بدست آمده و با تبدیل فوریه سینوسی معکوس  $w(x,t)$  و  $M_T(x,t)$  به صورت زیر بدست می آیند:



$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$M_T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{M}_T(x,t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (36)$$

#### ۴- نتایج عددی

پارامترهای انتخاب شده جهت ترسیم گرافها مطابق جدول زیر می باشد:

Parameters	Numerical	Parameters	Numerical
L	1m	$T_0$	293 °K
h	0.1 m	$\alpha$	$1 \cdot 7.710 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ K}$
b	0.1m	$\rho$	$7970 \frac{Kg}{m^3}$
E	$380 \cdot 10^9 Pa$	k	$19.5 \frac{w}{m^\circ K}$
$C_v$	$561 \frac{J}{Kg^\circ K}$	H	$10 \frac{w}{m^2^\circ K}$

جدول ۴-۱: پارامترهای مورد استفاده در بررسی نتایج عددی

#### ۴-۱ مقایسه فرکانسهای طبیعی تیر ترموالاستیسیته کوپله با تیر اویلر برنولی

در این قسمت مقادیر فرکانسهای طبیعی در تئوری ترموالاستیسیته کوپل  $\left( \omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4 / A}} \right)$  با فرکانسهای

تیر اویلر- برنولی (قسمت موهومی ریشه های مختلف معادله مشخصه رابطه (۲۰) در جداول زیر به ازای  $n=0,1,2,\dots,10$

و در دماهای مختلف بر حسب کلویین و به ازای ضریب تغییرات گرما بر اثر همرفتی  $H=10 \frac{w}{m^2^\circ K}$  نشان داده شده است.

$$T_0=293^\circ K$$

	Natural frequency Coupled thermoelectricity	Natural frequency Euler-Bernoulli beam	Percentage difference
n=1	1975	1967.3	0.390
n=2	7899.9	7869.2	0.389
n=3	17775	17706	0.388
n=4	31599	31477	0.386
n=5	49374	49183	0.387
n=6	71099	70823	0.388
n=7	96773	96398	0.388

n=8	126400	125910	0.388
n=9	159970	159350	0.388
n=10	197500	196730	0.390

جدول 2-4: مقایسه فرکانسهای طبیعی ترموالاستیسیته کوپله و تیر اویلر برنولی در دمای  $293^{\circ}\text{K}$

$T_0=300^{\circ}\text{K}$

	Natural frequency Coupled thermoelectricity	Natural frequency Euler-Bernoulli beam	Percentage difference
n=1	1975	1975.1	-0.005
n=2	7899.9	7900.6	-0.009
n=3	17775	17776	-0.006
n=4	31599	31602	-0.009
n=5	49374	49379	-0.010
n=6	71099	71105	-0.008
n=7	96773	96782	-0.009
n=8	126400	126410	-0.008
n=9	159970	159990	-0.013
n=10	197500	197510	-0.005

جدول 3-4: مقایسه فرکانسهای طبیعی ترموالاستیسیته کوپله و تیر اویلر برنولی در دمای  $300^{\circ}\text{K}$

$T_0=350^{\circ}\text{K}$

	Natural frequency Coupled thermoelectricity	Natural frequency Euler-Bernoulli beam	Percentage difference
n=1	1975	1976.5	-0.076
n=2	7899.9	7905.8	-0.075
n=3	17775	17788	-0.073
n=4	31599	31623	-0.076
n=5	49374	49411	-0.075
n=6	71099	71152	-0.075
n=7	96773	96846	-0.075
n=8	126400	126490	-0.071
n=9	159970	160090	-0.075
n=10	197500	197650	-0.076

جدول 4-4: مقایسه فرکانسهای طبیعی ترموالاستیسیته کوپله و تیر اویلر برنولی در دمای  $350^{\circ}\text{K}$

جدول ۴-۵: مقایسه فرکانسهای طبیعی ترموالاستیسیته کوپله و تیر اویلر برنولی در دمای  $400^{\circ}\text{K}$

#### ۴-۲- شرایط مرزی مثال اول

فرض می شود که شرایط مرزی برای مثال اول مطابق جدول زیر باشد.

