



تحلیل استاتیکی تیرها در مقیاس میکرو بر اساس تئوری تغییر شکل برشی

مرتبۀ سوم

محسن جبّاری

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد تهران جنوب، تهران، ایران

حسین دهبانی

مرکز آموزش علمی کاربردی شرکت تولیدی قند کرج، البرز، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱-۱۱-۲۷ تاریخ دریافت: ۱۴۰۱-۰۶-۱۸

چکیده: بررسی و تحلیل سازه های جدار نازک مثل تیرها به دلیل پر کاربرد بودن در مهندسی نوین از اهمیت بسیار بالایی برخوردار می باشد. از این رو تحلیل چنین سازه هایی جهت طراحی های بهینه بسیار مهم و ضروری می باشد. در این تحقیق دو مسئله متفاوت خمش و کمانش تیر میکرو تحت بار عرضی یکنواخت و بار محوری با شرایط مرزی مفصل ساده مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین برای استخراج معادلات حاکم بر تیرها از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده شده است. معادلات حاکم بر این مسئله برای تیرهای در مقیاس میکرو استخراج شده اند، بنابراین در تحلیل تیرها در مقیاس میکرو علاوه بر روابط موجود برای تیرهای معمولی، تنش های کوپل شده نیز وجود خواهند داشت. بنابراین معادلات حاکم بر تیر میکرو با معادلات حاکم بر تیرهای معمولی متفاوت خواهد بود. همچنین تئوری های مختلف تغییر شکل های برشی از جمله تئوری تیر اویلر-برنولی، تئوری تیر تیموشنکو و تئوری تیر مرتبۀ سوم ردی برای تیر تحت بار گذاری های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. در این تحقیق از روش تحلیلی برای حل دو مسئله خمش و کمانش تیر میکرو استفاده شده است. در مسئله خمش، خیز تیر بصورت تابعی صریح عنوان شده و در مسئله کمانش نیز بار بحرانی که باعث بروز پدیده کمانش در تیر می گردد مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت نتایج حاصل از این تحلیل بصورت نمودار و جدول ارائه شده اند.

واژه های کلیدی: تیر میکرو، تیر اویلر-برنولی، تئوری تیر تیموشنکو، تئوری تیر مرتبۀ سوم ردی، حل تحلیلی

۱. مقدمه

بررسی و تحلیل سازه های جدار نازک مثل تیرها به دلیل پر کاربرد بودن در مهندسی نوین از اهمیت بسیار بالایی برخوردار می باشد. از این رو تحلیل چنین سازه هایی جهت طراحی های بهینه بسیار مهم و ضروری می باشد. اکثر مطالعات انجام شده بر

روی تیرهایی از نوع اوپلر - برنولی و یا تیر تیمو شنکو می باشد که این تحلیل ها و بررسی ها در محدوده ی الاستیک انجام شده است. همچنین از روش های انرژی برای استخراج معادلات حاکم بر مسئله های خمش، کمانش و ارتعاشات تیرها تحت بار های عرضی استفاده شده است. معمولاً در اکثر مقالات مربوط به خمش تیرها تحت بار عرضی، دو حالت تیر تیمو شنکو و تیر اولر- برنولی تحلیل شده است، ولی بیشتر این تحقیقات بر روی خمش تیر تیمو شنکو صورت گرفته است. علت این امر این است که در چند مد اول ارتعاشی تیرها تفاوت بین تیر اوپلر- برنولی و تیر تیمو شنکو ناچیز می باشد. ولی برای مد های مرتبه بالاتر درصد خطای تیر اوپلر- برنولی زیاد می شود و دیگر نتایج قابل اعتمادی نمی دهد. از همان زمان که تئوری و تحلیل کلاسیک سازه ها مطرح شد، بحث تحلیل تیرها نیز بعنوان سر فصلی جدید از آن تئوری مورد بررسی قرار گرفت.

در سالهای اخیر تحقیقات فراوانی در ارتباط با تیرها انجام شده است. کمیجانی و همکاران [۱] مقاله ای در مورد تحلیل حرارتی تیرهای با خواص مدرج تابعی وابسته به دما در محدوده الاستیک خطی و در مقیاس میکرو ارائه کرده اند. در این تحقیق یک تیر میکرو با خواص تابعی تحت بار حرارتی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. آنها با استفاده از روش عددی دیفرانسیل کوادریچر تعمیم یافته (GDQ) توانستند پاسخ تیر را برای رفتار پس از کمانش بدست آورده و نمودار هایی را برای مقادیر مختلفی از پارامتر های هندسی تیر ارائه دادند. تای و وو [۲] تحلیل خمش و ارتعاشات تیر های با خواص مدرج تابعی را بررسی کردند. در این تحقیق معادلات حاکم بر مسئله بر اساس تئوری های مختلف تغییر شکل برشی بدست آمده اند. در این تحقیق شرایط مرزی تیر نیز بصورت مفصل ساده در نظر گرفته شده است. آنها توانستند به کمک یک روش تحلیلی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل کرده و سپس بطور مستقیم معادلات را حل کنند. تحلیل خمش، کمانش، و ارتعاشات تیر میکرو توسط دریجانی و محمدآبادی [۳] صورت پذیرفت. آنها معادلات حاکم بر مسئله را با استفاده از اصل تغییر مکان مجازی یا همان اصل حداقل انرژی پتانسیل بدست آوردند. سپس معادلات خطی حاکم بر مسئله را با استفاده از روش های حل تحلیلی حل کرده و نتایج بدست آمده را بصورت نمودار و جدول ارائه کردند. نایفه و ایمام [۴] تحلیل رفتار پس از کمانش تیر کامپوزیتی را بررسی کردند. در این تحقیق تیر کامپوزیتی تحت بار محوری فرض شده و معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله بصورت تحلیلی حل گردید. آنها همچنین اثرات نسبت های هندسی تیر را بر روی بار بحرانی ناشی از کمانش بررسی کردند و نتایج بدست آمده را در جداولی ارائه نمودند. ایمام [۵] مقاله ای در مورد حل تحلیلی معادلات دینامیکی و استاتیکی تیر کامپوزیتی با نقص اولیه و تحت بار محوری مکانیکی ارائه کرد. در این تحقیق تیر به دو صورت ناقص و کامل بررسی و سپس بار کمانشی و منحنی بار- تغییر مکان برای هر دو حالت محاسبه شدند. در نهایت نتایج بدست آمده از حل هر یک از حالت های بررسی شده را نیز با یکدیگر مقایسه کردند. تسیاتاس [۶] تحلیل تیر های غیر یکنواخت بر بستر الاستیک غیرخطی را بررسی کرد و با استفاده از حل مستقیم معادله حاکم توانست میدان تغییر مکان و پاسخ تیر به بارهای مکانیکی خارجی را بدست بیاورد. هوانگ و لی [۷] مقاله ای در مورد حل عمومی مسئله خمش و ارتعاشات تیر ساخته شده از ماده با خواص تابعی تحت بار مکانیکی ارائه کردند. در این مقاله سطح مقطع تیر بصورت دایروی فرض شد و نتایج تحقیق از حل مستقیم معادلات حاکم بدست آمدند. ایمام [۸] رفتار پس از کمانش یک تیر کامپوزیتی را بررسی کرد. او معادلات حاکم بر مسئله را با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی تیر بدست آورد و توانست یک جواب تحلیلی مناسب برای معادلات تعادل حاکم بر مسئله پیدا کند. جواب بدست آمده در این تحقیق رفتار پس از کمانش تیر کامپوزیتی را خوبی نشان می دهد و با نتایج بدست آمده در سایر مقالات بخوبی مطابقت دارد. فلاح و اقدم [۹] تحلیل ارتعاشات آزاد و کمانش در یک تیر ساخته شده از مواد با خواص تابعی که بر روی بستر الاستیک غیرخطی قرار دارد را بررسی کردند. آنها فرکانس های طبیعی تیر و رفتار پس از کمانش تیر را بدرستی ارائه کردند. ما و لی [۱۰] تحقیق بسیار گسترده ای بر روی تیرهای با خواص تابعی همگن که در راستای ضخامت بصورت یک تابع مشخص تغییر می کند را انجام دادند و پاسخ تیر را تحت اثر انواع بار حرارتی بررسی کردند. آنها از یک روش تحلیلی برای حل معادلات غیرخطی حاکم بر مسئله استفاده کرده و حل دقیقی برای این معادلات ارائه کردند. فلاح و اقدم [۱۱] نیز مسئله تیر را برای ماده با خواص تابعی بررسی کردند. آنها معادلات حاکم بر مسئله را با استفاده از روش انرژی بدست آوردند و با استفاده از روش گلرکین معادلات تعادل را بصورت تحلیلی حل کرده و به نتایج مشابه با دیگر مقالات ارائه شده رسیدند. سیمسک [۱۲] تحلیل ارتعاشات غیر

