Technical Strategies in Water Systems
https://sanad.iau.ir/journal/tsws
ISSN (Online): 2981-1449
Summer 2024: Vol 2, Issue 2
https://doi.org/10.30486/TSWS.2024.1187653

Research Article

Applying and comparing finite difference, differential quadrature, and radial basis function-based differential quadrature numerical methods in confined aquifers

Atena Naghipour Karder [1], Ali Khoshfetrat [2*]

1 Department of Civil Engineering, Shahid Ashrafi Esfahani University, Isfahan, Iran

2 Department of Civil Engineering, Isfahan (Khorasgan) Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran

Corresponding Author email: khoshfetrat@khuisf.ac.ir

Received: 20 Oct 2024 Accepted: 07 Dec 2024 Published: 24 Dec 2024

Extended Abstract

Introduction

Numerical approaches have become indispensable tools for simulating groundwater issues. Traditional numerical methods such as Finite Difference Method (FDM) and Finite Element Method (FEM) have been predominantly employed for this purpose. These methods typically utilize low-order polynomials to estimate derivatives, which limits their accuracy and flexibility. Recent advancements in high-order numerical methods, particularly the Differential Quadrature (DQ) method, offer a promising alternative. DQ is a high-order numerical method characterized by its high accuracy and low computational cost, but it lacks geometric flexibility for modeling complex domains. To address this limitation, the Radial Basis Function-based Differential Quadrature (RBF-DQ) method has emerged, combining the advantages of DQ with the flexibility of meshless numerical methods. This study explores the application of both DQ and RBF-DQ methods for solving the governing equations of groundwater flow in confined aquifers under steady and unsteady conditions. The efficiency of these methods is evaluated by comparing their results with those obtained from traditional finite difference solutions.

Materials and Method

The DQ method approximates the n-th derivative of a function defined on a rectangular domain using a grid of nodes. For a function ($f(x,y)$), the n-th derivative at point ((x_i, y_j)) in the x-direction is approximated by a weighted sum of function values at surrounding nodes. The weights are determined using explicit formulas. The RBF-DQ method extends this by estimating the derivative at a point using a weighted combination of function values at all nearby points, allowing for greater flexibility in handling irregular domains. In this study, two numerical problems are investigated: the first focuses on steady-state flow in a confined aquifer, while the second addresses unsteady flow conditions. For both problems, boundary conditions are derived from analytical solutions, allowing for error assessment of the numerical

Technical Strategies in Water Systems
https://sanad.iau.ir/journal/tsws
ISSN (Online): 2981-1449
Summer 2024: Vol 2, Issue 2
https://doi.org/10.30486/TSWS.2024.1187653

methods. The average error is computed using a defined formula, comparing numerical results against analytical solutions obtained via traditional methods.

Results and Discussion

Results from the numerical modeling of both problems using DQ, RBF-DQ, and FDM are presented in several tables. For the first problem, average error values indicate that the DQ method consistently yields lower errors compared to both RBF-DQ and FDM methods. Specifically, as the number of nodes increases, the error decreases significantly for the DQ method, demonstrating its superior accuracy. In contrast, RBF-DQ shows a dependency on the chosen shape parameter, which affects its accuracy. The second problem's results similarly indicate that DQ outperforms RBF-DQ in terms of error reduction, reinforcing the findings from the first problem. Additionally, computational times reveal that while DQ and FDM methods have comparable computational efficiency, RBF-DQ requires significantly more time due to matrix inversions necessary for weight coefficient determination.

Conclusion

This study marks the first application of DQ and RBF-DQ methods in modeling groundwater flow in confined aquifers. The results demonstrate that while DQ provides superior accuracy and computational efficiency compared to traditional FDM, RBF-DQ, despite its flexibility for irregular domains, exhibits lower accuracy and higher computational demands. The dependency of RBF-DQ's performance on the shape parameter necessitates careful selection to minimize error, which can be time-consuming. Overall, the DQ method is recommended for regular domains, while RBF-DQ may be advantageous in complex geometries where traditional methods struggle. Future research could explore optimizing the shape parameter for RBF-DQ to enhance its applicability in groundwater modeling. The findings contribute valuable insights for numerical groundwater modeling, emphasizing the potential of high-order methods in improving simulation accuracy and efficiency.

