



ارائه یک حل تحلیلی جهت بررسی رفتار ترموالاستیک سه بعدی پوسته استوانه ای مدرج تابعی تحت بارگذاری ترمومکانیکی نامتقارن با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

مریم لری دهرسراجی^۱ رضا کوهی فائق^۲ مصطفی امید بییدگلی^{۳*}

۱- دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشکده مکانیک دانشگاه کاشان

۲- کارشناس ارشد مکانیک، گروه صنعتی مینا (نصب نیرو)، تهران

۳- عضو هیات علمی و استادیار گروه مهندسی مکانیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد بادرود

Email: mostafaomidibidgoli@gmail.com

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰-۲-۲۷ تاریخ دریافت: ۱۴۰۰-۲-۱۸

چکیده: در دنیای امروز پوسته‌های استوانه‌ای کاربردهای زیادی دارند و در خیلی از موارد حساس باید در برابر فشار و دما مقاوم باشند و پایداری بالایی داشته باشند. از این رو در خیلی از کاربردهای نظامی و صنعتی آنها را از جنس مواد مدرج تابعی می‌سازند. در مقاله حاضر پس از بیان مقدماتی در خصوص مواد مدرج تابعی بیان شده و سپس کاربردهایی از پوسته‌های استوانه‌ای مذکور تشریح شده است. در ادامه پس از تعریف مساله با استفاده از معادلات بسط معادله انتقال حرارت سه بعدی حاکم بر مساله حل شده است. از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول جهت حل مساله کمک گرفته شده است. میدان جابجایی و روابط کرنش نوشته شده و در ادامه روابط مربوط به کار خارجی تشریح شده است. در نهایت پس از بیان روابط فرمول‌بندی حاکم بر پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی با توزیع توانی تحت بارهای ترمومکانیکی نامتقارن ارائه گردیده است. روابط و معادلات حاصله می‌توانند با دقت بالایی برای محققان و پژوهشگران مورد استفاده قرار گیرد.

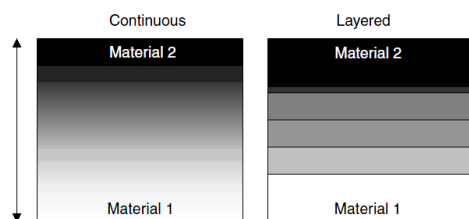
واژه‌های کلیدی: تحلیل سه بعدی ترموالاستیک، پوسته‌های استوانه‌ای، بارهای ترمومکانیکی نامتقارن، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول.

مقدمه

دانشمندان علم مواد همواره در پی یافتن مواد جدیدی بوده‌اند، که بتواند راهگشای مشکلات بشر باشد. کاربرد مواد جهت استفاده در محیط‌های مختلف و همچنین تحمل شرایط و خواص متفاوت نیز از جمله مواردی است که توجه پژوهشگران زیادی را به خود جلب نموده است. در گذشته صنایع مختلف از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش‌دهی و روکش نمودن قطعات تحت اثر دمای کاری بالا استفاده می‌کردند و این مواد عایق‌های بسیار خوبی نیز بودند، اما مقاومت زیادی در برابر تنش‌های وارده نداشتند.

بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده شد. می‌دانیم کامپوزیت‌های قدیمی مخلوط‌هایی همگن و در نتیجه دارای یک نوع سازش میان خواص مطلوب اجزای تشکیل دهنده بوده‌اند. ایده مواد مرکب در پایان دهه ۱۹۴۰ و آغاز دهه ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده متفاوت بوجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی نا سازگار نیز از خود بروز می‌دهند. ناهمگنی رفتار مواد کامپوزیتی، موجب ایجاد تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری مکانیکی و حرارتی شده و تنش‌های حرارتی در این مواد نیز موجب پدیده لایه لایه شدن می‌گردید. با توجه به این مشکلات، طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکل لایه لایه شدن را نداشته باشد ضرورت پیدا نمود. همچنین پاره‌ای از مواد در میدان درجه حرارت غیردائم تحت تاثیر گرادیان بالای درجه حرارت، ماهیت ترد پیدا کرده و در نهایت قابلیت تحمل گرادیان‌های بالای درجه حرارت را نداشتند که می‌توانست بحران‌زا باشد. از اینرو دانشمندان به فکر تولید مواد پیشرفته با خواص حرارتی بهتر که مواد مدرج تابعی نامگذاری گردید افتادند. اولین ارائه پیشنهاد و بیان مزیت مواد مدرج تابعی در سال ۱۹۷۲ توسط بور و دووز [۱] و شن و بور [۲] مطرح گردید. در ادامه فعالیت‌های انجام شده محققان ژاپنی در سال ۱۹۸۰ موادی را معرفی کردند که می‌توانست گرادیان بسیار بالای حرارتی را تحمل کرده و در عین حال خواص مکانیکی و حرارتی بسیار خوبی را داشته باشد. دانشمندان علم مواد دانشگاه سندای^۱ ژاپن نخستین نمونه از این مواد را به عنوان ماده‌ای با تحمل حرارتی بالا در سال ۱۹۸۴ و در آزمایشگاه هوافضای نینو تولید کردند [۳].