$w(0,t) = P_1(t), P_1(t) = 10^{-8} w_0 \delta(t)$	$w_{xx}(L,t) = P_4(t), P_4(t) = 0$
$w_{xx}(0,t) = P_2(t), P_2(t) = 0,$	$M_T(0,t) = P_5(t), P_5(t) = 0$
$w(L,t) = P_3(t), P_3(t) = 0$	$M_T(L,t) = P_6(t), P_6(t) = 0$

جدول ۴-۶: شرایط مرزی در نظر گرفته شده در مثال اول

اثر تابع دلتا دیراک را در ترمهای  $w(x,t)$  جابجایی در جهت محور  $Z$  و  $M_T$  گشتاور حررتی ترسیم نماییم .

در کلیه مثالها، مقادیر جابجایی و گشتاور حررتی برای سه زمان  $t_1 = 5 \times 10^{-8}, t_2 = 3.5 \times 10^{-7}, t_3 = 9.6 \times 10^{-7}$  رسم

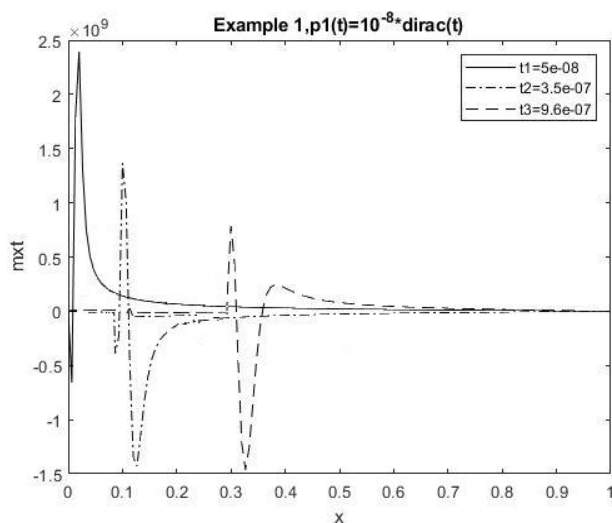
$T_0 = 400^{\circ}\text{K}$

	Natural frequency Coupled thermoelectricity	Natural frequency Euler-Bernoulli beam	Percentage difference
n=1	1975	1977.8	-0.142
n=2	7899.9	7911	-0.141
n=3	17775	17800	-0.141
n=4	31599	31644	-0.142
n=5	49374	49444	-0.142
n=6	71099	71199	-0.141
n=7	96773	96910	-0.142
n=8	126400	126580	-0.142
n=9	159970	160200	-0.144
n=10	197500	197780	-0.142

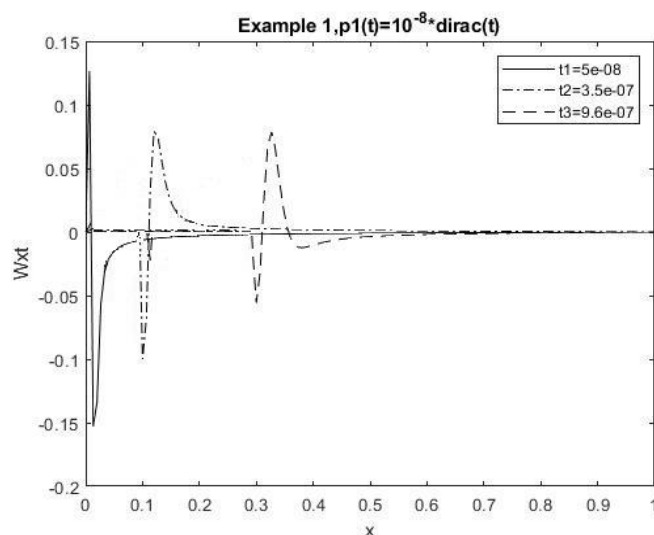
شده اند . همچنین حرکت پیشانی موج برای جابجایی و گشتاور حررتی در جهت طول تیر و برای زمانهای مختلف نشان

داده شده است. همگرایی در این مسئله با در نظر گرفتن 300 جمله در بسط سری فوریه سینوسی حاصل شده است . با

جملات بیشتر خطاهای گرد کردن و کوتاه کردن بیشتر شده و بر کیفیت نمودارها تأثیر می گذارند.