Keywords: DQ Method, RBF-DQ Method, Unsteady Flow, Steady Flow, Groundwater Equations, Confined aquifers

Technical Strategies in Water Systems
https://sanad.iau.ir/journal/tsws
ISSN (Online): 2981-1449
Summer 2024: Vol 2, Issue 2, 103-113
https://doi.org/10.30486/TSWS.2024.1187653

Research Article

Applying and comparing finite difference, differential quadrature, and radial basis function-based differential quadrature numerical methods in confined aquifers

Atena Naghipour Karder [1], Ali Khoshfetrat [2*]

1 Department of Civil Engineering, Shahid Ashrafi Esfahani University, Isfahan, Iran

2 Department of Civil Engineering, Isfahan (Khorasgan) Branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran

Corresponding Author email: khoshfetrat@khuisf.ac.ir

Received: 20 Oct 2024 Accepted: 07 Dec 2024 Published: 24 Dec 2024

Abstract

The Differential Quadrature (DQ) method is a high-order numerical approach known for its remarkable accuracy and low computational cost, making it an attractive option for numerical modeling. However, a notable limitation of this method is its lack of geometric flexibility in modeling domains. The Radial Basis Function-based Differential Quadrature (RBF-DQ) method addresses this limitation by combining the DQ method's direct derivative estimation with the flexibility of mesh-free numerical techniques, making it suitable for both regular and irregular domains. This study compares the performance of the DQ, RBF-DQ, and Finite Difference (FD) methods — an established numerical technique in solving groundwater flow equations in confined aquifers for both steady-state and unsteady-state conditions. Exact solutions for these problems are derived using the Thiem and Theis methods. The results demonstrate the high accuracy of both the DQ and RBF-DQ methods in modeling groundwater flow in confined aquifers. Additionally, the DQ method outperforms the RBF-DQ method in terms of both accuracy and computational efficiency.

Keywords: DQ Method, RBF-DQ Method, Unsteady Flow, Steady Flow, Groundwater Equations, Confined aquifers

مجله راهبردهای فنی در سامانه‌های آبی
https://sanad.iau.ir/journal/tsws
شاپا الکترونیکی: ۲۹۸۱-۱۴۴۹
تابستان۱۴۰۳، دوره دو، شماره۲، ۱۱۳-۱۰۳
https://doi.org/10.30486/TSWS.2024.1187653

مقاله پژوهشی

به‌کارگیری و مقایسه روش‌های عددی FDM، DQ و RBF-DQ در مدلسازی جریان آب زیرزمینی در سفره‌های محصور

آتنا نقی پورکاردر[1] و علی خوش فطرت[2]*

۱. دانش آموخته گروه مهندسی عمران، دانشگاه شهید اشرفی اصفهانی، اصفهان، ایران.
۲. گروه مهندسی عمران، واحد اصفهان (خوراسگان)، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران

ایمیل نویسنده مسئول: khoshfetrat@khuisf.ac.ir

دریافت:۱۴۰۳/۰۷/۲۹ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۱۷ چاپ: ۱۴۰۳/۱۰/۰۴

چکیده

روشDQ (Differential Quadrature) یکی از روش‌های عددی جدید مرتبه بالا با دقت زیاد می‌باشد که هزینه محاسباتی بسیار پایین از مزایای این روش است اما ایراد این روش، فقدان انعطاف‌پذیری هندسی در دامنه مدل‌سازی است. در روش RBF-DQ (Radial Basis Function-based Differential Quadrature) علاوه بر بهره‌بردن از ویژگی‌های روش DQ در تخمین مستقیم مشتق، با بکارگیری توابع پایه‌ی شعاعی، از مزایای روش‌های عددی بدون شبکه نیز می‌توان بهره برد ضمن آنکه می‌توان این روش را در مسائل با دامنه منظم و نامنظم به‌کارگرفت. در این تحقیق برای اولین بار از این دو روش برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان آب‌های زیرزمینی در سفره‌های تحت‌فشار در دو حالت دائمی و غیردائمی استفاده شده و کارآیی آنها در حل این معادلات از طریق مقایسه با حل دقیق به دست آمده از روش‌های تیم و تیس با روش تفاضل محدود که یک روش سنتی می‌باشد، مقایسه شده است. نتایج این تحقیق حاکی از دقت بالای روش‌های DQ و RBF-DQ در مدلسازی عددی جریان آب زیرزمینی در سفره‌های محصور است و روش DQ از نظر دقت و زمان محاسبات بر روش RBF-DQ برتری دارد.