بدین ترتیب از سال ۱۹۸۴ مطالعات بر روی فیلم‌های نازک ساخته شده از مواد مدرج تابعی و فرآیند ساخت آن‌ها به طور وسیعی انجام شد. پس از آن به تدریج با شناخته شدن آن در سطوح بین‌المللی تحقیقات گسترده‌ای بر روی آن‌ها آغاز گردید. از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید مواد مذکور در ژاپن آغاز گردید و سرانجام در سال ۱۹۸۸ انجمن مواد مدرج تابعی در ژاپن تاسیس شد. مواد مدرج تابعی دسته‌ای جدیدی از کامپوزیت‌های پیشرفته هستند که دارای ساختاری ناهمگن بوده و به واسطه تغییر تدریجی ترکیبات شیمیایی، توزیع و جهت‌گیری و یا اندازه فاز تقویت‌کننده در یک یا چند بعد خواص متفاوتی را در مناطق مختلف از خود بروز می‌دهند که فاز تقویت‌کننده و مواد زمینه در حالت پیوسته (نه بصورت گسسته مانند مواد مرکب) به تدریج تغییر می‌کند. از آنجا که هر ماده چند فازی محدوده‌ای از فضا را به خود اختصاص می‌دهد، لذا به صورت تابعی شناخته شده است. این مواد دارای خواص متغیر در راستای ضخامت بوده و خواص مکانیکی آن‌ها همچون مدول الاستیسیته، ضریب رسانش گرمایی، ضریب انبساط گرمایی و تنش تسلیم به صورت تدریجی از یک طرف لایه به طرف دیگر لایه و یا از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند و به شکل توابع توانی متغیر نسبت به شعاع نیز در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۱. شماتیکی از تفاوت کامپوزیت‌های چند لایه و مواد مدرج تابعی

2-Sendai

1-Nino

ویژگی‌های مواد مدرج تابعی

برخی ویژگی‌های مواد مدرج تابعی در مقایسه با مواد همگن و کامپوزیت‌ها عبارتند از: [۴]
 الف) کاهش تمرکز تنش در جسم جامد: به کمک مواد مدرج تابعی می‌توان آثار تمرکز تنش را به نحو چشمگیری کاهش داد. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاصی مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها، تمرکز تنش در برخی از نقاط جسم ایجاد می‌شود.

ب) مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا: در مواد مدرج تابعی، با افزایش استحکام از ورود اجسام به ناحیه مومسان و حتی شکست تا حدود زیادی جلوگیری می‌شود.

ج) مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا: به کمک مواد مدرج تابعی می‌توان در نواحی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آنها را کنترل نمود. اینگونه مواد با کاهش تنش حرارتی، آثار منفی آن را به نحو قابل توجهی کاهش می‌دهند.

د) مقاومت زیاد در برابر رشد ترک: مواد مدرج تابعی با بهترین ترکیب از حیث تغییر خواص ماده، مانع ایجاد یا رشد ترک می‌شوند.

ه) مقاومت زیاد در برابر احتمال جدا شدن لایه ترد بر روی مواد نرم: با توجه به این که معمولاً پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا از هم انجام می‌شود، مواد تابعی با تغییر پیوسته و تدریجی، احتمال جدا شدن لایه ترد را کاهش می‌دهند.