شکل ۴-۱) نمودار گشتاور حرارتی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال اول)



شکل ۴-۲) نمودار جابجایی عرضی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال اول)

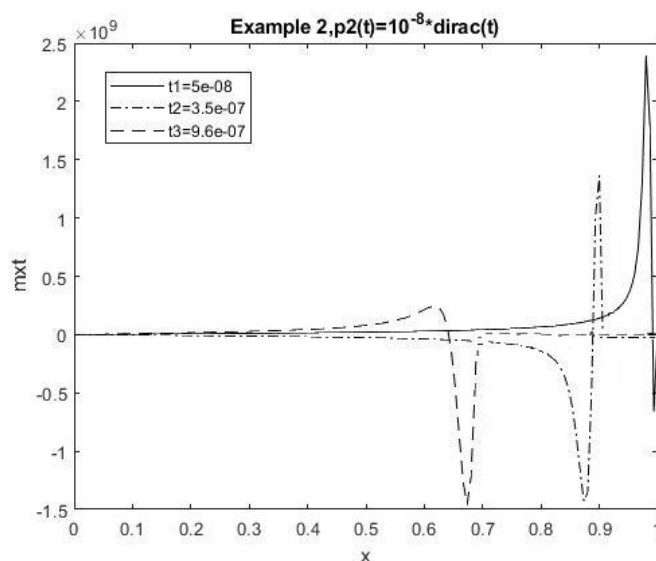
### ۴-۳ شرایط مرزی مثال دوم

فرض کنیم شرایط مرزی برای مثال دوم مطابق جدول زیر باشد:

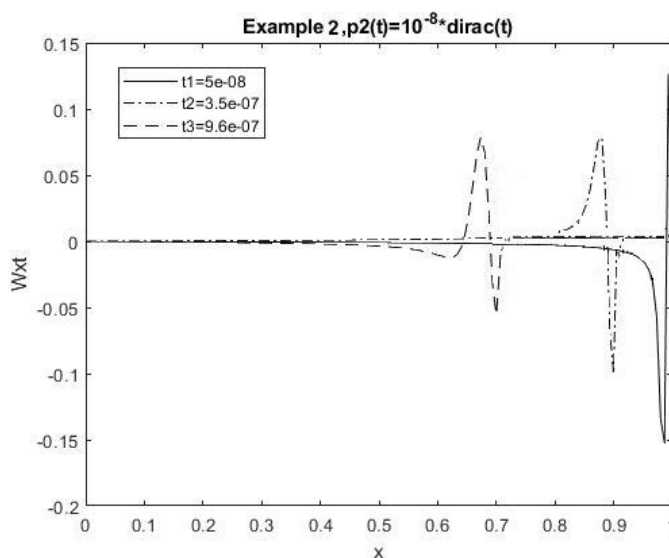
$w(0,t) = P_1(t), P_1(t) = 0$	$w_{xx}(L,t) = P_4(t), P_4(t) = 0$
$w_{xx}(0,t) = P_2(t), P_2(t) = 10^{-8} w_0 \delta(t)$	$M_T(0,t) = P_5(t), P_5(t) = 0$
$w(L,t) = P_3(t), P_3(t) = 0$	$M_T(L,t) = P_6(t), P_6(t) = 0$

جدول ۴-۷: شرایط مرزی در نظر گرفته شده در مثال اول

می خواهیم اثر تابع دلتا دیراک را در ترم  $w_{xx}(0,t)$  جابجایی و در جهت محور  $Z$  و گشتاور حرارتی  $M_T$  ترسیم نماییم. داریم:



شکل ۳-۴) نمودار گشتاور حرارتی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال دوم)



شکل ۴-۴) نمودار جابجایی عرضی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال دوم)