خطی تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار متحرک را بررسی کرد. در این تحقیق بار گسترده بصورت هارمونیک در نظر گرفته شده و همچنین شرایط مرزی ساده برای دو سر تیر در نظر گرفته شده است. خواص تیر نیز بصورت تابعی مشخص در راستای ضخامت تیر متغییر در نظر گرفته شده است. در این تحقیق معادلات حرکت غیر خطی بدست آمده با روش عددی نیومارک حل شده اند. نتایج حاصل از این تحقیق نیز بصورت جداولی ارائه شده اند. اومز [۱۳] ارتعاشات واداشته نانوتیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی را بر مبنای تئوری الاستیسیته غیرمحملی مورد مطالعه قرار داد. همچنین براساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی، سیمسک و یورتکو [۱۴] مطالعه های تحلیلی بر رفتار خمشی و کمانشی نانوتیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از مدل تیر اوپلر-برنولی و تیموشنکو ارائه کردند. آغوز و سیوالک [۱۵] ارتعاشات آزاد میکروتیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی محوری را براساس تئوری اوپلر-برنولی و تنش کوپل اصلاح شده بررسی کردند. اصغری و همکاران [۱۶] با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده، رفتار ارتعاشی میکروتیرهای مدرج تابعی را بررسی نمودند. در این مقاله اثرات پارامتر مقیاس طول بر فرکانس طبیعی سیستم بررسی گردید. سامانی و همکاران به بررسی ارتعاشات غیرخطی میکروتیرهای مدرج تابعی براساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده پرداختند. کهرپایان و همکاران [۱۷] اثرات اندازه بر میکروتیر مدرج تابعی را براساس تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده تحلیل کردند. در این بررسی ارتعاشات آزاد و تغییر مکان استاتیکی میکروتیر دوسرمفصل بررسی گردید. در پژوهشی دیگر آغوز و سیوالک [۱۸] به تحلیل کمانش میکروتیر مدرج تابعی با استفاده از مدل تیر اوپلر-برنولی و تئوری گرادیان کرنش اصلاح شده پرداختند. کی و وانگ [۱۹] اثرات اندازه را بر روی پایداری دینامیکی میکروتیر مدرج تابعی براساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل تیر تیموشنکو با استفاده از روش عددی تربیع دیفرانسیلی بررسی کردند.

همچنین محققین دیگری [۲۰-۳۴] بر روی تحلیل تیرهای با خواص مدرج تابعی تحت بار مکانیکی و حرارتی تحقیقات بسیاری انجام شده است. در این منابع رفتارهایی مثل خمش، کمانش و ارتعاش تیرها مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مقاله ابتدا با استفاده از معادلات الاستیسیته خطی تیر میکرو، معادلات خطی تیر در خمش تیر تحت بار عرضی و کمانش تیر تحت بار محوری به دست آمده و برای حل آن از روش تحلیلی استفاده خواهد شد. در مسئله خمش، خیز تیر بصورت تابعی صریح بدست آمده است. همچنین در مسئله کمانش نیز بار بحرانی که باعث بروز پدیده کمانش در تیر می گردد بدست آمده است. در ادامه نتایج حاصل از این تحقیق بصورت نمودار و جدول ارائه شده اند.

۲- معادلات الاستیسیته تیر میکرو

مراحل تحلیل یک جسم الاستیک در مقیاس میکرو مراحل شبيه به تحلیل یک جسم در محیط ماکرو دارد. با این تفاوت که برای تحلیل یک محیط الاستیک در مقیاس میکرو فرضیات جدیدی به روابط قبلی در محیط ماکرو اضافه خواهد شد. برای خلاصه نویسی، معادلات الاستیسیته حاکم بر یک محیط الاستیک در مقیاس میکرو را با روابط اندیسی نشان خواهیم داد. چگالی انرژی کرنشی در مقیاس میکرو بصورت زیر نوشته می شود

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - m_{ij} \chi_{ij}) \quad (1)$$

در رابطه (۱)، u ، σ_{ij} ، ε_{ij} ، m_{ij} و χ_{ij} به ترتیب چگالی انرژی کرنشی، تنسور تنش، تنسور کرنش، تنسور تنش کوپل شده و تنسور متقارن انحنای می باشند.

روابط کرنش- تغییر مکان نیز بصورت زیر نوشته می شوند

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[(\nabla u)_{ij} + (\nabla u)_{ij}^T \right] \quad (2)$$

روابط تنش- کرنش (معادلات ساختاری) نیز بصورت زیر تعریف می شوند

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ij} \quad (3)$$

در رابطه (۳)، λ و μ ضرایب لامه می باشند. همچنین رابطه تنشهای کوپل شده (m_{ij}) و تنسور متقارن انحنا (χ_{ij}) نیز برابر است با

$$m_{ij} = 2\mu\chi_{ij} \quad (4)$$

این روابط برای یک محیط الاستیک سه بعدی در مقیاس میکرو ارائه شده اند. در صورتیکه بخواهیم از روابط بالا برای تحلیل تیر استفاده کنیم، روابط ساده تر خواهند شد.