روابط حاکم بر مواد مدرج تابعی

با توجه به ناهمگن بودن مواد مدرج تابعی، خواص مکانیکی و حرارتی آن‌ها تحت توابعی مشخص به صورت پیوسته در راستای یک جهت معین تغییر می‌کنند. از اینرو روابط گوناگونی برای تابع تغییرات مواد مدرج تابعی پیشنهاد شده است که در روش‌های تحلیلی و عددی استفاده می‌شوند. روش مرسوم استفاده از تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته خواص در ماده می‌باشد. برخی از محققان [۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹] از تابع توانی به صورت زیر برای مدلسازی خواص ماده استفاده کرده‌اند:

$$P = P_i \left(\frac{r}{R_i} \right)^n \quad (1)$$

که در آن P_i خاصیت ماده در یک لایه مشخص و n ضریب ناهمگنی ماده می‌باشد. رایج‌ترین نوع مواد مذکور ترکیبی از دو جزء سرامیک و فلز می‌باشند که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر به آنها خواص مورد نظر بدست می‌آیند. برای این ترکیب پراوین و ردی [۱۰] رابطه زیر را بیان نمودند:

$$P = (P_m - P_c)V^n + P_c \quad (2)$$

در رابطه فوق P_m, P_c خواص فلز و سرامیک و V نسبت حجمی می‌باشد، که تغییرات کسر حجمی فلز در راستای ضخامت را به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$V = \left(\frac{2Z + h}{2h} \right)^n \quad \frac{-h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3)$$

که در این رابطه h بیانگر ضخامت بوده و Z راستای ضخامت است. همچنین n توان نسبت حجمی است و بیانگر چگونگی تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت است.

پوسته های استوانه ای مدرج تابعی

امروزه پوسته های استوانه ای کاربردهای زیادی در صنایع مختلف دارند. به گونه ای که کمتر صنعتی است که از این سازه های عظیم بی بهره باشد. برخی از کاربردهای لوله های تحت فشار و پوسته های استوانه ای عبارتند از:

- سازه توربینهای گاز
- کوره های دوار
- بدنه هواپیما و فضا پیماها
- موشکها
- زیر دریایی
- تانکرهای صنعتی و حمل و نقل
- راکتورهای هسته ای
- مخازن تحت فشار و ذخیره