واژه‌های کلیدی: روش DQ، روش RBF-DQ، جریان غیرماندگار، جریان ماندگار، معادلات آب‌های زیرزمینی، سفره‌های محصور

۱- مقدمه

رویکردهای عددی به عنوان ابزاری کارآمد در شبیه‌سازی مسائل آب‌های زیرزمینی شناخته شده است. با این حال، تاکنون بیشتر از روش‌های عددی سنتی مانند تفاضل‌محدود (FDM)[1] و المان‌محدود (FEM)[2] برای این منظور استفاده شده است. در این گونه روش‌ها به‌منظور تخمین مشتق تابع از چند جمله‌ای‌های مرتبه‌ی پایین[3] استفاده می‌گردد که به همین دلیل به آنها روش‌های مرتبه پایین گفته می‌شود. از جمله تحقیقاتی که در آنها از این روش‌ها برای شبیه‌سازی آب‌های زیرزمینی استفاده شده است می‌توان به مطالعات (Ghosh & Chakraborty, 2011)اشاره کرد که در آن جریان آلاینده‌ها در محل دفن زباله‌ها بصورت یک بُعدی و به روش تفاضل محدود مدل‌سازی شده است. همچنین (Rahman & Bhuiyan 2012) شبیه‌سازی جریان دوبعدی آب زیرزمینی به روش عناصر محدود در سیستم چند چاهی را در شرایط پیچیده هیدروژئولوژیکی شهر داکا در بنگلادش مورد بررسی قرار دادند و موفق به مدل‌سازی شرایط مرزی ترکیبی در این مسئله شدند. (Zhang et al., 2013) برای پیش‌بینی جریان آلاینده‌ها و واکنش آبخوان آلوده به شیرابه زباله در شرق چین از روش تفاضل محدود استفاده کردند و گزینه‌هایی برای کنترل آلودگی‌ها پیشنهاد نمودند. (Zhang et al., 2014) برای شبیه‌سازی اندرکنش جریان آب سطحی و زیرزمینی در حالت سه‌بُعدی از روش تفاضل‌محدود استفاده کردند ولی نتایج حاصل مطلوب نبوده است.
(Meenal & Eldho., 2012) بهینه‌سازی پمپاژ آب‌های زیرزمینی توسط روش‌های عناصرمحدود و تفاضل محدود را شبیه‌سازی نمودند.
(Xie et al., 2015)به بررسی جریان آب زیرزمینی در محیط‌های متخلخل توسط روش عناصرمحدود پرداختند. آنها یک مدل ساده و موثر برای اصلاح آلودگی آب‌های زیرزمینی از طریق ترکیب روش عناصر محدود با الگوریتم ژنتیک طراحی نمودند.
(Eldho & Boddula, 2016) نشان دادند که استفاده از دو روش عناصرمحدود و تفاضل محدود به همراه روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای شبیه سازی طرح‌های رفع آلودگی آب‌های زیرزمینی دارای کارآیی می باشد. همچنین مسئله جریان آب زیرزمینی و تثبیت لایه‌های زمین توسط دو روش عناصر محدود و لایه محدود، در مقاله (Zhou et al., 2017) مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این مطالعه نشان دادند که قابلیت انعطاف‌پذیری آب موجود در منافذ، تأثیر مهمی بر روند فرونشست ناشی از پمپاژ دارد.
لازمه‌ی دستیابی به دقّت بالا در روش‌های عددی سنتی به دلیل مرتبه پایین آنها، شبکه‌بندی ریز و تعداد گره‌های شبکه‌ی زیاد است به نحوی که بتوان رفتار مشتق را به خوبی پایش کرد. این کاستی سبب شد محققین روش‌هایی را پیشنهاد کنند که قادر باشند تا با استفاده از تعداد اندکی از گره‌ها در شبکه، نتایج دقیقی را ارائه دهند (Shen, 2010). این روش‌ها، به روش‌های مرتبه‌ی بالا[4] موسوم می‌باشند. در همین راستا (Bellman & Casti, 1971) روش DQ[5] را ارائه کردند. از میان تحقیقاتی که در آنها با موفقیت از روش DQ برای حل معادلات استفاده شده، می‌توان به (Kaya, 2010) در مورد آب‌های سطحی، (Raj & Pradhan, 2013) در مورد معادلات جذب سطحی، (Abdollahian t al., 2014) در مورد مسئله انتشار موج، (Hatami & Ganji, 2014) در مورد معادلات کوپل جنبشی ذره اشاره کرد. همچنین (Behroozi &Vaghefi, 2022) روش TPS-DQ[6] را به عنوان یک روش غیروابسته به شبکه برای حل معادلات جریان دائمی و غیردائمی در آب‌های زیرزمینی با هندسه پیچیده به کار بردند. از سوی دیگر با ترکیب توابع پایه شعاعی[7] (RBF) که توسط Hardy (1971) برای درون‌یابی پیشنهاد شده بودند با روش DQ، روش عددی بدون شبکه RBF – DQ توسط (Shu & Wu, 2002) توسعه یافت و توسط افرادی همچون (Hung et al., 2007) برای حل مسائل مقدار مرزی،(Soleimani et al., 2011) برای حل معادلات ناویر استوکس در سیال تراکم‌ناپذیر، (Hashemi & Hatam, 2011) برای آنالیز نفوذپذیری در محیط نامنظم، (Dehghan & Mohammadi, 2015) برای حل معادله دوبعدی و سه‌بعدی چان هیلارد، (Soleimani et al., 2011) برای مطالعه عددی فشار منفذی خاک به طور موفق