۲-۱- معادلات خطی تیر میکرو

تحلیل تیرها در مقیاس میکرو نیز مراحل شیبیه به تحلیل تیرهای ایزوتروپیک دارد. تغییر مکان در داخل تیر به صورت تعریف می شود

$$\begin{aligned} u_x(x, z) &= -z \frac{dw_b(x)}{dx} + f(z) \frac{dw_s(x)}{dx} \\ u_y(x, z) &= 0 \\ u_z(x, z) &= w_b(x) + w_s(x) \end{aligned} \quad (5)$$

که در میدان های تغییر مکان w_b و w_s ارائه شده در روابط فوق، به ازای مقادیر مشخصی از تابع $f(z)$ تئوری های مختلف تغییر شکل برشی برای تیرها بصورت زیر حاصل می گردند

$$\begin{aligned} \text{if } f(z) = 0 &\rightarrow \text{Euler - Bernoulli theory} \\ \text{iif } f(z) = -z &\rightarrow \text{Timoshenko theory} \\ \text{if } f(z) = -\frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} &\rightarrow \text{Reddy theory} \end{aligned} \quad (6)$$

بر اساس روابط (۶)، تئوری های مختلف تیر به ازای مقادیر مختلف تابع $f(z)$ حاصل می شوند. طبق این روابط با در نظر گرفتن $f(z) = 0$ تئوری کلاسیک تیر اویلر- برنولی، با در نظر گرفتن $f(z) = -z$ تئوری مرتبه اول تیر تیموشنکو و در نهایت با در نظر گرفتن تابعی بصورت $f(z) = -\frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2}$ تئوری تیر مرتبه سوم ردی برای تیرها حاصل می شود. پس از بدست آمدن میدان تغییر مکان، کرنش های مربوطه نیز بصورت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \end{aligned} \quad (7)$$

همچنین مولفه های تنسور انحنا نیز بر حسب مولفه های تغییر مکان بصورت زیر مشخص می شوند

$$\begin{aligned}\chi_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right\} \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right) \frac{dw_s}{dx}\end{aligned}\quad (8)$$

و روابط تنش کرنش (معادلات ساختاری) برابر است با

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E\varepsilon_x = E \left\{ -z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right\} \\ \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G \left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \\ m_{xy} &= 2\Box\chi_{xy} = G \left\{ -\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right\} \\ m_{yz} &= 2\Box\chi_{yz} = \frac{G}{2} \left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right) \frac{dw_s}{dx}\end{aligned}\quad (9)$$

شرایط مرزی برای تنش ها و تنش های کوپل شده نیز بصورت زیر می باشند

$$at : z = \pm \frac{h}{2} \quad m_{yz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (10)$$

بعد از بدست آمدن تنش ها، منتجه های تنش را تعریف خواهیم کرد. بنابراین منتجه های تنش با انتگرال گیری از تنش ها و ممان تنش بصورت زیر تعریف می شوند

$$P_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[-z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right] dz \quad (11)$$

که P_x منتجه نیروی محوری در جهت طول تیر می باشد. همچنین داریم

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m_{xy} dz \\ &= E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \left(-z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) dz + G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) dz\end{aligned}\quad (12)$$

که M_x منتجه گشتاور در تیر می باشد. همچنین داریم:

$$V_{xz} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\tau_{xz} - \frac{dm_{xy}}{dx} - \frac{dm_{yz}}{dz} \right) dz \tag{13}$$

$$= G \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} dz - \left(-\frac{d^3 w_b}{dx^3} + \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^3 w_s}{dx^3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 f}{dz^3} \right) \frac{dw_s}{dx} \right\} dz$$

که V_{xz} نیز منتهی نیروی برشی در ضخامت تیر می باشد. اکنون برای آنکه بتوانیم معادلات تعادل حاکم بر مسئله را استخراج نماییم از اصل حداقل انرژی پتانسیل استفاده می کنیم. طبق اصل حداقل انرژی پتانسیل، ابتدا باید انرژی پتانسیل کل سیستم که شامل انرژی کرنشی، کار انجام شده توسط بار عرضی و کار انجام شده توسط بار محوری می باشد را محاسبه نمود. داریم

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \tag{14}$$

در صورتیکه بخواهیم انرژی کرنش مربوط به تیر را محاسبه کنیم، با استفاده از روابط تعریف شده برای تیر میکرو، انرژی کرنشی تیر بصورت زیر نوشته می شود

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ E \left(-z \frac{d^2 w_b}{dx^2} + f(z) \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + G \left[\left(1 + \frac{df}{dz} \right) \frac{dw_s}{dx} \right]^2 \right. \\ \left. G \left(-\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{d^2 w_s}{dx^2} - \frac{1}{4} G \left[\left(\frac{d^2 f}{dz^2} \right) \frac{dw_s}{dx} \right]^2 \right) \right\} dz dy dx \tag{15}$$

که بعد از محاسبه انتگرال در جهت های ضخامت و عرض تیر، انرژی کرنشی بصورت زیر نوشته می شود

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ 2A_1 \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)^2 + 2A_2 \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right)^2 + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \frac{d^2 w_s}{dx^2} + 2A_4 \left(\frac{dw_s}{dx} \right)^2 \right\} dx \tag{16}$$

که در رابطه بالا ضرایب بصورت زیر تعریف می شوند

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Ez^2 + G) dz$$

$$A_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\frac{G}{16} \left(\frac{df}{dz} - 1 \right)^2 + Ef^2(z) \right] dz \tag{17}$$

$$A_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[-2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zf(z) - \frac{1}{2} G \left(\frac{df}{dz} - 1 \right) \right] dz$$

$$A_4 = G \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\left(1 + \frac{df}{dz} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{d^2f}{dz^2} \right)^2 \right] dz \quad (18)$$

کار نیرو خارجی (بار یکنواخت عرضی) بصورت زیر نوشته می شود

$$\Omega = - \int_0^L q (w_b + w_s) dx \quad (19)$$

همچنین کار نیروی خارجی (نیروی محوری) نیز بصورت زیر نوشته می شود

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw_s}{dx} \right)^2 dx \quad (20)$$

بنابر این با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل (اصل کار مجازی) که بصورت زیر است، می توان معادلات حاکم بر مسئله

تیر میکرو تحت اثر همزمان بار عرضی و بار محوری را بدست آورد

$$\delta \Pi = \delta U + \delta \Gamma + \delta \Omega = 0 \quad (21)$$

که اولین وریشن انرژی کرنشی بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta U = \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} 2A_1 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) + 2A_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \\ + A_3 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) + 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \end{array} \right\} dx \quad (22)$$

با گرفتن انتگرال جز به جز از رابطه بالا خواهیم داشت

$$U = \int_0^L \left\{ \delta w_b + 2A_2 \frac{d^4 w_s}{dx^4} \delta w_s + A_3 \frac{d^4 w_b}{dx^4} \delta w_s + A_3 \frac{d^4 w_s}{dx^4} \delta w_b - 2A_4 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \delta w_s \right\} \\ \left[\left(2A_1 \frac{d^3 w_b}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_s}{dx^3} \right) \delta w_b + \left(2A_1 \frac{d^2 w_b}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) \right] \\ \left[+ \left(2A_2 \frac{d^3 w_s}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_b}{dx^3} - 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \right) \delta w_s + \left(2A_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \right]_0^L \quad (23)$$