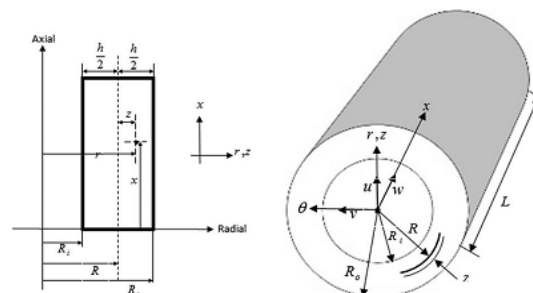
پیشینه تحقیق

عارفی و همکاران [۱۱] تحلیل ترموالاستیک دوبعدی پوسته استوانه ای قرار گرفته بر روی بستر پسترناک تحت بارهای مکانیکی و حرارتی را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. در فرمولبندی معادلات حاکم از روش انرژی و معادلات اویلر استفاده گردید. همچنین آن‌ها تاثیر بستر و ضریب ناهمگنی بر روی نتایج را مطالعه کردند. نتایج نهایی نشان داد شرایط مرزی تکیه گاهی تاثیر زیادی بر روی توزیع جابجایی طولی استوانه دارد. در تحقیقی دیگر عارفی و همکارانش [۱۲] به بررسی تاثیر بارهای حرارتی و مکانیکی متغیر محوری بر روی پوسته استوانه ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. آن‌ها با در نظر گرفتن خواص ماده به صورت توانی، با استفاده از روش انرژی و معادلات اویلر در دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر سه ساله را به دست آورده و سپس با استفاده از روش مقادیر ویژه بردارهای ویژه حل کردند. آنگاه مقادیر جابجایی، تنش و کرنش محوری و شعاعی بدست آمدند. نتایج بدست آمده بیان می‌کنند که شرایط مرزی در نظر گرفته شده تاثیر زیادی بر رفتار استوانه از خود نشان می‌دهد. شکوه فر و جباری [۱۳] به بررسی و مطالعه حل تحلیلی برای محاسبه تنش‌های پلاستیک خطی و فشار بحرانی در استوانه جدار ضخیم مدرج تابعی تحت بارگذاری نامتقارن محوری فشار داخلی، پرداختند. در این تحقیق مدول الاستیسیته به صورت تابعی توانی از شعاع استوانه در نظر گرفته شده است، هر چند که ضریب پواسون مقدار ثابتی فرض گردیده است. اثر ضریب ناهمگنی بر توزیع تنش‌ها در ضخامت استوانه بررسی گردیده است. در ادامه توزیع تنش‌های پلاستیک شعاعی، مماسی و برشی برای استوانه مذکور تحت فشار داخلی بدست آمده است. در این کار به منظور حل معادلات ناوبر از روش تحلیلی و سری‌های فوریه مختلط استفاده گردیده است. در ضمن نویسندگان مقاله مذکور به این نکته اشاره نموده‌اند که برخلاف روش تابع پتانسیل، روش مورد استفاده محدودیتی برای اعمال شرایط مرزی عمومی ندارد. گلمکانی و اخلاقی [۱۴] یک حل بسته تک بعدی جهت بررسی و تحلیل رفتار خزشی تیرهای ساخته شده از ماده مدرج تابعی آلومینیوم-سیلیکون کارباید تحت بار حرارتی ارائه دادند. خواص تیر در راستای ضخامت به صورت مدرج تابعی فرض گردیده بود. افشین و همکاران [۱۵] تحلیل ترموالاستیک وابسته به زمان مخزن تحت فشار استوانه ای جدار ضخیم دوار مدرج تابعی تحت بارهای متقارن مکانیکی و وابسته به زمان حرارتی تحت شرایط مرزی متفاوت را بررسی نمودند. خواص ماده با استفاده از توزیع توانی در راستای شعاع تغییر کرده و از روش جدا سازی متغیرها برای حل تحلیلی توزیع دمای وابسته به زمان استفاده گردیده است. برای اعتبار سنجی و صحت سنجی پژوهش حاضر نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مقایسه

گردیده‌اند. نکته قابل توجه اینکه در کارهای قبلی انجام شده از روش‌های عددی برای تحلیل مذکور استفاده گردیده است، درحالی‌که تحقیق مذکور یک حل دقیق ارائه می‌نماید. لقمان و همکاران [۱۶] تحلیل ترمو الاستیک استوانه مدرج تابعی تحت بارگذاری نامتقارن محوری حرارتی و مکانیکی که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار داشت، را بررسی نمودند. در این تحقیق تمامی خواص ماده به صورت تابع توانی از شعاع استوانه در نظر گرفته شده است. بر اثر بارگذاری‌های نامتقارن محوری حرارتی و مکانیکی و شرایط مرزی مورد نظر، جابجایی‌های ایجاد شده در ضخامت استوانه به صورت دو بعدی در جهات شعاعی و مماسی در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات اساسی موجود از شکل مختلط سری‌های فوریه استفاده گردیده است. نیروی مغناطیسی لورنتز نیز در اثر نامتقارن بودن بارگذاری‌ها هم در راستای شعاعی و هم در راستای مماسی اعمال گردیده است. نتایج این تحقیق نشان داد که وجود میدان مغناطیسی به طرز چشمگیری سبب افزایش تنش‌های مماسی و شعاعی می‌گردد. همچنین با افزایش ضریب ناهمگنی جابجایی شعاعی افزایش در حالی که مماسی کاهش می‌یابد. مرادی و لقمان [۱۷] به روش شبه تحلیلی، خزش وابسته به زمان در سیلندر جدار ضخیم از جنس فولاد را بررسی کردند. این سیلندر تحت فشار داخلی و توزیع دو بعدی وابسته به شعاع قرار داشته است. عارفی و همکاران [۱۸] رفتار خزشی وابسته به زمان استوانه مدرج تابعی تحت بارگذاری نامتقارن را مطالعه کردند. در این تحقیق با استفاده از معادله ساختاری نورتن، برای حل مساله یک روش نیمه تحلیلی بر اساس جدا سازی متغیرها و سریهای فوریه بکار گرفته شده است. لقمان و همکاران نیز در پژوهشی دیگر [۱۹] به تحلیل دوبعدی خزش وابسته به زمان استوانه مدرج تابعی جدار ضخیم پرداختند. اساس روش مورد استفاده که مقاله مذکور را از کارهای دیگر متمایز می‌کند، استفاده از فرمولبندی تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد. آن‌ها با استفاده از روش تحلیلی یانگ اثر پارامترهایی همچون بارگذاری متغیر، ضریب ناهمگنی و زمان خزش را بر روی پاسخ سیلندر بررسی و مطالعه نمودند. امیدی بیدگلی و همکاران مطالعاتی را بر روی تحلیل ترمو الاستیک دوبعدی پوسته استوانه مدرج تابعی تحت بارگذاری متقارن ترمومکانیکی انجام دادند. [۲۰ و ۲۱ و ۲۲] وزیری و همکاران [۲۳] حل دقیقی برای تحلیل ترمو الاستیک پوسته استوانه‌ای جدار ضخیم مدرج تابعی تحت گرمای غیریکنواخت با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه نمودند. در تحقیقی دیگر امیدی بیدگلی و همکاران [۲۴] تحلیل ترمو الاستیک ترانزینت پوسته استوانه‌ای مدرج تابعی ساخته شده از آلومینیوم سیلیکون کارباید را مطالعه کردند. بابایی و همکاران [۲۵] در مطالعه خود مخروط ناقص جدار ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی را تحلیل دینامیکی کردند. در این مقاله جنس پوسته استوانه‌ای از مواد مدرج تابعی با توزیع توانی از شعاع در نظر گرفته شده است. در ادامه از روش جداسازی متغیرها و توابع بسل برای حل معادله دما استفاده گردیده است. نهایتاً روابط حاکم بر پوسته استوانه‌ای تحت بارهای ترمومکانیکی نامتقارن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه گردیده است.