[1] Finite Difference Method
[2] Finite Element Method
[3] Low Order
[4] High order
[5] Different Quadrature Method
[6] Thin Plates Spline-based Differential Quadrature Method
[7] Radial Basis Functions

مورد استفاده قرار گرفت. (Chaabelasri et al., 2019) روش RBF را برای حل معادلات آب‌های کم عمق در توپوگرافی نامنظم و با وجود اصطکاک به کار بردند. همچنین (Boujoudar et al., 2024) روش LRBF[1] را برای پیش‌بینی توزیع رطوبت در خاک‌های غیراشباع استفاده کردند.

(Khoshfetrat & Abedini, 2011) از هر دو روش DQ و RBF – DQ برای مدل‌سازی آب‌های کم عمق ساحلی در تنگه اوریسوند استفاده نمودند و کارآیی بالای این روش‌ها را نشان دادند. با توجه به تجارب موفق استفاده از این دو روش برای مدل‌سازی عددی پدیده‌های مختلف فیزیکی که به آنها اشاره شد، در تحقیق حاضر از این روش‌ها برای مدل‌سازی عددی معادلات آب‌های زیرزمینی در سفره‌های تحت‌فشار در دو حالت ماندگار و غیرماندگار استفاده شد و کارآیی این دو روش با یکدیگر و همچنین با روش عددی سنتی FDM مورد مقایسه قرار گرفته است.

۲- مواد و روش‌ها

روش DQ

اگر تابع $f = f(x,y)$ روی دامنه مستطیلی $0 \le y \le b$ و $0 \le x \le a$ تعریف شده باشد و یک شبکه از نقاط با تعداد Nx نقطه در جهت x و Ny نقطه در جهت y روی دامنه درنظر گرفته شود، مشتق مرتبه n ام f در نقطه (x_i, y_j) در جهت x توسط روش DQ به صورت معادله (۱) تقریب زده می‌شود:

$$f_x^{(n)}(x_i, y_j) = \sum_{k=1}^{Nx} wx_{ik}^{(n)} f(x_k, y_j) \qquad (۱)$$

در این رابطه $wx_{ik}^{(n)}$ معرف ضرایب وزن مرتبه nام در جهت x است که به سادگی با استفاده از فرمول‌های صریح انجام می‌شود. مشتق مرتبه n ام f در نقطه (x_i, y_j) در جهت y نیز به طرز مشابهی تقریب زده می‌شود.

