معادله ماتریسی ریکاتی و کاربرد آن در مکانیک سازه‌ها

مهدی نوری استادیار گروه عمران دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز

E-mail: nouri@iaut.ac.ir*

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۲/۰۵ تاریخ پذیرش نهایی: ۱۳۹۴/۰۲/۲۲

چکیده:

در این مقاله، معادله‌ی ماتریسی ریکاتی برای حل مسئله‌ی مقدار ویژه برای ماتریس‌های متقارن نسبت به هر دو قطر بکار رفته است. برای نیل به این منظور، از تبدیلات متشابه بر روی ماتریس‌هایی با خواص فوق و همچنین از معادله‌ی ماتریسی ریکاتی استفاده شده است. روند کار تجزیه ماتریس‌ها به ماتریس‌هایی با ابعاد کوچک برای محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه متناظر می‌باشد. برای مطالعه کارایی این روش، مثال‌هایی عددی و سازه‌ای ارائه شده است.

کلید واژگان: سد بتنی، بار تصادفی، قابلیت اطمینان عملکردی، روش شبه تحریک

۱-مقدمه

مسئله مقادیر ویژه از بحث‌های مهم در بررسی مسائل مربوط به حیطه‌ی مهندسی است. به عنوان مثال محاسبه مقادیر ویژه حاصل از ماتریس‌های سختی الا ستیک، هند سی و جرم، متناظر با فرکانس‌های ارتعا شی در مطالعه رفتار دینامیکی سازه‌ها و همچنین بارهای کماز شی سازه‌ها در پایداری سازه‌ها امری اجتناب ناپذیر است[۴-۱]

روش‌های متنوع و جامعی برای حل این‌گونه مسائل در بیشینه موضوع مورد بررسی قرار گرفته است، [۷-۵]، لیکن کلی بودن این روش‌ها هزینه‌ی محاسباتی زیادی برای حل مسائل مطرح در مکانیک سازه‌ها به همراه دارد و پژوهشگران می‌کوشند با بکار بردن شرایطی که در مسائل مکانیک سازه‌ها وجود دارد، روش‌های سریعی برای حل اینگونه مسائل ارایه دهند. از جمله این موارد خاصیت ذاتی ماتریس‌های حاصل از مدل سازی سازه‌ها ازجمله مثبت معین بودن آنها و همچنین وجود تقارن و نظم در سازه‌های متقارن می‌باشد.

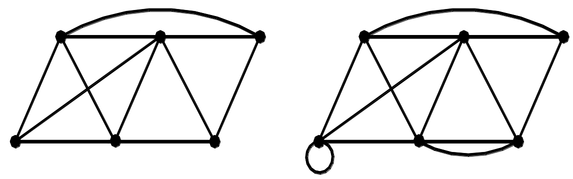
مطالعات گسترده‌ای برای حل سازه‌های متقارن در سال‌های اخیر انجام یافته است، که به کارهای کاوه و سیاری نژاد [۹-۸] و کاوه و سلیم بهرامی اشاره کرد، [۱۰]. روش‌هایی برای محاسبه مقادیر ویژه‌ی سازه های دوار توسط توماس، کاوه و ... انجام یافته است، [۱۸-۱۱]. همچنین روش های متنوع دیگری توسط کاوه و نوری، [۱۹] و نوری برای مسایل متقارن بزرگ ارائه شده است، [۲۰]

معادله‌ی ماتریسی ریکاتی به طور گسترده در کنترل سیستم‌ها، [۲۲-۲۱] خصوصاً کنترل بهین سیستم‌ها مورد استفاده قرار گرفته است، [۲۴-۲۳] و ممکن است جواب منحصر به فردی نداشته باشد،[۲۵] وجود شرایط حل آن نیز مورد توجه بوده است،[۲۸ و ۲۷و ۲۶] در این مقاله ماتریس‌های بلوکی با ساختار ویژه با استفاده از تبدیلات متشابه و همچنین استفاده موثر از معادله ماتریسی ریکاتی به ماتریسی بالا مثلثی تبدیل و تجزیه شده و مقادیر ویژه ماتریسی با ابعاد $2n \times 2n$ به دو ماتریس با ابعاد $n \times n$ محاسبه شده است.