تعریف مساله :

استوانه تو خالی چرخان با سرعت زاویه‌ای ω به طول L و شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o به شکل زیر که تحت بارگذاری نامتقارن دما و فشار داخل و خارج در راستای طولی و محیطی می‌باشد مفروض است.



شکل ۲- هندسه پوسته استوانه‌ای

فرمول بندی حاکم بر مساله :

تحلیل سه بعدی انتقال حرارت

در حالت کلی معادله دما حاکم بر استوانه به شکل زیر است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۴)$$

بدون حضور چشمه گرمایی و عدم تغییرات دمایی در طول زمان خواهیم داشت:

$$\frac{K}{R+z} \frac{\partial T}{\partial z} + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{K}{(R+z)^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (۵)$$

با فرض حالت کلی جواب به فرم ذیل:

$$T(z, \theta, x) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z) \sin\left(\frac{q\pi x}{L}\right) e^{in\theta} \quad (۶)$$

معادله دیفرانسیل از نوع بسل ذیل بدست خواهد آمد.

$$T_n'' + \frac{1}{R+z} T_n' - \left(\xi^2 + \frac{n^2}{(R+z)^2}\right) T_n = 0 \quad (۷)$$

که حل آن به فرم ذیل خواهد شد:

$$T_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m I_0(\xi(R+z)) + b_m K_0(\xi(R+z)) \quad (۸)$$

مقدار ضرایب a_m و b_m با توجه به شرایط مرزی حرارتی حاکم بر استوانه :

$$\begin{aligned} C_{11} T(-h/2, x) + C_{12} T_{,r}(-h/2, x) &= f_1(x) \\ C_{21} T(h/2, x) + C_{22} T_{,r}(h/2, x) &= f_2(x) \end{aligned} \quad (۹)$$

$$T(R_i, x) = T_i, \quad T(R_o, x) = T_o$$

به شکل زیر بدست می آیند.

$$a_m = \frac{e_1 e_6 - e_2 e_4}{e_3 e_6 - e_4 e_5}, \quad b_m = \frac{e_2 e_3 - e_1 e_5}{e_3 e_6 - e_4 e_5} \quad (۱۰)$$