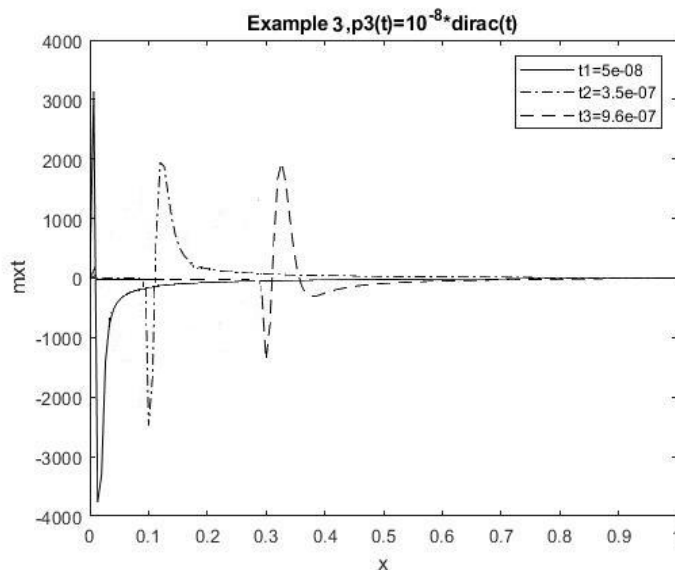
#### ۴-۴ شرایط مرزی مثال سوم

فرض کنیم شرایط مرزی برای مثال سوم مطابق جدول زیر باشد:

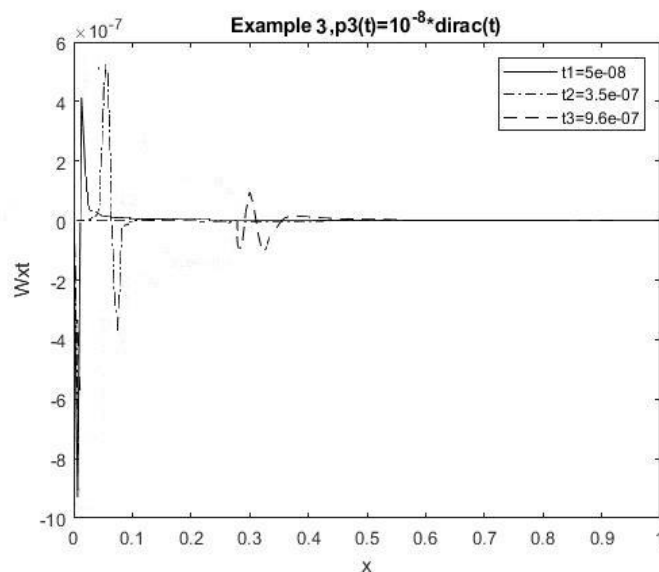
$w(0,t) = P_1(t), P_1(t) = 0$	$w_{xx}(L,t) = P_4(t), P_4(t) = 0$
$w_{xx}(0,t) = P_2(t), P_2(t) = 0,$	$M_T(0,t) = P_5(t), P_5(t) = 0$
$w(L,t) = P_3(t), P_3(t) = 10^{-8} w_0 \delta(t)$	$M_T(L,t) = P_6(t), P_6(t) = 0$

جدول ۴-۸: شرایط مرزی در نظر گرفته شده در مثال سوم

می خواهیم اثر تابع دلتا دیراک را در ترم  $w(L,t)$  جابجایی و در جهت محور  $Z$  و گشتاور حررتی  $M_T$  ترسیم نماییم. داریم:



شکل ۴-۵) نمودار گشتاور حرارتی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال سوم)



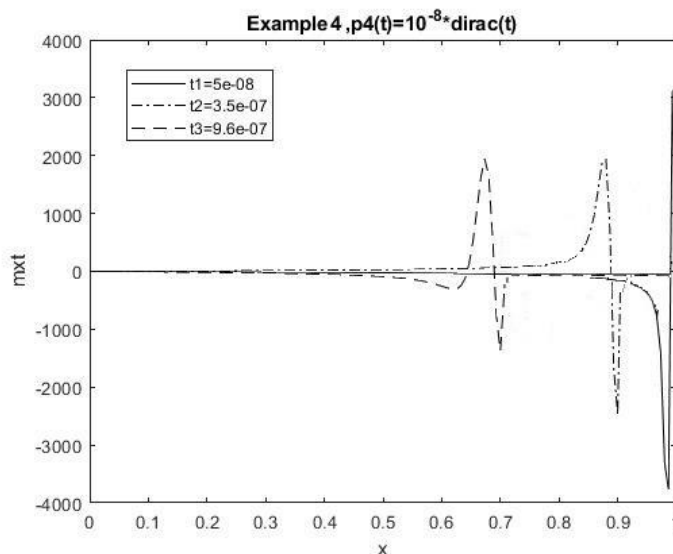
شکل ۴-۶) نمودار جابجایی عرضی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال سوم)