۲-تعاریف پایه از تئوری گراف

۲-۱-تعریف گراف

گراف S عبارت است از مجموعه‌ای از گره‌ها N(S) و مجموعه‌ای از اعضا (شاخه‌ها) M(S) و رابطه تطبیقی است که هر عضو را به دو گره مجزا به نام انتها مربوط می‌سازد، شکل (۱). عضوی که ابتدا و انتهای آن به یک گره وصل باشد، حلقه نامیده می‌شود. دو یا چند عضو که به یک جفت گره مشابه متصل باشند، اعضای چندگانه و یک گراف بدون حلقه و اعضای چندگانه را گراف ساده گویند.



شکل ۱ گراف ساده و غیر ساده

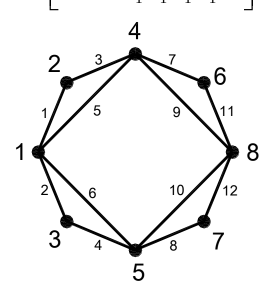
۲-۲-ماتریس‌های وابسته به یک گراف

برای بیان خواص توپولوژیکی یک گراف، از ماتریس‌ها که بهترین ابزار می‌باشند، استفاده می‌شود، ماتریس‌های مجاورت[1] گرهی و لاپلاسین[2] از مهمترین آنها می‌باشند. این ماتریس‌ها در مطالعه‌ی خواص جبری یک گراف مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲-۲-۱- ماتریس مجاورت

اگر S گرافی با n گره باشد، ماتریس *مجاورت* A ماتریسی است $n \times n$ که درایه‌ی ij آن، برابر1 است اگر، گره i با گره j مجاور باشد و در غیر این صورت برابر 0 می‌باشد. اگر گراف ساده باشد، ماتریس مجاورت آن متقارن خواهد بود و مجموع هر سطر و یا ستون ماتریس مجاورت گرهی، درجه آن گره نامیده می‌شود. به عنوان مثال ماتریس مجاورت گرهی گراف شکل (۲) به صورت زیر است:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & \\ 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\ 1 & & 1 & & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & & & & 1 \\ & & & & 1 & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix}. \qquad (۱)$$



شکل (۲) گراف S و ماتریس مجاورت آن

۲-۲-۲-ماتریس درجه گرهی

ماتریس درجه‌ی گرهی[3] یک گراف D، ماتریسی است قطری و $n \times n$، که عناصر قطری درایه‌ی ii، برابر درجه گرهی، گره i باشد. به عنوان مثال ماتریس درجه گرهی گراف شکل (۲) به صورت زیر است:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 4 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 4 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 4 \end{bmatrix}. \qquad (۲)$$

۲-۲-۳- ماتریس لاپلاسین

ماتریس لاپلاسین[4] یک گراف به صورت زیر تعریف می‌شود:

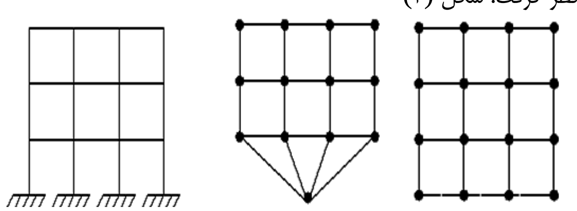
L: (۳)

که در آن D ماتریس درجه‌ی گرهی و A ماتریس مجاورت گرهی می‌باشد. به عنوان مثال ماتریس لاپلاسین گراف شکل (۲) به صورت زیر است:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & -1 & & & & \\ -1 & & 2 & & -1 & & & \\ -1 & -1 & & 4 & & -1 & & -1 \\ -1 & & -1 & & 4 & & -1 & -1 \\ & & & -1 & & 2 & & -1 \\ & & & & -1 & & 2 & -1 \\ & & & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \qquad (۴)$$

۲-۳-ارتباط گراف با مدل ریاضی سازه‌های اسکلتی

گراف یک سازه را با تناظر هر اتصال[3] با یک گره[4]، و هر عضو[5] با یک شاخه[6] به صورت تناظر یک به یک به دست می‌آورند. در مورد یک سازه که در پس خود تثبیت شده است، برای نمایش زمینی که گره‌های پی را در خود دارد، می‌توان شاخه‌های صلب مجازی به مدل گراف افزود و کلیه این گره‌ها را به هم متصل نمود و یا کلیه گره‌ها را به صورت یک گره زمین در نظر گرفت. شکل (۳)



(الف) قاب دو بعدی **(ب) مدل اول با گره مرجع** **(ج) مدل دوم با اعضای مجازی**

شکل (۳) سازه اسکلتی و مدل گراف تئوری آن

1- Adjacency
2- Laplacian
3 – Degree node
4 –Laplasian matrix
5- Connection
6 – Joint
7- Element
8- Chord

در مورد مدل‌های فضایی زمین را می‌توان با یک گره مدل کرد لیکن شاخه های صلب مجازی باید بصورت یک درخت بهم وصل شوند تا درجه‌ی نامعینی مدل و سازه یکسان بماند [۳].