و همچنین خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{2}{L} \int_0^L T_i(x) \sin(\xi x) dx \\ e_2 &= \frac{2}{L} \int_0^L T_o(x) \sin(\xi x) dx \\ e_3 &= I_0(-\xi h/2) \\ e_4 &= K_0(-\xi h/2) \\ e_5 &= I_0(\xi h/2) \\ e_6 &= K_0(\xi h/2) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

میدان جابجایی سه بعدی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول

هر میدان تغییر مکانی را می توان بر اساس تئوری تغییر شکل برشی با در نظر گرفتن دو متغیر نمایش داد. برای یک استوانه با یک میدان سه متغیره تغییر مکان شامل تغییر مکان محوری، زاویه ای و شعاعی، میدان کلی تغییر مکان را به صورت رابطه ذیل می توان نشان داد.

$$\begin{cases} u_z(z, \theta, x) = u_0(\theta, x) + z \varphi_r(\theta, x) \\ v_\theta(z, \theta, x) = v_0(\theta, x) + z \varphi_\theta(\theta, x) \\ w_x(z, \theta, x) = w_0(\theta, x) + z \varphi_x(\theta, x) \end{cases} \quad (12)$$

همچنین روابط کرنش - جابجایی خطی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u}{\partial z} = \phi_r \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{R+z} (u_0 + z \varphi_r + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}) \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R+z} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{z}{R+z} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \phi_\theta - \frac{1}{R+z} v_0 - \frac{z}{R+z} \phi_\theta \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_r}{\partial x} + \phi_x \right) \\ \varepsilon_{\theta x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

و روابط تنش - کرنش الاستیک به فرم ذیل خواهند بود:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varphi_r + \nu \left(\frac{1}{R+z} (u_0 + z \varphi_r + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}) + \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right] - \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} T(z, \theta, x) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{1}{R+z} (u_0 + z \varphi_r + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}) + \nu \left(\phi_r + \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \right] - \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} T(z, \theta, x) \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial w_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{R+z} (u_0 + z \varphi_r + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta}) + \varphi_r \right) \right] - \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} T(z, \theta, x) \\ \tau_{z\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R+z} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{z}{R+z} \frac{\partial \phi_r}{\partial \theta} + \phi_\theta - \frac{1}{R+z} v_0 - \frac{z}{R+z} \phi_\theta \right) \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_r}{\partial x} + \phi_x \right) \\ \tau_{x\theta} &= \frac{E}{(1+\nu)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

کار نیروهای خارجی

$$\begin{aligned} W &= \iiint_V \rho (R+z)^2 \omega^2 (u_0 + z \varphi_r) dz d\theta dx + \\ &\iiint \left\{ P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) \left(u_0 - \frac{h}{2} \varphi_r \right) + \frac{1}{2} K_w \left(u_0 + \frac{h}{2} \varphi_r \right)^2 - \frac{G}{2} \left(u_0 + \frac{h}{2} \varphi_r \right) (\nabla^2 u) \right\} d\theta dx \end{aligned} \quad (15)$$

که برای $\nabla^2 u$ خواهیم داشت:

$$\nabla^2 u(z, \theta, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{R+h/2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{(R+h/2)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$\frac{1}{R+h/2} \varphi_r + \frac{1}{(R+h/2)^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + h/2 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + h/2 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2} \quad (16)$$

و در نتیجه:

$$\delta W = \iint \delta u_0 \left\{ Pi \left(R - \frac{h}{2} \right) + K_w \left(u_0 + \frac{h}{2} \varphi_r \right) + \frac{G}{(R+h/2)^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + h/2 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \theta^2} \right) \right.$$

$$\left. - G \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - G h/2 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2} + \int \rho (R+z)^2 \omega^2 dz \right\} + \delta \varphi_r \left\{ Pi \left(-\frac{h}{2} \right) \left(R - \frac{h}{2} \right) + K_w \frac{h}{2} \left(u_0 + \frac{h}{2} \varphi_r \right) \right.$$

$$\left. + \frac{G h}{(R+h/2)^2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + h/2 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \theta^2} \right) - G h/2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - G h^2/4 \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial x^2} + \int \rho (R+z)^2 \omega^2 z dz \right\} d\theta dx \quad (17)$$