#### ۴-۵ شرایط مرزی مثال چهارم

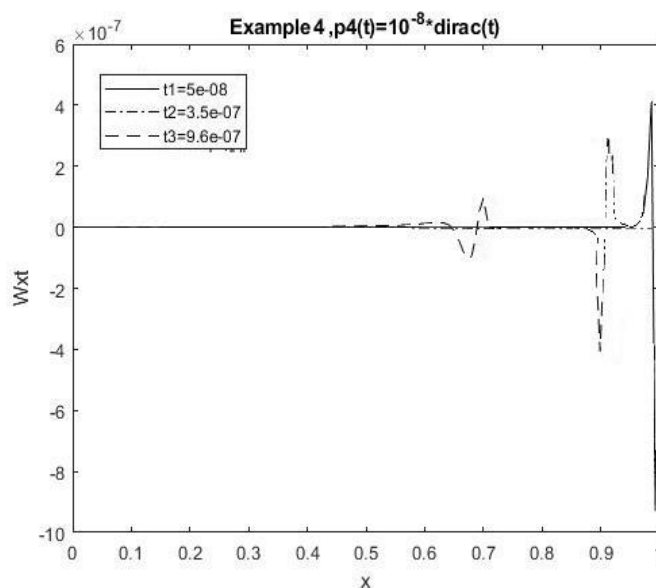
فرض کنیم شرایط مرزی برای مثال چهارم مطابق جدول زیر باشد:

$w(0,t) = P_1(t), P_1(t) = 0$	$w_{xx}(L,t) = P_4(t), P_4(t) = 10^{-8} w_0 \delta(t)$
$w_{xx}(0,t) = P_2(t), P_2(t) = 0$	$M_T(0,t) = P_5(t), P_5(t) = 0$
$w(L,t) = P_3(t), P_3(t) = 0$	$M_T(L,t) = P_6(t), P_6(t) = 0$

جدول ۴-۹: شرایط مرزی در نظر گرفته شده در مثال چهارم  
 می خواهیم اثر تابع دلتا دیراک را در ترم  $w_{xx}(L,t)$  جابجایی و در جهت محور Z و گشتاور حررتی  $M_T$  ترسیم نماییم. داریم:



شکل ۴-۷) نمودار گشتاور حررتی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال چهارم)



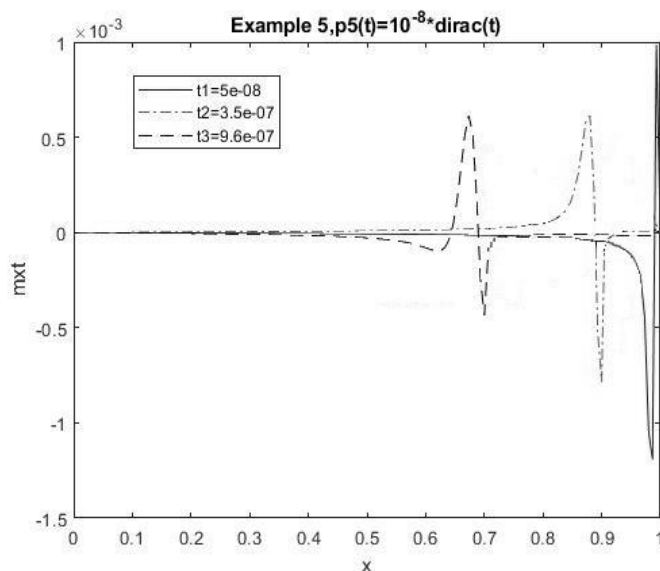
شکل ۴-۸) نمودار جابجایی عرضی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال چهارم)