۳-ماتریس‌های دو تقارنه و متقارن فرعی

۳-۱-ماتریس‌های دو تقارنه[۷]

در ریاضیات یک ماتریس مربع دو تقارنه نامیده می‌شود هرگاه نسبت به هر دو قطر متقارن باشد. به عبارت بهتر ماتریس $\mathbf{M}_{n\times n}$ بایستی در شرایط زیر صدق نماید:

(۵)

که در آن ماتریس S به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} & & & 1\\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \qquad (۶)$$

۳-۲-ماتریس‌های متقارن فرعی

در ریاضیات یک ماتریس مربع تقارن فرعی[۸] نامیده می‌شود هرگاه نسبت به قطر فرعی متقارن باشد. به عبارت بهتر ماتریس $\mathbf{M}_{n\times n}$ بایستی در شرایط زیر صدق نماید:

$$M^T=\mathbf{S}M\mathbf{S} \qquad (۷)$$

۴-فرم‌های کانونیکال

ماتریس متقارن n×n با مقادیر حقیقی M را در نظر می‌گیریم، در فرم های کانونیکال مقادیر ویژه ماتریس M با توجه به خواص زیر ماتریس‌های آن بدست آمده است،

۴-۱-فرم کانونیکال نوع اول

در این حالت ماتریس M به صورت الگوی زیر است:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{n*n} & & & \\ & \mathbf{B}_{m*m} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \mathbf{Z}_{s*s}\end{bmatrix}, \qquad (۸)$$

که مقادیر ویژه ماتریس M برابر اجتماع مقادیر ویژه‌ی تمام ماتریس‌های A,B,...,Z می‌باشد:

$$\begin{aligned}&eig[\mathbf{M}]=eig[\mathbf{A}]\cup eig[\mathbf{B}]\cup...\cup eig[\mathbf{Z}]\\&\det[\mathbf{M}]=\det[\mathbf{A}].\det[\mathbf{B}]...\det[\mathbf{Z}]\end{aligned} \qquad (۹)$$

۴-۲- فرم کانونیکال نوع دوم

در این حالت ماتریس M دارای الگوی زیر است:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{n*n} & \mathbf{B}_{n*n} & & \\ \mathbf{B}_{n*n} & \mathbf{A}_{n*n} & \mathbf{B}_{n*n} & \\ & \mathbf{B}_{n*n} & \ddots & \mathbf{B}_{n*n}\\ & & \mathbf{B}_{n*n} & \mathbf{A}_{n*n}\end{bmatrix}_{(nm)*(nm)}, \qquad (۱۰)$$

که اگر λ_i مقادیر ویژه ماتریس K باشد:

(۱۱)

آنگاه مقادیر ویژه ماتریس M به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&eig[\mathbf{M}]=\\&eig[\mathbf{A}+\lambda_1\mathbf{B}]\cup eig[\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{B}]\cup...\cup eig[\mathbf{A}+\lambda_m\mathbf{B}],\\&\det[\mathbf{M}]=\\&\det[\mathbf{A}+\lambda_1\mathbf{B}].\det[\mathbf{A}+\lambda_2\mathbf{B}]...\det[\mathbf{A}+\lambda_m\mathbf{B}].\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

۲-تبدیلات متشابه ماتریس‌ها

عدد مختلط λ_i مقدار ویژه‌ی ماتریس مربع $\mathbf{A}_{n\times n}$ نامیده می‌شود هرگاه بردار غیر صفر $\mathbf{v}_i$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\lambda_i\mathbf{v}_i$ برقرار باشد. بردار $\mathbf{v}_i$ بردار ویژه‌ی ماتریس وابسته به ماتریس A نامیده شده و مجموعه‌ی $\lambda_i,\mathbf{v}_i$ تجزیه‌ی طیفی A نامیده می‌شود. اسکالر λ_i مقدار ویژه‌ی A نامیده می‌شود که در رابطه $\det(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})=0$ کند و زمانی این رابطه برقرار است که λ_i ریشه‌ای از چند جمله‌ای مشخصه باشد. دو ماتریس A,B را متشابه گویند که ماتریس غیر منفرد U را بتوان یافت که در رابطه‌ی زیر صدق نماید:

$$\mathbf{B}=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} \qquad (۱۳)$$

نگاشت $A\rightarrow B$ تبدیل متشابه خوانده می شود. می‌توان نشان داد که در تبدیل متشابه مقادیر ویژه تغییر نمی‌نماید، [8] .