روش RBF-DQ

در این روش مشتق جزئی یک تابع در یک نقطه به وسیله یک ترکیب وزنی از مقادیر تابع در کلیه نقاط یا برخی از نقاط در همسایگی آن نقطه تقریب زده می‌شود. به‌عنوان نمونه تخمین مشتق مرتبه n ام f در جهت x در روش RBF-DQ به‌شکل زیر صورت می‌پذیرد (معادله ۲).

$$f_x^{(n)}(x_k, y_k) = \sum_{l=1}^{N} wx_{kl}^{(n)} f(x_l, y_l) \qquad (۲)$$

که در آن $wx_{kl}^{(n)}$ ضرایب وزن مرتبه n در جهت x تعیین شده به روش RBF-DQ و $f(x_l, y_l)$ مقدار تابع در نقطه (x_l, y_l) می‌باشد. اگر N برابر تعداد کل نقاط دامنه محاسباتی باشد، روش، Global RBF-DQ یا به اختصار RBF-DQ خوانده می‌شود و اگرN برابر تعدادی از نقاط همسایگی نقطه (x_k, y_k) در نظرگرفته شود، روش، Local RBF-DQ یا به اختصار LRBF-DQ نامگذاری می‌گردد.

در روش‌های RBF-DQ و LRBF-DQ برای بدست آوردن ضرایب وزن از تابع آزمون RBFs استفاده می‌شود که بهترین آنها MQ RBF به صورت رابطه (۳) است.

$$\varphi_j(X) = \varphi(\|X - X_j\| = \varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2} \qquad (۳)$$

که در آن $X = (x, y)$ و $r = \|X\text{-}X_j\|$ فاصله اقلیدسی و c پارامتر شکل است. با قرار دادن تابع شعاعی MQ در معادله (۲) رابطه (٤)

[1] Local Radial Basis Functions

ایجاد می‌شود.

$$\frac{\partial^n \varphi_j(x_k,y_k)}{\partial x^n} = \sum_{l=1}^{N} wx_{kl}^{(n)} \varphi_j(x_l, y_l) \quad (٤)$$

for $j = 1,2,\dots,N$

سیستم معادلات فوق باید حل شود تا ضرایب وزن $wx_{kl}^{(n)}$ بدست آیند. همچنانکه مشاهده می‌شود برای حل این سیستم‌های معادلات باید در هرنقطه، از یک ماتریس $N \times N$ وارون‌گیری انجام شود.

مسئله عددی اول

در مسئله عددی اول، سفره آب زیرزمینی تحت‌فشار در حالت ماندگار و در خاک همگن و هموزن که معادله حاکم بر آن به صورت معادله ٥ است، در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (٥)$$

در این مسئله، مقادیر ضریب انتقال (T)، شعاع تاثیر چاه (r_i)، ارتفاع (عمق، هد) اولیه سفره (h_i)، دبی پمپاژ (Q) و ضریب هدایت هیدرولیکی (K) برابر مقادیر زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$T = 4.63 * 10^{-3}\ \frac{m^2}{s}$ $\quad r_i = 79\ m$ $\quad h_i = 50\ m$ $\quad Q = 0.314\ \frac{m^3}{s}\ \frac{m}{s}$ $\quad K = 1.54 * 10^{-4}$

دامنه حل در این مسئله و همچنین مسئله بعدی در شکل (١) نشان داده شده است.

شکل ١- توزیع گره‌ها در مسئله اول

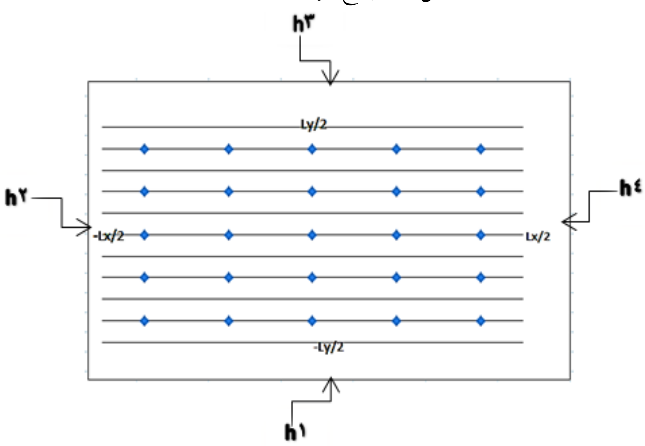

Fig 1. Nodes distribution in the first problem

شرایط مرزی این مسئله از حل تحلیلی موجود در پمپاژ از چاه در حالت ماندگار که به رابطه تیم مشهور می‌باشد گرفته شده است. همچنین حل تحلیلی مسئله برای محاسبه خطای روش‌های عددی از این رابطه به دست آمده است. رابطه تیم به صورت رابطه (٦) می باشد.

$$h = h_i + \frac{Q \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2T\pi} \quad (٦)$$

در اینجا h هد هیدرولیکی پس از افت، r_1 شعاع اولیه و r_2 ارتفاع پس از افت می‌باشد ((Safavi, 2006).