تغییرات انرژی کرنشی نیز عبارتند از:

$$\delta U = \iiint \left\{ \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{z\theta} \delta \varepsilon_{z\theta} + \tau_{zx} \delta \varepsilon_{zx} + \tau_{x\theta} \delta \varepsilon_{x\theta} \right\} (R+z) dz d\theta dx =$$

$$\delta u_0 \left\{ -\sigma_\theta + \tau_{r\theta,\theta} + \tau_{rx,x} (R+z) \right\} + \delta \varphi_r \left\{ -\sigma_r (R+z) + \tau_{r\theta,\theta} z + \tau_{rx,x} z (R+z) - \sigma_\theta z \right\} + \quad (18)$$

$$\delta v_0 \left\{ -\sigma_{\theta,\theta} + \tau_{r\theta} + \tau_{x\theta,x} (R+z) \right\} + \delta \varphi_\theta \left\{ \sigma_{\theta,\theta} z + \tau_{x\theta,x} (R+z) z - \tau_{r\theta} (R+z) + z \tau_{r\theta} \right\} + \quad ($$

$$\delta w_0 \left\{ \sigma_{x,x} (R+z) + \tau_{x\theta,\theta} \right\} + \delta \varphi_x \left\{ \sigma_{x,x} z (R+z) - \tau_{xr} (R+z) + \tau_{x\theta,\theta} z \right\}$$

در ادامه با استفاده از معادله اویلر معادله دیفرانسیل عبارتست از:

$$A \{X\} + B \frac{\partial}{\partial \theta} \{X\} + C \frac{\partial}{\partial x} \{X\} + D \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \{X\} + E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{X\} + F \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \{X\} = \{G\}$$

$$\{X\} = \{u_0 \quad \varphi_r \quad v_0 \quad \varphi_\theta \quad w_0 \quad \varphi_x\}^T \quad (19)$$

$$\{G\} = \{G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4 \quad G_5 \quad G_6\}^T$$

در نهایت با استفاده از روش مقادیر ویژه و بردارهای ویژه و تجميع حل همگن و خصوصی، پاسخ کلی سیستم به صورت زیر بدست می آید:

$$\{x\} = \{x_h\} + \{x_{pT}\} + \{x_{pP}\},$$

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ \varphi_r \\ v_0 \\ \varphi_\theta \\ w_0 \\ \varphi_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0h} \\ \varphi_{rh} \\ v_{0h} \\ \varphi_{\theta h} \\ w_{0h} \\ \varphi_{xh} \end{Bmatrix} + \sum_{q=1}^{\infty} [\{A_{mn}\} \sin(\xi x) + \{B_{mn}\} \cos(\xi x)] + C'x^2 + D'x + E' \quad (20)$$

جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش ابتدا به بیان مفاهیم مواد مدرج تابعی و کاربردهای پوسته های استوانه ای پرداخته شده است. سپس به تحلیل انتقال حرارت سه بعدی پوسته مذکور پرداخته شده است. در نهایت با استفاده از تئوری برشی تغییر شکل مرتبه اول یک حل تحلیلی جهت بررسی رفتار ترموالاستیک پوسته استوانه ای مدرج تابعی تحت بارگذاری نامتقارن ترمومکانیکی بر بسترالاستیک ارائه گردیده است. این روش می تواند راهگشای پژوهشگران برای بررسی رفتار پوسته های مذکور باشد.

منابع و مراجع

- [1] M.B. Bever, P.F. Duwez, Gradients in composite materials, *Materials Science and Engineering*, **10** 1-8(1972)
- [2] M. Shen, M.B. Bever, Gradients in polymeric materials, *Journal of Materials Science*, **7** 741-746(1972)
- [3] M.Koizumi, M Niino, Overview of fgm research in japan, *MRS Bulletin*, **20** 19-21(1995)
- [4] S.Suresh, A Mortensen, Fundamentals of Functionally Graded Materials, *Cambridge Publication, London*, (1998)
- [5] Y. Obata , N. Noda, Steady thermal-stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of functionally gradient material, *Journal of Thermal Stresses*, **17** 471-487(1994)
- [6] C.Horgan, A. Chan , The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials, *Journal of Elasticity*, **55(1)** 43-59(1999)