7- bisymmetric

8- persymmetric

۶-معادله ماتریسی ریکاتی

ماتریس مربعی شکل $\mathbf{A}$ به فرم زیر فرض می‌شود:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad (۱۴)$$

که در آن $\mathbf{A}_{11}$، $\mathbf{A}_{22}$ ماتریس های مربع می‌باشند. اگر ماتریس بالا مثلثی $\mathbf{U}$ به صورت زیر باشد:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad (۱۵)$$

واضح است که

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{X} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad (۱۶)$$

بنابراین ماتریس $\mathbf{A}$ متشابه $\mathbf{U^{-1}AU}$ است.

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{AU} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{X} & \mathbf{A}_{12} \\ -\mathbf{XA}_{12}\mathbf{X} - \mathbf{XA}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{X} + \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{XA}_{12} \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

بدیهی است اگر $\mathbf{X}$ را طوری در نظر گیریم که:

$$-\mathbf{XA}_{12}\mathbf{X} - \mathbf{XA}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{X} + \mathbf{A}_{21} = 0 \qquad (۱۸)$$

آنگاه:

$$eig(\mathbf{A}) = eig(\mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{X}) \cup eig(\mathbf{A}_{11} - \mathbf{XA}_{12}). \qquad (۱۹)$$

معادله $-\mathbf{XA}_{12}\mathbf{X} - \mathbf{XA}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{X} + \mathbf{A}_{21} = 0$ معادله ماتریسی ریکاتی نامیده می شود. حل معادله ماتریسی ریکاتی با توجه به کاربردهای فراوان و کلیدی آن در علوم مختلف مد نظر پژوهشـــگران فراوانی بوده است، [۲۸–۲۱]. پاتر در سال ۱۹۶۶ یک حالت خاص آن را حل کرد اما حل کلی آن تا کنون انجام نیافته است، [۲۱].

۷-تجزیه‌ی ماتریس‌های دو تقارنه

ماتریس دو تقارنه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \qquad (۲۰)$$

ماتریس $\mathbf{M}$ ماتریسی دو تقارنه بوده بنابراین بایستی در شرایط زیر صدق نماید

$$\mathbf{SBS} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \qquad (۲۱)$$
$$\mathbf{AS} = \mathbf{SA}.$$

در این حالت خاص $\mathbf{X=S}$ یکی از جواب‌های معادله ماتریسی ریکاتی

$$-\mathbf{XBX} - \mathbf{XA} + \mathbf{AX} + \mathbf{B}^{T} = 0. \qquad (۲۲)$$

می‌باشد پس :

$$eig(\mathbf{M}) = eig(\mathbf{A} + \mathbf{BS}) \cup eig(\mathbf{A} - \mathbf{SB}). \qquad (۲۳)$$

۸-مثال‌های عددی

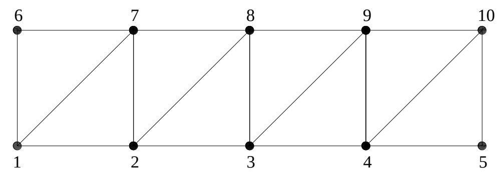
مثال ۱ : زیر ماتریس‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

در این مثال ماتریس $\mathbf{A}$ متقارن بوده و $\mathbf{B}$ نسبت به قطر فرعی متقارن می باشد بنابراین فرم تجزیه شده‌ی $\mathbf{M}$ به صورت زیر قابل بیان است.

$$eig(\mathbf{M}) = eig(\mathbf{A} + \mathbf{BS}) \cup eig(\mathbf{A} - \mathbf{BS}) = \begin{pmatrix} -0.3274 \\ 4.0000 \\ 18.3274 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} -9.1328 \\ 1.1598 \\ 13.9731 \end{pmatrix}.$$

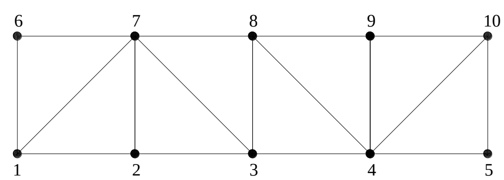
مثال ۲: در این مثال ماتریس $\mathbf{M}$ را ماتریس مجاورت و لاپلاسین سازه‌های خرپایی زیر فرض می‌کنیم.