معادله حاکم در مسئله اول در نقطه(x_i, y_i) به وسیله روش DQ به صورت رابطه (۷) تقریب زده شده است.

$$\sum_{k=1}^{Nx} wx_{ik}^{(2)} * h(x_k, y_j) + \sum_{l=1}^{Ny} wy_{jl}^{(2)} * h(x_i, y_l) = 0 \quad (۷)$$

همچنین تقریب این معادله با روش RBF-DQ در نقطه (x_i, y_i) به صورت رابطه (۸) نوشته شده است.

$$\sum_{k=1}^{N} wx_{ik}^{(2)} * h(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{N} wy_{ik}^{(2)} * h(x_k, y_k) = 0 \quad (۸)$$

مسئله عددی دوم

در مسئله دوم، سفره آب زیرزمینی تحت‌فشار در حالت غیردائمی و در خاک همگن و هموژن که معادله حاکم بر آن به صورت رابطه (۹) است، در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{S}{T}\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{R}{T} \quad (۹)$$

در این مسئله، مقادیر پمپاژ (R)، ضریب انتقال (T)، ضریب ذخیره (S) و دبی پمپاژ (Q) و طول زمان شبیه‌سازی (t) برابر مقادیر زیر در نظر گرفته شده است:

R=31.4(l/day) $\quad$ t = 10000 s $\quad$ $T = 0.1 * 10^{-7}\ \frac{m^2}{min}$ $\quad$ $S = 0.00001$ $\quad$ $Q = 1500\,\frac{m^3}{day}$

شرایط مرزی این مسئله از حل تحلیلی موجود در پمپاژ از چاه در حالت غیرماندگار که به رابطه تیس مشهور می‌باشد گرفته شده است. همچنین حل تحلیلی مسئله برای محاسبه خطای روش‌های عددی از رابطه (۱۰) به دست آمده است. رابطه تیس به صورت زیر می‌باشد (Safavi, 2006):

$$H = Hi - \frac{Q}{4\pi T}\left[\ln\left(\frac{0.562}{u}\right) + u - \frac{u^2}{2*2!} + \frac{u^3}{3*3!} - \frac{u^4}{4*4!} + \cdots\right] \quad (۱۰)$$

که در آن Hi مقدار هد هیدرولیکی و u که عدد ثابت معادله تایس در تابع چاه است، به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \quad (۱۱)$$

معادله حاکم در مسئله دوم در نقطه(x_i, y_i) به وسیله روش DQ به صورت رابطه (۱۲) تقریب زده شده است.

$$\sum_{k=1}^{Nx} wx_{ik}^{(2)} * h^{n+1}(x_k, y_j) + \sum_{l=1}^{Ny} wy_{jl}^{(2)} * h^{n+1}(x_i, y_l) = \frac{S}{T}\frac{h^{n+1}(x_i,y_j) - h^n(x_i,y_j)}{\Delta t} - \frac{R(x_i, y_j)}{T} \quad (۱۲)$$

همچنین تقریب این معادله با روش RBF-DQ در نقطه (x_i, y_i) به صورت رابطه (۱۳) نوشته شده است.

$$\sum_{k=1}^{N} wx_{ik}^{(2)} * h^{n+1}(x_k, y_k) + \sum_{k=1}^{N} wy_{ik}^{(2)} * h^{n+1}(x_k, y_k) = \frac{S}{T}\frac{h^{n+1}(x_i, y_i) - h^{n}(x_i, y_i)}{\Delta t} - \frac{R(x_i\ , y_i\ )}{T} \qquad (۱۳)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در معادله مسئله دوم که وابسته به زمان است، مشتق زمانی به‌صورت کاملا ضمنی تخمین زده شده‌است.

نحوه محاسبه خطای روش‌های عددی

در این تحقیق، مقدار متوسط خطا برای روش‌های عددی مختلف در کل دامنه از فرمول (۱٤) محاسبه شد.

$$\mathrm{Error} = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(H - \overline{H})^2}{\sum_{i=1}^{N}(\overline{H})^2}} \qquad (۱٤)$$

که در آن H هد هیدرولیکی بدست آمده به‌روش عددی، $\overline{H}$ هد هیدرولیکی بدست آمده به‌روش تحلیلی است که روش محاسبه آن در معرفی مسائل عددی و در روابط ٦ و ۱۰ آمد و N تعداد کل گره‌های مورد استفاده است.