- [7] Y.Y. Yang, Time-dependent stress analysis in functionally graded material, *International Journal of Solid and Structure*, **37(51)** 7593-7608(2000)
- [8] N. Tutuncu, M.Ozturk, Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Composites Part B: Engineering*, **32** 683-686(2001)
- [9] X.Hongjun, S. Zhifei, Z. Taotao, Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, *Mechanics Research Communications*, **33(5)** 681-691(2006)
- [10] G.N.Praveen, J.N.Reddy, Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates, *International Journal of Solid and Structures*, **35** 4457-4476(1998)
- [11] M.Arefi, A. R. Abbasi , M. R. Vaziri Sereshk, Two-dimensional thermoelastic analysis of FG cylindrical shell resting on the Pasternak foundation subjected to mechanical and thermal loads based on FSDT formulation, *Journal of Thermal Stresses*,**39(5)** 554-570(2016)
- [12] M.Arefi, R. Koohi Faegh , A.Loghman, The effect of axially variable thermal and mechanical loads on the 2D thermoelastic response of FG cylindrical shell, *Journal of Thermal Stresses*,**39(12)** 1539-1559(2016)
- [13] M. Shokouhfar and M. Jabbari, Mechanical Stresses in a Linear Plastic FGM Hollow Cylinder Due to Non-Axisymmetric Loads, *Journal of Solid Mechanics*, **8(4)** 705-718 (2016)
- [14] S.Golmakaniyoon, F. Akhlaghi, Time-dependent creep behavior of Al-SiC functionally graded beams under in-plane thermal loading, *Computational Materials Science*, **121** 182-190(2016)
- [15] A. Afshin, M. ZamaniNejad, K. Dastani, Transient thermoelastic analysis of FGM rotating thick cylindrical pressure vessels under arbitrary boundary and initial conditions, *Journal of Computational Applied Mechanics*,**48(1)** 15-26(2017)
- [16] A. Loghman, M. Nasr , M. Arefi, Nonsymmetric thermomechanical analysis of a functionally graded cylinder subjected to mechanical, thermal, and magnetic loads, *Journal of Thermal Stresses*,**40(6)** 765-782(2017)

- [17] M. Moradi, A. Loghman, Non-Axisymmetric Time-Dependent Creep Analysis in a Thick-Walled Cylinder Due to the Thermo-mechanical loading, , *Journal of Solid Mechanics*, **10(4)** 845-863(2018)
- [18] M. Arefi, M.Nasr, A. Loghman, Creep analysis of the FG cylinders: Time-dependent non-axisymmetric behavior, *Steel and Composite Structures*, **28(3)** 331-347(2018)
- [19] A. Loghman, R. Koochi Faegh , M. Arefi, Two dimensional time-dependent creep analysis of a thick-walled FG cylinder based on first order shear deformation theory, *Steel and Composite Structures*, **26(5)** 533-547(2018)
- [20] Omid Bidgoli M., Arefi M., Loghman A., Thermoelastic behaviour of FGM rotating cylinder resting on friction bed subjected to a thermal gradient and an external torque, *Australian Journal of Mechanical Engineering*: 1-9, 2018
- [21] Omid Bidgoli M., Loghman A., Arefi M., The Effect of Grading Index on Two-dimensional Stress and Strain Distribution of FG Rotating Cylinder Resting on a Friction Bed Under Thermomechanical Loading, *Journal of Stress Analysis* 3(2): 75-82,2019
- [22] Omid Bidgoli M., Loghman A., Arefi M., ThreeDimensional Thermo-Subjected to Mechanical and Thermal Loads Based on the FSDT Formulation, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 60(5) 899-907,2019.
- [23]S. A. Vaziri, M. Ghannad, O. A.nwar Béq, Exact thermoelastic analysis of a thick cylindrical functionally graded material shell under unsteady heating using first order shear deformation theory, *Heat Transfer-Asian Research*, **48(5)** 1737-1760(2019)
- [24] Omid Bidgoli M., Loghman A., Arefi M., R. Koochi Faegh, Transient stress and deformation analysis of a shear deformable FG rotating, cylindrical shell made of AL-SIC subjected to thermo-mechanical loading., *Australian Journal of Mechanical Engineering*: 1-15, 2020.
- [25] Babaei M. , Asemi K. ,Kiasari F., Dynamic analysis of functionally graded rotating thick truncated cone made of saturated porous materials,thin walled structure,107852,2021.