وریشن کار نیرو خارجی (بار یکنواخت عرضی) بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta \Omega = - \int_0^L q (\delta w_b + \delta w_s) dx \quad (24)$$

همچنین، وریشن کار نیروی خارجی (نیروی محوری) نیز بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta\Gamma = P \int_0^L \left\{ \left(\frac{dw_b}{dx} + \frac{dw_s}{dx} \right) \left[\delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) + \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) \right] \right\} dx \quad (25)$$

که بعد از انتگرال گیری با تکنیک جز به جز بصورت زیر نوشته می شود

$$\delta\Gamma = -P \int_0^L \left\{ \left(\frac{d^2w_b}{dx^2} + \frac{d^2w_s}{dx^2} \right) [\delta w_b + \delta w_s] \right\} dx + \left\{ \left(\frac{dw_b}{dx} + \frac{dw_s}{dx} \right) [\delta w_b + \delta w_s] \right\}_0^L \quad (26)$$

با توجه به رابطه (۲۶) و با استفاده از اصل کار مجازی، به رابطه زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta U + \delta\Gamma + \delta\Omega \\ &= \int_0^L \left\{ \left[2A_1 \frac{d^4w_b}{dx^4} + A_3 \frac{d^4w_s}{dx^4} - P \left(\frac{d^2w_b}{dx^2} + \frac{d^2w_s}{dx^2} \right) - q \right] \delta w_b \right. \\ &\quad \left. + \left[2A_2 \frac{d^4w_s}{dx^4} + A_3 \frac{d^4w_b}{dx^4} - 2A_4 \frac{d^2w_s}{dx^2} - P \left(\frac{d^2w_b}{dx^2} + \frac{d^2w_s}{dx^2} \right) - q \right] \delta w_s \right\} dx \\ &\quad + \left\{ \left(2A_1 \frac{d^3w_b}{dx^3} + A_3 \frac{d^3w_s}{dx^3} \right) \delta w_b + \left(2A_1 \frac{d^2w_b}{dx^2} + A_3 \frac{d^2w_s}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) \right\}_0^L \\ &\quad + \left\{ \left(2A_2 \frac{d^3w_s}{dx^3} + A_3 \frac{d^3w_b}{dx^3} - 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \right) \delta w_b \right. \\ &\quad \left. + \left(2A_2 \frac{d^2w_s}{dx^2} + A_3 \frac{d^2w_b}{dx^2} \right) \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) \right\}_0 \end{aligned} \quad (27)$$

در نهایت معادلات دیفرانسیل خطی حاکم بر تیر میکرو بصورت زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned} -2A_1 \frac{d^4w_b}{dx^4} - A_3 \frac{d^4w_s}{dx^4} + P \left(\frac{d^2w_b}{dx^2} + \frac{d^2w_s}{dx^2} \right) + q &= 0 \\ -2A_2 \frac{d^4w_s}{dx^4} - A_3 \frac{d^4w_b}{dx^4} + 2A_4 \frac{d^2w_s}{dx^2} + P \left(\frac{d^2w_b}{dx^2} + \frac{d^2w_s}{dx^2} \right) + q &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

معادلات (۲۸) معادلات دیفرانسیل تعادل حاکم بر تیر میکرو ایزوتروپیک می باشند که با استفاده از روش انرژی بدست آمده اند. این معادلات بر پایه یک تئوری تغییر شکل برشی کلی نوشته شده اند. همچنین شرایط مرزی طبیعی نیز بصورت زیر بدست می باشند

$$\begin{aligned} \left[2A_1 \frac{d^3 w_b}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_s}{dx^3} \right] &= 0 \quad \text{or} \quad \delta w_b = 0 \\ \left[2A_2 \frac{d^3 w_s}{dx^3} + A_3 \frac{d^3 w_b}{dx^3} - 2A_4 \frac{dw_s}{dx} \right] &= 0 \quad \text{or} \quad \delta w_s = 0 \\ \left[2A_1 \frac{d^2 w_b}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right] &= 0 \quad \text{or} \quad \delta \left(\frac{dw_b}{dx} \right) = 0 \\ \left[2A_2 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] &= 0 \quad \text{or} \quad \delta \left(\frac{dw_s}{dx} \right) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

معادلات (۲۹)، معادلات حاکم بر تیر میکرو به همراه شرایط مرزی طبیعی می باشند. اکنون می توان با استفاده از روش های تحلیلی یا روش های عددی، معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی بالا را حل نمود. که ما در این تحقیق از روش تحلیلی برای حل معادلات استفاده می کنیم.

۳- حل تحلیل خمش تیر تحت بار عرضی

در این قسمت خمش تیر میکرو تحت بار عرضی بررسی می شود. همچنین از یک روش تحلیلی برای محاسبه خیز و تغییر مکان کلی تیر استفاده می شود. معادلات حاکم بر خمش تیر بصورت زیر ارائه می شوند

$$\begin{aligned} -2A_1 \frac{d^4 w_b}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_s}{dx^4} + q &= 0 \\ -2A_2 \frac{d^4 w_s}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_b}{dx^4} + 2A_4 \frac{d^2 w_s}{dx^2} + q &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

شرایط مرزی تیر، دو سر مفصل ساده در نظر گرفته می شود. برای شرایط مرزی مفصل ساده روابط زیر برقرار می باشند

$$\begin{aligned} w_b(0) &= w_b(L) = 0 \\ w_s(0) &= w_s(L) = 0 \\ \left[2A_1 \frac{d^2 w_b(0)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s(0)}{dx^2} \right] &= \left[2A_1 \frac{d^2 w_b(L)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s(L)}{dx^2} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

در تحلیل خمش، برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل شده (۳۱) با شرایط مرزی مشخص، معادلات (۳۱) را بصورت زیر دوباره باز نویسی می نماییم

$$\begin{aligned} -2A_1 D^4 w_b - A_3 D^4 w_s + q &= 0 \\ -A_3 D^4 w_b + 2(A_4 D^2 - A_2 D^4) w_s + q &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

که در دستگاه بالا D برابر است با

$$\left(D = \frac{d}{dx} \right) \quad (33)$$

و یا بصورت ماتریسی داریم

$$\begin{bmatrix} -2A_1D^4 & -A_3D^4 \\ -A_3D^4 & 2(A_4D^2 - A_2D^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_b \\ w_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ -q \end{bmatrix} \quad (34)$$

حالا دترمینان ضرایب و دترمینان نظیر مجهولات را بصورت زیر تعریف می نمایم

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{bmatrix} -2A_1D^4 & -A_3D^4 \\ -A_3D^4 & 2(A_4D^2 - A_2D^4) \end{bmatrix} = 4A_1(A_2D^8 - A_4D^6) - A_3^2D^8 \\ \Delta_b &= \begin{bmatrix} -q & -A_3D^4 \\ -q & 2(A_4D^2 - A_2D^4) \end{bmatrix} = q(2A_2D^4 - 2A_4D^2 - A_3D^4) \\ \Delta_s &= \begin{bmatrix} -2A_1D^4 & -q \\ -A_3D^4 & -q \end{bmatrix} = q(2A_1D^4 - A_3D^4) \end{aligned} \quad (35)$$

