مقاله تحقیقی

مدل‌سازی روش تکامل طبیعی برای حل مسائلی در حسابان فازی

غلام‌حسن شیردل*

گروه ریاضی و علوم‌کامپیوتر، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران

محل انجام تحقیق: گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه قم

***مسئول مکاتبات:** پست الکترونیکی: Shirdel81math@gmail.com

چکیده

در این مقاله با داشتن مقادیر یک تابع وزن در n نقطه، یک اندازه فازی پارامتری تعریف می‌کنیم. با استفاده از خواص اندازه فازی یک معادله طراحی کرده که با حل آن پارامتر اندازه فازی بدست می‌آید. معادله طراحی شده را با یک الگوریتم ژنتیک حل کرده و بدینوسیله امکان حل انتگرال‌های فازی را ایجاد می‌کنیم.

کلمات کلیدی: اندازه فازی، انتگرال فازی، الگوریتم ژنتیک

مقدمه

در مواردی از یک تابع وزن برای رتبه‌بندی، مقایسه و انتخاب استفاده می‌شود (۱-۷). رتبه‌بندی، مقایسه و انتخاب می‌تواند به روش‌های متفاوتی انجام گیرد (۴،۵،۷،۸). داده‌ها در بسیاری از سیستم‌هایی که باید در آن‌ها فرآیند رتبه‌بندی، مقایسه و انتخاب انجام شود، فازی هستند. به همین جهت لازم است روش‌هایی طراحی شوند که بتوانیم با اجرای آن‌ها روی داده‌های فازی انتخاب مناسبی انجام دهیم (۱-۳). یکی از این روش‌ها ساختن یک اندازه و انتگرال فازی است. در این مقاله یک اندازه فازی پارامتری تعریف کرده، سپس با استفاده از آن یک نوع از انتگرال‌های فازی را حل می‌کنیم (۱۴-۹). حل انتگرال‌های فازی فوق نیاز به داشتن مقدار پارامتر اندازه فازی دارد. برای بدست آوردن پارامتر فوق از خواص اندازه فازی استفاده کرده و یک معادله غیرخطی دو مجهولی بدست می‌آوریم. سپس برای حل معادله بدست آمده با مدل‌سازی روش تکامل طبیعی، یک الگوریتم ژنتیک طراحی کرده و با اجرای آن جواب‌های تقریبی مناسب بدست می‌آوریم.

مفاهیم پایه‌ای

در این بخش، مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز برای بخش‌های بعد را بیان می‌کنیم.

تعریف: اندازه فازی [15]: فرض کنید X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های X باشد. تابع مجموعه‌ای $g : P(X) \to [0,1]$ یک اندازه فازی نامیده می‌شود، هر گاه:

۱. $g(\phi) = 0$

۲. $g(X) = 1$

۳. برای هر $A, B \in P(X)$، اگر $A \subset B$، آنگاه $g(A) \le g(B)$

۴. در $P(X)$، اگر $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$، آنگاه $\lim_{i\to\infty} g(A_i) = g(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

۵. در $P(X)$، اگر $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$، آنگاه $\lim_{i\to\infty} g(A_i) = g(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$.

اکنون اندازه فازی پارامتری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فصلنامه علمی پژوهشی دانش زیستی ایران
جلد ۱۰- شماره ۳- پاییز ۱۳۹۴

تعریف۲ [۱۵]: تابع مجموعه‌ای $g_\lambda : P(X) \to [0,1]$ یک λ-اندازه فازی نامیده می‌شود اگر وتنها اگر وجود داشته باشد پارامتر λ بطوریکه $\lambda \in (-1,\infty)$ و

(۱)

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B)$$

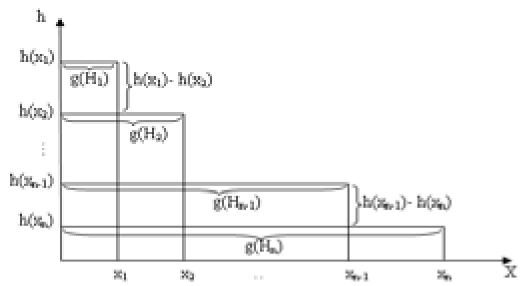
که $A, B \in P(X)$ و $A \cap B = \phi$.