شکل ۴ مدل گراف خرپای S

$$Adj(S)=\begin{bmatrix} & 1 & & & & 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & & & 1 & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 & \\ & & 1 & & 1 & & & & 1 & 1 \\ & & & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & & & \\ 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & 1 & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 1 & & & & 1 & \end{bmatrix},$$

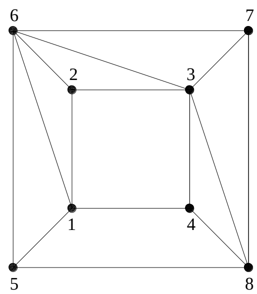
$$Lap(S)=\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & -1 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & & -1 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & & -1 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 & & & & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & & & & & -1 \\ -1 & & & & & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & & & & -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & -1 & & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & -1 & & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & -1 & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}$$



شکل ۵ مدل گراف خرپای N

$$Adj(N)=\begin{bmatrix} & 1 & & & & 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & 1 & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & 1 & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 1 & & & & 1 & \end{bmatrix},$$

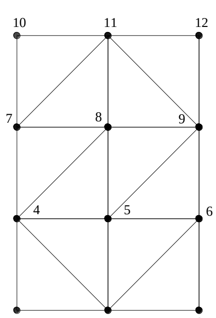
$$Lap(N)=\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & -1 & -1 & & & \\ -1 & 3 & -1 & & & & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & -1 & -1 & & \\ & & -1 & 5 & -1 & & & -1 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & & & & & -1 \\ -1 & & & & & 2 & -1 & & & \\ -1 & -1 & -1 & & & -1 & 5 & -1 & & \\ & & -1 & -1 & & & -1 & 4 & -1 & \\ & & & -1 & & & & -1 & 3 & -1 \\ & & & -1 & -1 & & & & -1 & 3 \end{bmatrix},$$



شکل ۶ مدل گراف خرپایP

$$Adj(P)=\begin{bmatrix} & 1 & & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & & 1 & & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 & & & & & 1 \\ 1 & & & & & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & & 1 & \end{bmatrix},$$

$$Lap(P)=\begin{bmatrix} 4 & -1 & & -1 & -1 & -1 & & \\ -1 & 3 & -1 & & & -1 & & \\ & -1 & 5 & -1 & & -1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 3 & & & & -1 \\ -1 & & & & 3 & -1 & & -1 \\ -1 & -1 & -1 & & -1 & 5 & -1 & \\ & & -1 & & & -1 & 3 & -1 \\ & & -1 & -1 & -1 & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$



شکل ۷ مدل گراف خرپای Q

$$Adj(Q)=\begin{bmatrix} & 1 & & 1 & & & & & & & & \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & 1 & & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & 1 & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & 1 & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & & 1 & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ & & & & & & & & 1 & & 1 & \end{bmatrix},$$

$$Lap(Q)=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & & & & & & \\ & -1 & 2 & & & -1 & & & & & & \\ -1 & -1 & & 5 & -1 & & -1 & -1 & & & & \\ & -1 & & -1 & 5 & -1 & & -1 & -1 & & & \\ & -1 & -1 & & -1 & 4 & & & -1 & & & \\ & & & -1 & & & 4 & -1 & & -1 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & & -1 & 5 & -1 & & -1 & \\ & & & & -1 & -1 & & -1 & 5 & & -1 & -1 \\ & & & & & & -1 & & & 2 & -1 & \\ & & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

در تمامی مثال‌های فوق ماتریس Adj و Lap تجزیه شده و نصف ماتریس حل و مقادیر ویژه محاسبه می‌گردد و نیازی به حل کل ماتریس نمی‌باشد.