حالا می توان مجهولات را بصورت زیر بدست آورد

$$\begin{aligned} w_b &= \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{q(2A_2D^4 - 2A_4D^2 - A_3D^4)}{4A_1(A_2D^8 - A_4D^6) - A_3^2D^8} \\ w_s &= \frac{\Delta_s}{\Delta} = \frac{q(2A_1D^4 - A_3D^4)}{4A_1(A_2D^8 - A_4D^6) - A_3^2D^8} \end{aligned} \quad (36)$$

پس از حل هر کدام از معادلات جبری بالا، حل نهایی معادلات دیفرانسیل حاکم بصورت زیر می باشن

$$\begin{aligned} w_b(x) &= \frac{-1}{8A_1A_3A_4^2} (A_3^4 - 8A_1A_2A_3^2 + 16A_1^2A_2^2) (C_3e^{-\beta x} + C_4e^{\beta x}) \\ &+ \frac{x^2}{6} (C_5x + C_6) + (C_7x + C_8) + \frac{qx^4}{48A_1} \\ w_s(x) &= \frac{-1}{8A_1A_3A_4^2} (A_3^4 - 8A_1A_2A_3^2 + 16A_1^2A_2^2) (C_3e^{-\beta x} + C_4e^{\beta x}) \\ &+ 2(C_1x + C_2) - \frac{1}{2A_3A_4} (C_1x + C_2) - \frac{1}{2A_3A_4} (4A_1A_2 - A_3^2) (C_5x + C_6) + \frac{qA_3x^2}{8A_1A_4} \end{aligned} \quad (37)$$

که در روابط (۳۷) ضریب زیر استفاده شده است

$$\beta = 2 \left[\frac{A_1 A_4}{4A_1 A_2 - A_3^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

همچنین، همه ضرایب مجهول در روابط (۳۷) از شرایط مرزی (۳۱) بدست می آیند.

۴- تحلیل کمانش تیر تحت بار محوری

در این قسمت کمانش تیر میکرو تحت بار محوری بررسی می شود. همچنین از یک روش تحلیلی برای محاسبه بار بحرانی کمانش تیر استفاده می شود. معادلات حاکم بر تیر میکرو تحت بار مکانیکی محوری بصورت زیر می باشند

$$\begin{aligned} -2A_1 \frac{d^4 w_b}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_s}{dx^4} + P \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) &= 0 \\ -2A_2 \frac{d^4 w_s}{dx^4} - A_3 \frac{d^4 w_b}{dx^4} + 2A_4 \frac{d^2 w_b}{dx^2} + P \left(\frac{d^2 w_b}{dx^2} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

شرایط مرزی تیر، دو سر مفصل ساده در نظر گرفته می شود. برای شرایط مرزی مفصل ساده روابط زیر برقرار می باشند

$$\begin{aligned} w_b(0) = w_b(L) = 0 \\ w_s(0) = w_s(L) = 0 \\ \left[2A_1 \frac{d^2 w_b(0)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s(0)}{dx^2} \right] &= \left[2A_1 \frac{d^2 w_b(L)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_s(L)}{dx^2} \right] \\ \left[2A_1 \frac{d^2 w_s(0)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b(0)}{dx^2} \right] &= \left[2A_2 \frac{d^2 w_s(L)}{dx^2} + A_3 \frac{d^2 w_b(L)}{dx^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

در تحلیل کمانش، برای بدست آوردن حل تحلیلی دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله، جواب معادلات را بصورت سری های زیر در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} w_b(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x \\ w_s(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x \end{aligned} \quad (41)$$

با جا نشین کردن جواب بالا در معادلات حاکم (۳۹) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \left\{ -2A_1 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} A_n - A_3 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} B_n - P \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} B_n \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{L} x &= 0 \\ \left\{ -A_3 \frac{n^4 \pi^4}{L^4} A_n - 2 \left(A_4 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + A_2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) B_n - P \left(\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} B_n \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{L} & \end{aligned} \quad (42)$$

و پس از مرتب کردن روابط بالا بصورت ماتریسی، دستگاه معادلات جبری زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

که در ماتریس بالا ضرایب بصورت زیر می باشند

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{Pn^2\pi^2}{L^2} - \frac{2A_1n^4\pi^4}{L^4} \\ B_{12} = B_{21} &= \frac{Pn^2\pi^2}{L^2} - \frac{A_3n^4\pi^4}{L^4} \\ B_{22} &= \frac{Pn^2\pi^2}{L^2} - \frac{2A_4n^2\pi^2}{L^2} - \frac{2A_2n^4\pi^4}{L^4} \end{aligned} \quad (44)$$

با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس (۴۳) خواهیم داشت

$$\left(\frac{Pn^2\pi^2}{L^2} - \frac{2A_1n^4\pi^4}{L^4} \right) \left(\frac{Pn^2\pi^2}{L^2} - \frac{2A_4n^2\pi^2}{L^2} - \frac{2A_2n^4\pi^4}{L^4} \right) - \left(\frac{Pn^2\pi^2}{L^2} - \frac{A_3n^4\pi^4}{L^4} \right)^2 = 0 \quad (45)$$

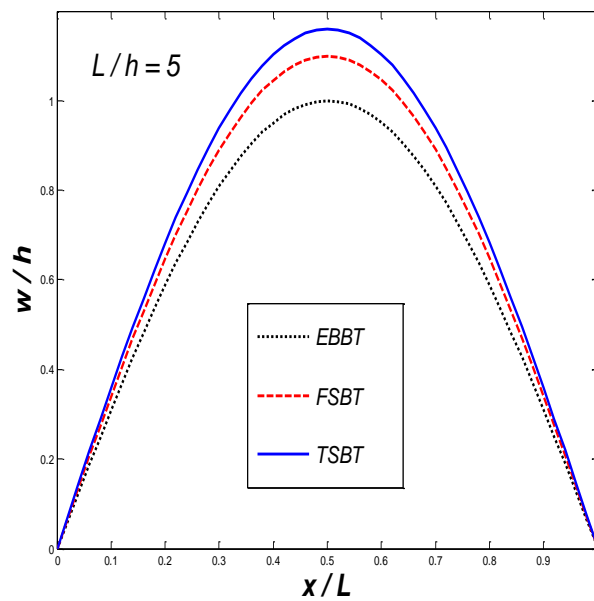
از رابطه (۴۵) بار کمانش بحرانی به ازای ($n=1$) بصورت زیر بدست خواهد آمد

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (4A_1A_2\pi^2 + 4A_1A_4L^2 - A_3^2\pi^2)}{2L^2 (A_1\pi^2 + A_2\pi^2 - A_3\pi^2 + A_4L^2)} \quad (46)$$