انتگرال فازی: فرض کنید که $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ و g یک اندازه فازی روی X باشد. انتگرال تابع $h : X \to [0,1]$ نسبت به g بصورت

$$\int hdg := \sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - h(x_{i+1})) g(H_i) \quad \text{تعریف}$$

می‌شود که در مجموع فوق $H_i = \{x_1, x_2, ..., x_i\}$، $h(x_{n+1}) = ۰$ و پس از یک تجدید ارایش مناسب می توان بدون کاسته شدن از کلیت مساله فرض کرد که $0 \le h(x_n) \le h(x_{n-1}) \le ... \le h(x_1) \le 1$.

شکل۱ درک مفهوم تعریف انتگرال فازی فوق را ساده می‌کند [۱۴].



شکل۱: مفهوم پایه‌ای انتگرال فازی

لم۱. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$، در این صورت برای هر اندازه فازی g روی X و برای هر تابع $h : X \to [0,1]$ داریم:

$$\int hdg := \sum_{i=1}^{n} h_i dg_i$$

اثبات: برطبق تعریف انتگرال فازی داریم:

$$\int hdg := \sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - h(x_{i+1})) g(H_i)$$

حال از آن جا که $h(x_{n+1}) = 0$، $g_0 = g(\phi) = 0$ و $g(X) = g(H_n) = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (h_i - h_{i+1}) g_i &= \sum_{i=1}^{n} h_i g_i - \sum_{i=1}^{n} h_{i+1} g_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i g_i - \sum_{i=2}^{n+1} h_i g_{i-1} \\
&= h_1 g_1 + \sum_{i=2}^{n} h_i g_i - \sum_{i=2}^{n} h_i g_{i-1} - h_{n+1} g_n \\
&= h_1 g_1 - h_1 g_0 + \sum_{i=2}^{n} h_i (g_i - g_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i (g_i - g_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} h_i dg_i . \square
\end{aligned}$$

محاسبه انتگرال فازی

برای محاسبه انتگرال فازی باید پارامتر اندازه فازی را تعیین کنیم. برای این منظور با فرض اینکه w_i برای $i = 1,2,...,n$، n مقدار یک تابع وزن باشد، قرار می‌دهیم:

$$g_i = g(\{x_i\}) = cw_i, \qquad i = 1,2,...,n \quad (۲)$$

که c یک عدد حقیقی ثابتی می‌باشد. اکنون با توجه به فرض $g(X) = 1$ و روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned}
& c\sum_{\alpha_1=1}^{n} w_{\alpha_1} + c^2 \lambda \sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1 \\ \alpha_1 \ne \alpha_2, \alpha_1 < \alpha_2}}^{n} w_{\alpha_1} w_{\alpha 2} \\
& + c^3 \lambda^2 \sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1 \\ \alpha_1 \ne \alpha_2 \ne \alpha_3, \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3}}^{n} w_{\alpha_1} w_{\alpha 2} w_{\alpha 3} + ... + \\
& c^n \lambda^{n-1} \prod_{\alpha_i=1}^{n} w_{\alpha_i} - 1 = 0 \qquad (۳)
\end{aligned}$$

رابطه (۳) یک معادله غیرخطی دو مجهولی می‌باشد. آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

(۴)

$$F(c,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i c^i \lambda^{i-1} - 1 = 0$$

که $a_1 = \sum_{\alpha_1=1}^{n} w_{\alpha_1}$، $a_2 = \sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1 \\ \alpha_1 \ne \alpha_2, \alpha_1 < \alpha_2}}^{n} w_{\alpha_1} w_{\alpha 2}$، $a_3 = \sum_{\substack{\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1 \\ \alpha_1 \ne \alpha_2 \ne \alpha_3, \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3}}^{n} w_{\alpha_1} w_{\alpha 2} w_{\alpha 3}$، ...، $a_n = \prod_{\alpha_i=1}^{n} w_{\alpha_i}$.