۳- نتایج و بحث

نتایج حاصل از مدلسازی عددی مسئله اول به روش‌های DQ، RBF-DQ و FD به ترتیب در جداول ۱، ۲ و ۳ آورده شده است. در این جداول، مقادیر متوسط خطا (Error) به ازاء مقادیر مختلف تعداد نقاط (N) و طول دامنه مدل‌سازی (L) گزارش شده است. البته در مورد روش RBF-DQ با توجه به وابستگی مقدار خطا به مقدار انتخاب شده برای پارامتر شکل، مقادیر حداقل خطا به ازای مقادیر مختلف پارامتر شکل آورده شده است که بعدا مورد بحث قرار می‌گیرد.

جدول ۱- مقادیر متوسط خطا به ازای مقادیر مختلف N و L در حل مسئله اول با روش DQ

Table 1. Average error values for different N and L in solving the first problem using the DQ method

N	L (m)									
	۱۰	۲۰	۳۰	٤۰	٥۰	٦۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
٥	٤e-۱/۸۹٦٦	٤ e -۱/۸۷٤۱	٤e-۱/۸٦۷	٤ e -۱/۸٦	٤ e -۱/۸٦۱	٤ e -۱/۸٥۹	٤e-۱/۸٥۸	٤e-۱/۸٥٦۷	٤e-۱/۸٥٦۱	٤e-۱/۸٥٥
٦	٤e -۱/۱٤۰٦	٤ e -۱/۱٤٤۱	٤e-۱/۱٤٥۲	٤e -۱٤٥ ۱/	٤ e -۱/۱٤٤۷	٤ e -۱/۱٤٤٦	٤e-۱/۱٤٤۲	٤e-۱/۱٤٤۱	٤e-۱/۱٤۳۹	٤e-۱/۱٤۳۷
۹	٤e -۳/٤۳٦۹	٤ e -۳/۳٦٥	٤ e -۳/۳۳۱	٤ e -۳/۳۱	٤ e -۳/۲۹	٤ e -۳/۲۷٦	٤e-۳/۲٦۲	٤e-۳/۲٥٥۱	٤e-۳/۲٤٤	٤e-۳/۲۳٥۲

جدول ۲- مقادیر حداقل متوسط خطا به ازای مقادیر مختلف N و L در حل مسئله اول با روش RBF-DQ

Table 2 .Minimum average error values for different N and L in solving the first problem using the RBF-DQ method

	L (m)									
N	۱۰	۲۰	۳۰	٤۰	٥۰	٦۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
٥	۳e-۳/۱۳۲۹	۳e-۲/۸۰۱۷	۳e-۲/٦۸٤٦	۳e-۲/٦۲٥٤	۳e-۲/٥۸۹۸	۳e-۲/٥٦٦۱	۳e-۲/٥٤۹۲	۳e-۲/٥۳٦٦	۳e-۲/٥۲٦۷	۳e-۲/٥۱۸۹
٦	۳e-۱/۷٦٦۹	۳e-۱/٥۳۷٤	۳e-۱/٤٦۰۷	۳e-۱/٤۲۱۷	۳e-۱/۳۹۸۱	۳e-۱/۳۸۲٥	۳e-۱/۳۷۱۳	۳e-۱/۳٦۳	۳e-۱/۳٥٦٥	۳e-۱/۳٥۱٤
۹	۳e-۳/۰٦۱۱	٤e-٥/٦۹۸٥	٤e-٥/۰۰٦۲	٤e-٤/۷٥۲٤	٤e-٤/٦۰۸۸	٤e-٤/٥۱٥۳	٤e-٤/٤٤۹٦	٤e-٤/٤۰۰۹	٤e-٤/۳٦۳٤	٤e-٤/۳۳۳٦

جدول ۳- مقادیر متوسط خطا به ازای مقادیر مختلف N و L در حل مسئله اول با روش FD

Table 3. Average error values for different N and L in solving the first problem using the FD method