### ۴-۶ شرایط مرزی مثال پنجم

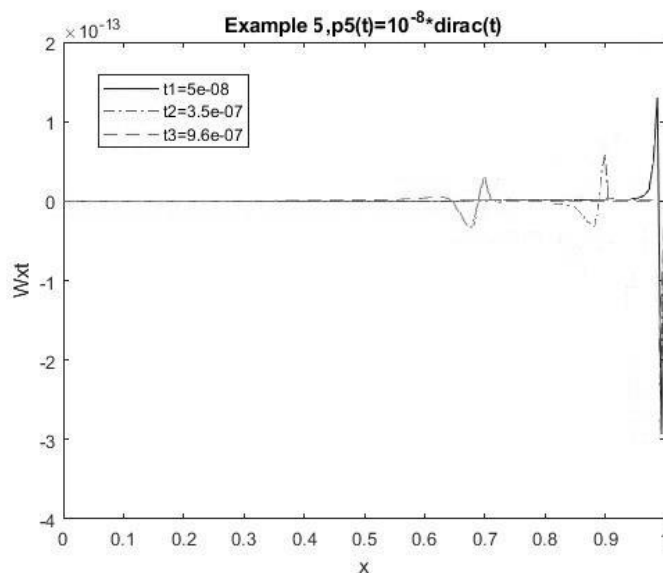
فرض کنیم شرایط مرزی برای مثال پنجم مطابق جدول زیر باشد

$w(0,t) = P_1(t), P_1(t) = 0$	$w_{xx}(L,t) = P_4(t), P_4(t) = 0$
$w_{xx}(0,t) = P_2(t), P_2(t) = 0,$	$M_T(0,t) = P_5(t), P_5(t) = 10^{-8} w_0 \delta(t)$
$w(L,t) = P_3(t), P_3(t) = 0$	$M_T(L,t) = P_6(t), P_6(t) = 0$

جدول ۴-۱۰: شرایط مرزی در نظر گرفته شده در مثال پنجم  
 می خواهیم اثر تابع دلتا دیراک را در ترم  $M_T(0,t)$  گشتاور حرارتی در جهت محور Z و گشتاور حرارتی  $M_T$  ترسیم نماییم.  
 داریم:



شکل ۴-۹) نمودار گشتاور حرارتی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال پنجم)



شکل ۴-۱۰) نمودار جابجایی عرضی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف (مثال پنجم)

#### ۴-۷ شرایط مرزی مثال ششم

فرض کنیم شرایط مرزی برای مثال ششم مطابق جدول زیر باشد

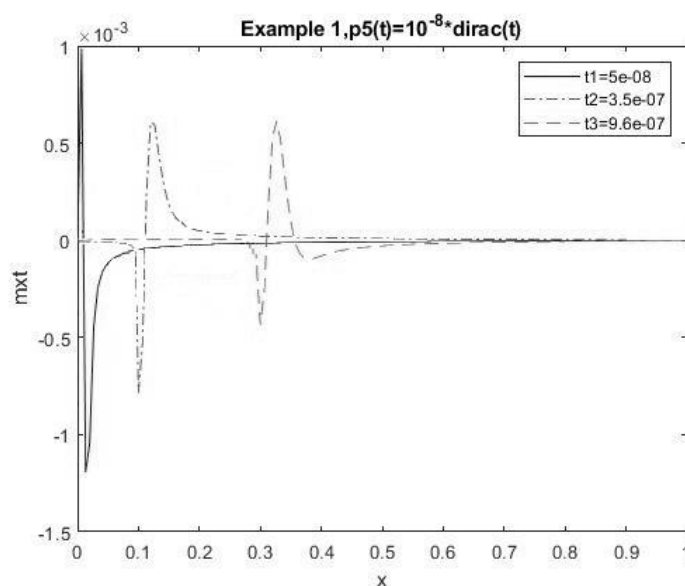


$w(0,t) = P_1(t), P_1(t) = 0$	$w_{xx}(L,t) = P_4(t), P_4(t) = 0$
$w_{xx}(0,t) = P_2(t), P_2(t) = 0,$	$M_T(0,t) = P_5(t), P_5(t) = 10^{-8} w_0 \delta(t)$
$w(L,t) = P_3(t), P_3(t) = 0$	$M_T(L,t) = P_6(t), P_6(t) = 0$