مثال ۳

ماتریس $\mathbf{M}$ به فرم زیر فرض می‌شود

$$\mathbf{M}=\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{A}+\mathbf{B}-\mathbf{C} \end{array}\right],$$

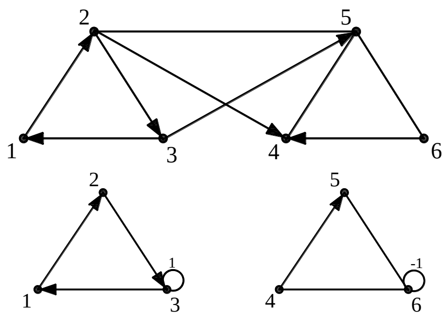
آنگاه در این حالت خاص $\mathbf{X}=\mathbf{I}$ یکی از جوابهای معادله ماتریسی ریکاتی است:

$$-\mathbf{XBX}-\mathbf{XA}+(\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{X}+\mathbf{C}=\mathbf{0},$$
$$\mathrm{eig}(\mathbf{M})=\mathrm{eig}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cup\mathrm{eig}(\mathbf{A}-\mathbf{C}).$$

مقادیر ویژه $\mathbf{M}$ با استفاده از روش پیشنهادی مبتنی بر تجزیه قابل محاسبه است. بررسی مثال‌های حل شده نشان می‌دهد کارایی روش پیشنهادی فراتر از فرم‌های کانونی حل شده در مراجع معرفی شده می‌باشد.

مثال ۴

ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار زیر به فرم زیر است



شکل ۸ گراف S و تجزیه شده‌ی آن

$$Adj(S)=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

و ماتریس مذکور به صورت زیر تجزیه می‌شود

$$\mathrm{eig}(Adj(S))=\mathrm{eig}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cup\mathrm{eig}(\mathbf{D}-\mathbf{B})=$$
$$\mathrm{eig}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cup\mathrm{eig}(\mathbf{A}-\mathbf{C}),$$

$$eig(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cup eig(\mathbf{A}-\mathbf{C})=$$
$$eig(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix})\cup eig(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}),$$

$$\begin{bmatrix} 2.1479 \\ -0.5739+0.3690i \\ -0.5739-0.3690i \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} 0.7549 \\ -0.8774+0.7449i \\ -0.8774-0.7449i \end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\mathrm{eig}(\mathrm{Adj}(S))=\begin{bmatrix} 2.1479 \\ 0.7549 \\ -0.8774+0.7449i \\ -0.8774-0.7449i \\ -0.5739+0.3690i \\ -0.5739-0.3690i \end{bmatrix}$$

فرم تجزیه شده و اصلاح یافته‌ی آن در شکل ۸ نشان داده شده است. شایان توجه است که گراف مورد نظر پیچیده تر از گراف‌هایی است که

توسط فرم‌های کانونی قبلی تجزیه شده است و توسط فرم‌های کانونی قبلی این گراف تجزیه‌ناپذیر است.

۹-نتایج

ایده اصلی این مقاله گسترش کارهای انجام یافته در مورد فرم‌های کانونی بوده و مبنای روش ارائه شده معادله ماتریسی ریکاتی می‌باشد. ماتریس‌های حاصل از بررسی سازه‌های متقارن و منظم دارای ساختار ماتریسی منطبق بر فرم‌های کانونی بوده و با روش‌های ابتکاری حل طیفی آن امکان‌پذیر است. با استفاده از تبدیلات متشابه بر روی اینگونه ماتریس‌ها، می‌توان ماتریس را به ماتریس بالا مثلثی تبدیل و مقادیر ویژه را با هزینه محاسباتی کمتری محاسبه کرد. در این مقاله نشان داده شده است که فرم-های کانونی حالت خاصی از حل معادله ریکاتی بوده و توسط آن حل طیفی سازه‌های پیچیده‌تر نیز ممکن است. روش ارایه شده زمان و هزینه محاسباتی لازم برای محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه را کاهش می‌دهد. روش حاضر قابل استفاده در محاسبه پریود ارتعاشی و بارها و مدهای کمانشی و ارتعاشی سازه‌های متقارن و منظم می‌باشد. در حالت کلی این روش در هر مسئله‌ای که منجر به محاسبه‌ی مقادیر و بردارهای ویژه باشد، قابل استفاده می‌باشد.