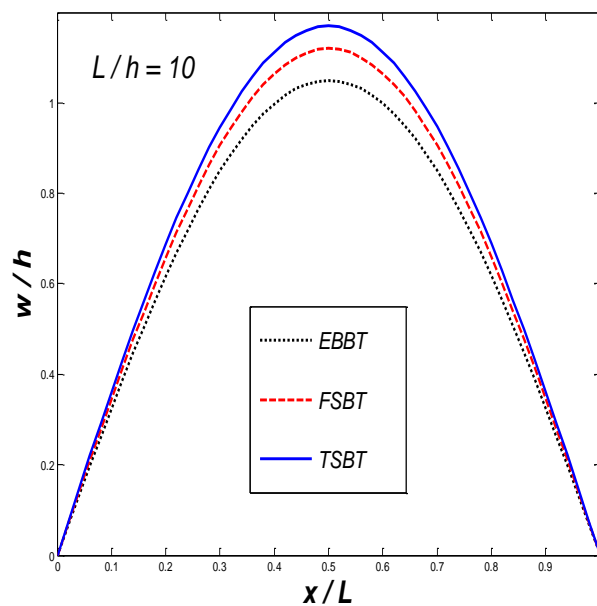
۵- تجزیه و تحلیل عددی

۵-۱- نتایج مربوط به تحلیل خمش تیر

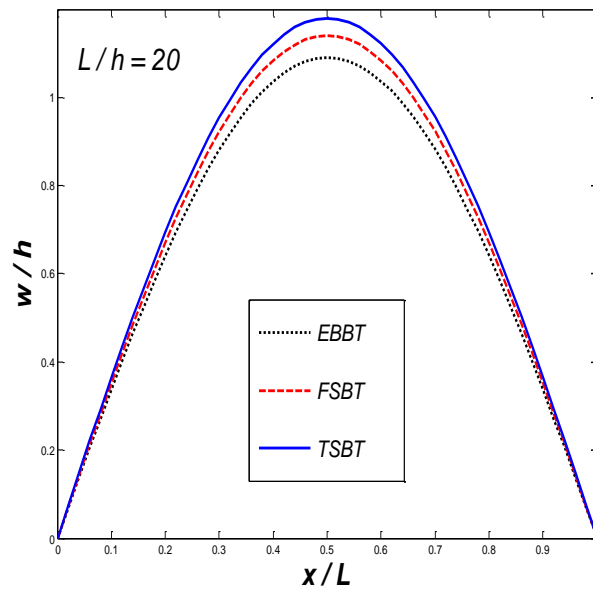
در این بخش نتایج مربوط به تحلیل خمش تیر میکرو بر اساس تئوری های مختلف تغییرشکل برشی ارائه شده اند. در هر شکلی سعی شده است که نتایج حاصل شده از تئوری های مختلف طوری نمایش داده شوند که تفاوت تئوری های مختلف تیرها بخوبی نشان داده شود.



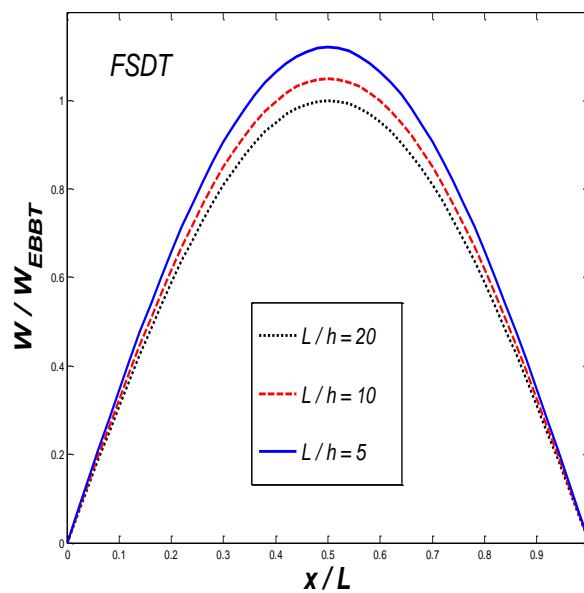
شکل (۱-۵) مقایسه تئوری های مختلف تیرها برای منحنی های تغییرمکان تیر میکرو تحت بار عرضی برای نسبت $(L/h=5)$



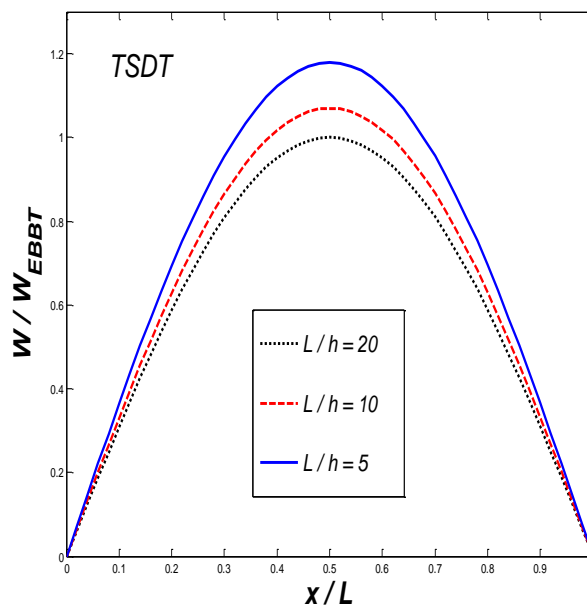
شکل (۲-۵) مقایسه تئوری های مختلف تیرها برای منحنی های تغییرمکان تیر میکرو تحت بار عرضی برای نسبت $(L/h=10)$



شکل (۳-۵) مقایسه تئوری های مختلف تیرها برای منحنی های تغییرمکان تیر میکرو تحت بار عرضی برای نسبت $(L/h=20)$



شکل (۴-۵) اثر نسبت بی بعد (L/h) بر روی منحنی های تغییرمکان تیر میکرو تحت بار عرضی با تئوری مرتبه اول تغییرشکل برشی تیر



شکل (۵-۵) اثر نسبت بی بعد (L/h) بر روی منحنی های تغییر مکان تیر میکرو تحت بار عرضی با تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی تیر

در شکل های (۷-۱) تا (۷-۵) نمودارهای تغییر مکان بی بعد شده بر روی نسبت بی بعد (x/L) نشان داده شده است. در این شکلها اثرات نسبت طول به ضخامت تیر ($L/h=5$) و همچنین تفاوت تئوری های مختلف تیرها در نشان داده شده است. در این شکل ها برای کوتاهی و اختصار از نماد های زیر استفاده شده است. برای تئوری تیر اولر - برنولی نماد (EBBT)، برای تئوری تیر مرتبه اول برشی نماد (FSBT)، و برای تئوری تیر مرتبه سوم برشی از نماد (TSBT) استفاده شده است.