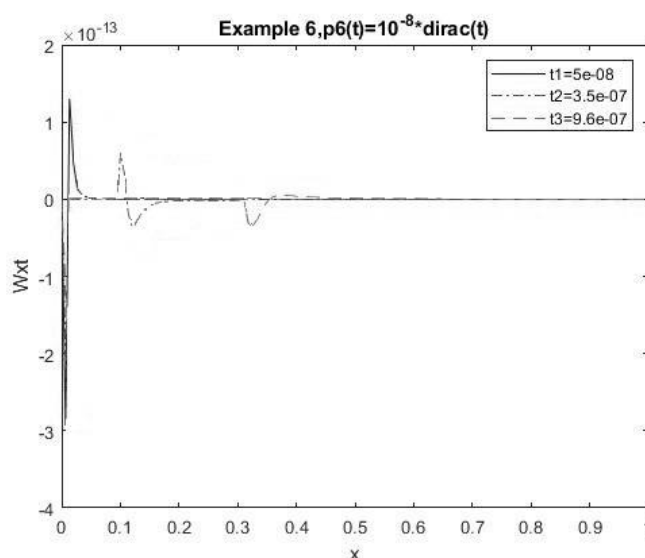
جدول ۴-۱۱: شرایط مرزی در نظر گرفته شده در مثال پنجم

می خواهیم اثر تابع دلتا دیراک را در ترم  $M_T(L,t)$  گشتاور حرارتی در جهت محور Z و گشتاور حرارتی  $M_T$  ترسیم نماییم.

داریم:



شکل ۴-۱۱) نمودار گشتاور حرارتی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف



شکل ۴-۱۲) نمودار جابجایی عرضی نسبت به طول تیر تحت تاثیر تابع دلتا دیراک در زمانهای مختلف

## ۵. نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاشات عرضی تیر که با میدان حرارت آن کوپل است مورد بررسی قرار گرفت. معادلات کوپل جابجایی و گشتاور حرارتی تشکیل یک سیستم معادلات دیفرانسیل مشتق جزئی می دهند. این معادلات بر خلاف روشهای رایج که با توابع پتانسیل حل میشوند در این مقاله بصورت مستقیم حل شدند و حل دقیق آنها با استفاده از سریهای فوریه و تبدیل لاپلاس بدست آمد. در مثالهای عددی شوکهای مکانیکی و حرارتی بصورت تابع دیراک به تیر اعمال گردید و پیشانی موج که مشخصه مسائل کوپله هستند در گرافها مشاهده گردید.

## ۶. مراجع

- 1- Eslami, M.R., Vahedi, H., 1988. "Coupled Thermoelasticity Beam Problems". AIAA J., 27: 662-665.
- 2- Andersen, L., Nielsen, S.R.K., Kirkegaard, P.H., 2001. "Finite element modelling of infinite Euler beams on Kelvin foundation exposed to moving loads in convected co-ordinates". Journal of Sound and Vibration, 241, pp. 587-604.
- 3 Guo, X.X., Wang, Z.H., Wang, Y., Zhou, Y.F., 2009. "Analysis of the coupled thermoelastic vibration for axially moving beam ". Journal of Sound and Vibration. 325 :597-608
- 4- Ansari, M., Esmailzadeh E., Younesian, D., 2011. "Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin-Voight foundation under moving loads", Journal of Sound and Vibration 330: 1455-1471.
- 5- Jabbari, M., Dehbani, H., Eslami, M.R., 2001, " An exact solution for classic coupled thermoelasticity in cylindrical coordinates", Journal of pressure vessel technology 133 (5).
- 6- Zhao, Y., Chaohui, H., , 2018, "Temperature Effects on Nonlinear Vibration Behaviors of Euler-Bernoulli Beams with Different Boundary Conditions", Hindawi, Shock and Vibration Volume, Article ID 9834629, 11 pages.
- 7- Bhandari, M., Sharma, N., 2020, "Thermomechanical Solutions for Functionally Graded Beam subject to various Boundary Conditions", International Journal of Emerging Trends in Engineering Research, 8(5).