۱۰-منابع

[1]- Bathe KJ, Wilson EL. Numerical Methods for Finite Element Analysis. Prentice Hall: Englewood Cli_s, NJ, 1976.
[2]- A. Kaveh, M. Nouri and Taghizadieh, Eigensolution for Adjacency and Laplacian Matrices of Large Repetitive Structural Models, Scientia Iranica, No. 6, 16(2009) 481-489.
[3]- Kaveh A. Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods (3rd edn). Research Studies Press: U.K., 2004.
[4]- Shen Y. Vibration of Rotationally Periodic Structures. Journal of Sound and Vibration, Volume 172, Issue 4, 12 May 1994, Pages 459-470.
[5]- Jennings A, McKeown JJ. Matrix Computation. Wiley: New York, 1992.
[6]- Livesley RK. Mathematical Methods for Engineers. Ellis Horwood Ltd.: Chichester, U.K., 1989.
[7]- R. A. Horn and C. R. Johnson. Topics in matrix analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Corrected reprint of the 1991 original.
[8]- Kaveh A, Sayarinejad MA. Eigensolutions for matrices of special patterns. Communications in Numerical Methods in Engineering 2003; 19:125 –136.
[9]- Kaveh A, Sayarinejad MA. Eigensolutions for factorable matrices of special patterns. Communications in Numerical Methods in Engineering 2004; 20:133 – 146.
[10]- Kaveh A, Slimbahrami B. Eigensolution of symmetric frames using graph factorization. Communications in Numerical Methods in Engineering 2004;20: 889-910.
[11]- Thomas D.L. Dynamics of rotationally periodic structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979,14,81-102.
[12]- Williams F.W. An algorithm for exact eigenvalue calculations for rotationally periodic structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986,23,609-622.
[13]- Williams F.W. Exact eigenvalue calculations for rotationally periodic sub-structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986,23,695-706.
[14]- Aghayere A.O. Structural Systems with Polar Symmetry: Solution by Quasi-circulant Matrices, M.Sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, March 1983.
[15]- Kaveh A., Rahami H. Block diagonalization of adjacency and Laplacian matrices for graph product; applications in structural mechanics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006,68,33-63.
[16]- Kaveh A., Rahami H. Topology and graph products; eigenproblems in optimal structural analysis, Communications in Numerical Methods in Engineering, 2008,24,929-945.
[17]- Kaveh A., Rahami H. Tri-diagonal and penta-diagonal block matrices for efficient eigensolutions of problems in structural mechanics, Acta Mechanica, 2007,192,77-87.
[18]- Kaveh A., Nemati F. Eigensolution of rotationally repetitive space structures using a canonical form, Communications in Numerical Methods in Engineering, DOI: 10.1002/cam.1265, 20 May 2009.
[19]- Kaveh A., Nouri M. and Taghizadieh N.: An efficient solution method for the free vibration of large repetitive space structures. *Advances in Structural Engineering*, **14**(2011)151-161.
[20]- Nouri M.: Free vibration of large regular repetitive structural structures, *International Journal of Science and Engineering Investigations*, Volume 1, Issue *1*, 2012, Pages 92-96.
[21]- Potter, J. E. 1966. Matrix quadratic solutions. SIAM J. Appl. Math. 14: 496-501.
[22]- Zhou K M, Doyle J, Glover K. Robust and Optimal Control. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
[23]- Lin Z L. Global control of linear systems with saturating actuators. Automatica, 1998, 34(7): 897-905.
[24]- D. A. Bini, B. Iannazzo, B. Meini, and F. Poloni. Nonsymmetric algebraic Riccati equations associated with an M-matrix: recent advances and algorithms. In Dagstuhl Seminar Proceedings, "Numerical Methods for Structured Markov Chains", 07461, 2007.

[25]- C.-H. Guo. Nonsymmetric algebraic Riccati equations and Wiener-Hopf factorization for M-matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl*., 23(1):225_242 (electronic), 2001.

[26]- Ni M L. A note on the maximum solutions of Riccati equations. Automatica, 1991, 27(6): 1059-1060

[27]- Ni Mao-Lin. Design of Robust Control Systems: Theory and Applications [Ph. D. dissertation], Chinese Academy of Space Technology, 1992 (in Chinese).

[28]- C.-H. Guo and A. J. Laub. On the iterative solution of a class of nonsymmetric algebraic Riccati equations. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 22(2):376_391 (electronic), 2000.

Algebraic Ricatti matrix equation and its application in structural mechanics

Mahdi.nouri
Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Tabriz Branch, Tabriz, Iran

ABSTRACT:

In this paper the algebraic Riccati matrix equation is used for eigen-decomposition of per-symmetric matrices. This is achieved by similarity transformation and using the algebraic Riccati matrix equation. The process is the decomposition of matrices into small and specially structured sub-matrices with low dimensions for easy finding of eigenpairs. Example show the efficiency of the proposed method.