در شکل (۷-۱) نمودار تغییر مکان بی بعد (w/h) بر روی نسبت بی بعد (x/L) نشان داده شده است. در این شکل نسبت طول به ضخامت تیر ($L/h=5$) در نظر گرفته شده است. در این شکل مقایسه ای بین انواع تئوری های تغییر شکل برشی برای تیرها صورت گرفته است. همانطور که از این شکل پیداست حداکثر تغییر مکان تیر در وسط تیر می باشد. همچنین تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم خیز بیشتری نسبت دیگر تئوری ها نشان می دهد. و تئوری کلاسیک اولر - برنولی نیز کمترین خیز را نشان می دهد. همچنین، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی هم مقدار تغییر مکان را بین دو تئوری دیگر نشان می دهد. از این شکل می توان نتیجه گرفت که خیز تیر برای تئوری های مختلف تغییر شکل برشی تفاوت محسوسی دارد.

در شکل (۷-۲) نیز نمودار تغییر مکان بی بعد (w/h) بر روی نسبت بی بعد (x/L) نشان داده شده است. در این شکل نسبت طول به ضخامت تیر ($L/h=10$) در نظر گرفته شده است. در این شکل نیز تفاوت تئوری های مختلف تغییر شکل برشی نشان داده شده است. همانطور که می توان مشاهده کرد در این شکل تئوری های مختلف تیر با یکدیگر متفاوت هستند. و مثل شکل قبل تئوری مرتبه سوم خیز بیشتری را نشان می دهد. و بعد از آن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی نسبت به تئوری اولر - برنولی خیز بیشتری را نشان می دهد. ولی در این شکل تئوری های مختلف با یکدیگر تفاوت های کمتری نسبت به شکل قبلی دارند.

در شکل (۷-۳) نیز نمودار تغییر مکان بی بعد (w/h) بر روی نسبت بی بعد (x/L) نشان داده شده است. در این شکل نسبت طول به ضخامت تیر ($L/h=20$) در نظر گرفته شده است. همانطور که می توان مشاهده کرد در این شکل تئوری های مختلف تیر با یکدیگر تفاوت کمتری نسبت به شکل های قبلی دارند. مثل شکل قبل تئوری مرتبه سوم خیز بیشتری را نشان می دهد و بعد از آن تئوری مرتبه اول نسبت به تئوری اولر - برنولی خیز بیشتری را نشان می دهد.

از این سه شکل می توان نتیجه گرفت که با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) تفاوت تئوری های مختلف تغییر شکل برشی تیرها کمتر می شود. همچنین می توان نتیجه گرفت که تئوری مرتبه سوم ردی در همه حالت ها مقدار خیز بیشتری را

نسبت به دو تئوری دیگر نشان می دهد و بعد از آن نیز تئوری مرتبه اول تیر بیشترین خیز را نشان می دهد. و در نهایت تئوری اولر- برنولی کمترین خیز را نسبت به دو تئوری دیگر نشان می دهد.

در شکل (۷-۴) نمودار تغییر مکان بی بعد (W/W_{EBBT}) بر روی نسبت بی بعد (X/L)، بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی نشان داده شده است. که (W_{EBBT}) حداکثر تغییر مکان تیر (تغییر مکان وسط تیر) بر اساس تئوری اولر- برنولی می باشد. در این شکل اثر نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) بر روی خیز تیر نشان داده شده است. در این شکل مقایسه ای بین منحنی های خیز تیر بر اساس انواع نسبت های (L/h) صورت گرفته است. همانطور که از این شکل پیداست، برای تیر با نسبت طول به ضخامت ($L/h=5$)، تفاوت منحنی مربوطه با دیگر منحنی ها بیشتر می باشد. یعنی در این حالت تئوری مرتبه اول برشی خیز نسبتاً زیاد تری را نسبت به تئوری اولر- برنولی نشان می دهد. برای دیگر نسبت های ضخامت ($L/h=10$)، و ($L/h=20$) نیز به ترتیب، تفاوت خیز تئوری مرتبه اول و تئوری اولر- برنولی کمتر می شود.

در شکل (۷-۵) نمودار تغییر مکان بی بعد (W/W_{EBBT}) بر روی نسبت بی بعد (X/L)، بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی نشان داده شده است. در این شکل نیز اثر نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) بر روی خیز تیر نشان داده شده است. همانطور که از این شکل پیداست، برای تیر با نسبت طول به ضخامت ($L/h=5$)، تئوری مرتبه سوم برشی خیز زیاد تری را نسبت به تئوری اولر- برنولی نشان می دهد. برای دیگر نسبت های طول به ضخامت ($L/h=10$)، و ($L/h=20$) نیز به ترتیب، تفاوت خیز تئوری مرتبه سوم و تئوری اولر- برنولی کمتر می شود.

در مجموع می توان نتیجه گرفت که تئوری مرتبه سوم خیزی بیشتری را نسبت به تئوری مرتبه اول نشان می دهد. و تئوری مرتبه اول نیز خیز بیشتری را نسبت به تئوری اولر- برنولی نشان می دهد.

همچنین می توان نتیجه گرفت که هر چقدر نسبت طول به ضخامت تیر (L/h) کاهش پیدا می کند، تفاوت تئوری های مختلف تیرها برای خمش تیر تحت بار عرضی نیز بیشتر می شود.

۵-۲- نتایج مربوط به تحلیل کمانش تیر

در این بخش نیز نتایج مربوط به تحلیل کمانش تیر میکرو بر اساس تئوری های مختلف تغییر شکل برشی ارائه شده اند. این نتایج برای بار بحرانی که منجر به کمانش تیر میگردد ارائه شده اند در این جداول سعی شده است که نتایج حاصل شده از تئوری های مختلف طوری نمایش داده شوند که تفاوت تئوری های مختلف تیرها بخوبی نشان داده شود.

جدول (۵-۱) بار بحرانی کمانش بی بعد شده ($P^{cr} L^2/EI$) برای تیر میکرو بر اساس تئوری های مختلف تیرها

Theory	L/H=5	L/H=10	L/H=15	L/H=20	L/H=25	L/H=30
EBBT	12.6195	12.9582	13.1214	13.2118	13.2669	13.3030
TSBTF	11.5059	12.6472	12.9970	13.1193	13.2138	13.2764
FSBT	11.7361	12.7120	13.0164	13.1457	13.2270	13.2897

در جدول بالا بار بحرانی کمانش بی بعد شده ($P^{cr} L^2/EI$) برای نسبت های مختلف (L/h) بر اساس تئوری های مختلف برشی نشان داده شده است. همانطور که از این جدول پیداست تئوری مرتبه سوم (TSBT) بار بحرانی کمتری را نسبت به دو تئوری دیگر نشان می دهد. و تئوری مرتبه اول (FSBT) نیز بار کمتری ره نسبت به تئوری اولر- برنولی (EBBT) نشان می دهد. همچنین، با افزایش نسبت (L/h) نیز بار بحرانی به مقدار خیلی ناچیزی افزایش پیدا می کند.