برای معادله (۴) یک الگوریتم ژنتیک طراحی می‌کنیم تا مقادیر λ و c را با دقت از پیش تعیین شده‌ای تقریب بزنند.

```
X = X(1);
Y = Y(1);
c(X) = c(SX);
lamda(Y) = lamda(SY);
Fit(X,:) = Fit(SX,:);
Fit(:,Y) = Fit(:,SY);
Fit = Fit(1 : SX-1,1 : SY-1);
end
Gen = Gen + 1;
function Fitness =
Fitness_FCL(n,k,alfa,lamda)
for X = 1 : k
for Y = 1 : k
Fitness(X,Y) = 0;
for i = 1 : n
Fitness(X,Y)=Fitness(X,Y)+
alfa*(c(x)^i)*(lamda(Y)^(i-1));
end
Fitness(X,Y) = Fitness(X,Y) – 1;
end
end
function alfa = Producealfa(n,w)
alfa(1 : n) = 0;
for X = 1 : n
start_index(1 : X) = 1 : X;
stop_index(1 : X) = n - X + 1 : n;
while start_index(1) <= stop_index(1)
c = 0;
P = 1;
for z = 1 : X;
P = P*W(start_index(z));
end
alfa(X) = alfa(X) + P;
z = 1;
while z <= X && c = 0
if start_index(z) = stop_index(z)
if z = 1 && isempty(find(start_index =
stop_index) = 0))
start_index(z)=start_index(z)+1;
c = 1;
else
start_index(z-1)=start_index(z-1)
+ 1;
start_index(z:x)=start_index(z-1)
+ 1 : start_index(z-1) + X – z + 1;
c = 1;
end
end
```

الگوریتم $\lambda - c$-ژنتیک

Begin
Best_c = 0;
Best_lamda = 0;
alfa = Producealfa(n,w);
for i = 1 : k

$c(i) = \frac{i}{k}$;

End

$t = \frac{k}{3}$;

For i = 1 : t

$\text{lamda}(i) = \frac{-i}{t}$;

$\text{lamda}(i+t) = \frac{i}{t}$;

$\text{lamda}(i) = i + 2 * t = i\text{^}2 + 1$;

End
Term = 0;
nk = 3*k;
Gen = 1;
while Term ~= 1 && Gen <= 100
for i = 1 : k
X = rand i(k,1,2,);
l = X(1);
f = X(2);

$c(k+i) = (c(l) + c(f))/2$;

$c(2*k+i) = c(l) * c(f)$;

$\text{lamda}(k+i) = (\text{lamda}(l) + \text{lamda}(f))/2$;

$\text{lamda}(2*k+i) = abs(\text{c}(l) * \text{c}(f))$;

End
Fit = Fitness_FCL(n,nk,alfa,c,lamda);
for i = 1 : nk
for j = 1 : nk
if abs(Fit(i,j)) <= (10^(-Ep))
Term = 1;
Best_c = c(i);
Best_lamda = lamda(j);
end
end
end
i = nk;
while i > k
[SX,SY] = size(Fit);
Max = Max(Max(abs(Fit)));
[X,Y] = find(abs(Fit) = Max);

```
z = z + 1;
end
z = z -1;
if z=X && start_index(z)<stop_index(z) &
c=0
start_index(z) = start_index(z) + 1;
end
end
end
```

مثال: در نظر بگیرید $X=\{1,2,3\}$، $g_\lambda : P(X) \to [0,1]$ و $h: X \to [0,1]$ که $h(x)=e^{-x}$ و $w_1=w_2=w_3=\frac{1}{3}$. بنابراین داریم:

$w_1+w_2+w_3=1$ ، $w_1w_2+w_1w_3+w_2w_3=\frac{1}{3}$ ،

$$w_1w_2w_3=\frac{1}{27}$$

اکنون با توجه به مقادیر فوق معادله غیرخطی دو مجهولی به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$c+\frac{1}{3}c^2\lambda+\frac{1}{27}c^3\lambda^2-1=0$$

این معادله را با اجرای الگوریتم $\lambda - c$-ژنتیک ارائه شده حل کرده و مقادیر تقریبی برای λ و c بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$c=\frac{1}{2} \text{ و } \lambda=5$$

با استفاده از مقادیر تقریبی بدست آمده برای λ و c داریم:

$$g_1=\frac{1}{6},\ g_2=\frac{1}{6},\ g_3=\frac{1}{6},\ g(\{x_1,x_2\})=\frac{17}{36},$$

$$g\{x_1,x_2,x_3\}=\frac{223}{216},$$

$$\int hdg = \sum_{i=1}^{3}(h(x_i)-h(x_{i+1}))g(H_i)=0.128$$

تقدیر و تشکر

از زحمات و راهنمایی های بی شائبه داوران گرامی، سردبیر و مدیر مسئول محترم تشکر و قدردانی می نمایم.

منابع مورد استفاده

1. Feng, C.M., Wu, P. G., Chia, K. C., 2009. A hybrid fuzzy integral decision-making model for locating manufacturing centers in China: A case study European Journal Operational Research 192: 451-464.
2. Grabisch, M., 1996. The application of fuzzy integrals in multi-criteria decision making. European Journal of Operational Research 89 (3): 445-456.
3. Grabisch, M., 1995. Fuzzy integral in multi-criteria decision making. Fuzzy Sets and Systems 69: 279-298.
4. Liginlal, D., Ow, T. T., 2006. Modeling attitude to risk in human decision processes: an application of fuzzy measures. Fuzzy Sets and Systems 157: 3040-3054.
5. Narukawa, Y., Torra, V., 2007. Fuzzy measures and integrals in evaluation of strategies. Information Sciences 177: 4686-4695.
6. Tzeng, G. H., Yang, Y. P. Q., Lin, C. T., Chen, C. B., 2005. Hierarchical MADM with fuzzy integral for evaluating enterprise. Information Sciences 169: 409-426.
7. Wierzchon, S. T., 1983. An algorithm for identification of fuzzy measure. Fuzzy Sets and Systems 9: 69-78.
8. Onisawa, T., Sugeno, M., Nishiwaki, M. Y., Kawai, H., Harima, Y., 1986. Fuzzy measure analysis of public attitude towards the use of nuclear energy. Fuzzy Sets and Systems 20: 259-289.
9. Basile, A., 1987. Sequential compactness for sets of sugeno fuzzy measures. Fuzzy Sets and Systems 21: 243-247.
10. Chu, M. T., Shyu, J. Z., Tzeng, G. H., 2007. Using Non-Additive Fuzzy Integral to Assess Performances of Organization Transformation via Communities of Practice. IEEE Transactions on Engineering Management 54 (2): 237-339.
11. Galand, L., Perny, P., Spanjaard, O., 2010. Choquet-based optimization in multi-objective shortest path and spanning tree problems. European Journal of Operational Research 204 (2): 303-315.
12. Hu, Y. C., 2008. Non-additive grey single-layer perceptron with choquet integral for pattern classification problems using genetic algorithms. Neurocomputing 72: 331-340.
13. Leszczynski, K., Penczek, P., Grochuliski, W., 1985. Sugeno's fuzzy measure and fuzzy clustering Fuzzy Sets and Systems 15: 147-158.
14. Murofushi, T., Sugeno, M., 1989. An interpretation of fuzzy measure and the Choquet integral as an integral with respect to a non-additive measure. Fuzzy Sets and systems 29: 201-227.
15. Grabisch, M., 2000. Fuzzy measures and integrals, Springer Verlag.