جدول (۲-۵) بار بحرانی کمانش بی بعد شده ($P^{cr} L^2/EI$) برای تیر میکرو بر اساس تئوری های مختلف تیرها

Theory	L/H=5	L/H=10	L/H=15	L/H=20	L/H=25	L/H=30
EBBT	1	1	1	1	1	1
TSBTF	0.912	0.976	0.989	0.993	0.996	0.998
FSBT	0.930	0.981	0.992	0.995	0.997	0.999

در جدول بالا نیز بار کمانش بی بعد شده ($P^{cr}/P^{cr}EBBT$) برای نسبت های مختلف (L/h) بر اساس تئوری های مختلف برشی نشان داده شده است. که ($P^{cr}EBBT$) بار بحرانی کمانش تیر میکرو بر اساس تئوری اولر- برنولی می باشد. در اینجا مشخص است که تئوری مرتبه سوم (TSBT) تفاوت نسبتا بیشتری نسبت به تئوری اولر- برنولی (EBBT) دارد. همچنین، با افزایش نسبت (L/h) نیز تفاوت تئوری های مختلف با یکدیگر کمتر می شود.

۶- مراجع

M. Komijani, S.E. Esfahani, J.N. Reddy, Y.P. Liu, M.R. Eslami, Nonlinear thermal stability and vibration of pre/post-buckled temperature- and microstructure-dependent functionally graded beams resting on elastic foundation. *Composite Structures*, Vol. 112, pp. 292–307, 2014.

1. Huu-Tai Thai, Thuc P.Vo, Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 62, pp. 57-66, 2012.
2. H. Darijani, H. Mohammadabadi, A new deformation beam theory for static and dynamic analysis of microbeams. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 89, pp. 31-39, 2014.
3. A.H. Nayfeh, and S.A. Emam, Exact Solution and Stability of Postbuckling Configurations of Beams. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 54, pp. 395–408, 2008.
4. S.A. Emam, A Static and Dynamic Analysis of the Postbuckling of Geometrically Imperfect Composite Beams. *Composite Structures*, Vol. 90, pp. 247–253, 2009.
5. G.C. Tsiatas. Nonlinear Analysis of Non-uniform Beams on Nonlinear Elastic Foundation, *Acta Mechanica*, Vol. 209, pp. 141-152, 2010.
6. Y. Huang, X.F. Li, Bending and Vibration of Circular Cylindrical Beams with Arbitrary Radial Nonhomogeneity. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 52, pp. 595-601, 2010.
7. S.A. Emam, Analysis of Shear Deformable Composite Beams in Postbuckling. *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 24–30, 2011.
8. A. Fallah, M.M. Aghdam, Nonlinear Free Vibration and Post-buckling Analysis of Functionally Graded Beams on Nonlinear Elastic Foundation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 30, pp. 571-583, 2011.
9. L.S. Ma, D.W. Lee. Exact Solutions for Nonlinear Static Responses of a Shear Deformable FGM Beam under an In-plane Thermal Loading. *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 31, pp. 13-20, 2012.
10. A. Fallah, M.M. Aghdam, Thermo-mechanical Buckling and Nonlinear Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams on Nonlinear Elastic Foundation. *Composites: Part B*, Vol. 43, pp. 1523–1530, 2012.
11. M. Şimşek, Dynamic analysis of an embedded microbeam carrying a moving microparticle based on the modified couple stress theory, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 48, No. 12, pp. 1721-1732, 2010.
12. B. Uymaz, Forced Vibration Analysis of Functionally Graded Beams using Nonlocal Elasticity, *Composite Structures*, Vol. 105, pp. 227-239, 2013.
13. M. Şimşek, H. Yurtcu, Analytical Solutions for Bending and Buckling of Functionally Graded Nanobeams Based on the Nonlocal Timoshenko Beam Theory, *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 378-386, 2013.
14. B. Akgöz, Ö. Civalek, Free Vibration Analysis of Axially Functionally Graded Tapered Bernoulli–Euler Microbeams Based on the Modified Couple Stress Theory, *Composite Structures*, Vol. 98, pp. 314-322, 2013.
15. M. Asghari, M. Rahaeifard, M. Kahrobaiyan, M. Ahmadian, The Modified Couple Stress Functionally Graded Timoshenko Beam Formulation, *Materials & Design*, Vol. 32, No. 3, pp. 1435-1443, 2011.
16. S. Sahmani, M. Bahrami, R. Ansari, Nonlinear Free Vibration Analysis of Functionally Graded Third-Order Shear Deformable Microbeams Based on the Modified Strain Gradient Elasticity Theory, *Composite Structures*, Vol. 110, pp. 219-230, 2014.
17. M. Kahrobaiyan, M. Rahaeifard, S. Tajalli, M. Ahmadian, A Strain Gradient Functionally Graded Euler–Bernoulli Beam Formulation, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 52, pp. 65-76, 2012.

18. B. Akgöz, Ö. Civalek, Buckling Analysis of Functionally Graded Microbeams Based on the Strain Gradient Theory, *Acta Mechanica*, Vol. 224, No. 9, pp. 2185-2201, 2013.
19. L.-L. Ke, Y.-S. Wang, Size Effect on Dynamic Stability of Functionally Graded Microbeams Based on a Modified Couple Stress Theory, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 2, pp. 342-350, 2011.
20. M.R. Eslami, *Thermo-Mechanical Buckling of Composite Plates and Shells*, Amirkabir University Press, 2010.
21. J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Application*, CRC Press, Boca Raton, 2003.
22. D.O. Brush, and B.O. Almorh, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, Mc. Graw-Hill, New York, 1975.
23. S.A. Emam, and A.H. Nayfeh, Postbuckling and Free Vibrations of Composite Beams. *Composite Structures*, Vol. 88, pp. 636-642, 2009.
24. H.S. Shen, *A Two-Step Perturbation Method in Nonlinear Analysis of Beams, Plates and Shells*, John Wiley & Sons Inc, Singapore, 2013.
25. H.S. Shen, A Novel Technique for Nonlinear Analysis of Beams on Two-parameter Elastic Foundations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 11, pp. 999-1014, 2011.
26. H.S. Shen, Thermal Postbuckling Analysis of Imperfect Reissner-Mindlin Plates on Softening Nonlinear Elastic Foundations. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. 33, pp. 259-270, 1998.
27. H.S. Shen, *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press, Boca Raton, 2009.
28. J.N. Reddy, C.D. Chin, Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates, *J. Therm. Stresses*, Vol. 21, pp. 593-626, 1998.
29. Y. Huang, X.F. Li, Buckling of Functionally Graded Circular Columns Including Shear Deformation, *Materials and Design*, Vol. 31, pp. 3159-3166, 2010.
30. G.C. Tsiatas. Nonlinear Analysis of Non-Uniform Beams on Nonlinear Elastic Foundation, *Acta Mechanica*, Vol. 209, pp. 141-152, 2010.
31. L.S. Ma, D.W. Lee. Exact Solutions for Nonlinear Static Responses of a Shear Deformable FGM Beam under an In-plane Thermal Loading. *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 31, pp. 13-20, 2012.
32. D.G. Zhang. Nonlinear Bending Analysis of FGM Beams Based on Physical Neutral Surface and High Order Shear Deformation Theory, *Compos. Struct*, Vol. 100, pp. 121-126, 2013.
33. S.P. Timoshenko and J.M. Gere, *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill, New York. 1961