N	L (m) ۱۰	۲۰	۳۰	٤۰	٥۰	٦۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
٥	٤e-٥/۲۹٤۹	۳e-۱/٤۹۰٦	۳e-۳/۰۹٤	۳e-٥/۳٤٤	۳e-۸/۲۳۷	۳e-۱/۱۷۷۳	۲e-۱/٥۹٥۰	۲e-۱/۹۳۹٤	۲e-۲/٦۲۳	۲e-۳/۲۳۳٤
٦	٤e-۳/۲۲۷	٤e-۸/۸۱٤۷	۳e-۱/۸۲۲	۳e-۳/۰۷۸	۳e-٤/۸۳٦	۳e-٦/۹۰۷۱	۳e-۹/۳٥٤۸	۲e-۱/۲۳۷۸	۲e-۱/٥۳۸	۲e-۱/۸۹٥۳
۹	۳e-۱/٥۸٥	۳e-۱/٤٤۱٥	۳e-۱/٥٥۹	۳e-۱/٥۸٤	۳e-۲/۳	۳e-۲/۸٤۸٤	۳e-۳/٤۹۱۳	۳e-٤/۲٤٥٤	۳e-٥/۰٦۹	۳e-٥/۹٦٤

همانطورکه در جداول ۱و ۲ و ۳ مشاهده می‌شود مدل سازی عددی با هر سه روش با خطای قابل قبولی انجام شده و در بین سه روش، روش DQ دارای متوسط خطای کمتری بوده است پس از آن روش FD و در انتها روش RBF-DQ دارای خطاهای کمتری بوده‌اند. البته همانطور که قبلا گفته شد، متوسط خطای روش RBF-DQ به مقدار انتخاب شده برای پارامتر شکل (C) بستگی دارد که این موضوع در شکل (۲) قابل مشاهده است.

شکل ۲- نمودار تغییرات متوسط خطا نسبت به تغییرات پارامتر شکل در مسئله اول

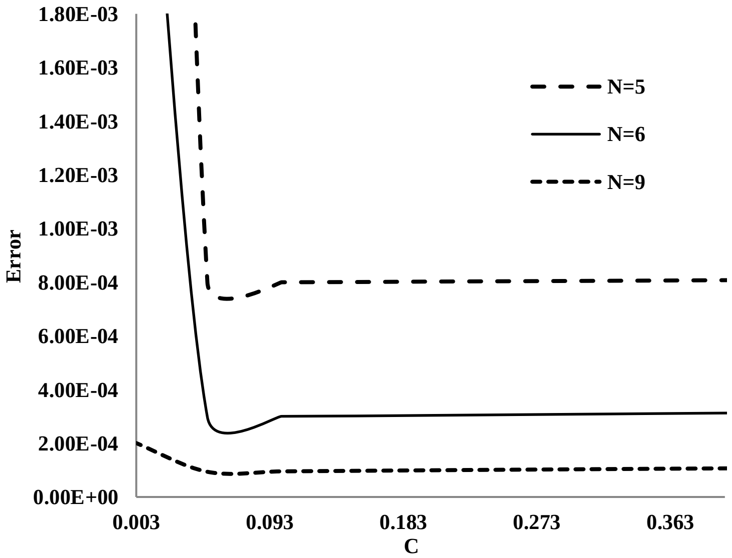

Fig 2. Graph of average error variations with respect to shape parameter changes in the first problem

نتایج حاصل از مدلسازی عددی مسئله دوم به روش‌های DQ و RBF-DQ به ترتیب در جداول ٤ و ٥ آورده شده است. در این جداول، مقادیر متوسط خطا (Error) به ازاء مقادیر مختلف تعداد نقاط (N) و طول دامنه مدل سازی (L) گزارش شده است. البته در مورد روش RBF-DQ با توجه به وابستگی مقدار خطا به مقدار انتخاب شده برای پارامتر شکل، مقادیر حداقل خطا به ازای مقادیر مختلف پارامتر شکل آورده شده است که بعدا مورد بحث قرار می‌گیرد.

جدول ٤- مقادیر حداقل متوسط خطا به ازای مقادیر مختلف N و L در حل مسئله دوم با روش DQ

Table 4. Minimum average error values for different N and L in solving the second problem using the DQ method

N	L (m) ۱۰	۲۰	۳۰	٤۰	٥۰	٦۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
٥	٤e-۷/۹۹	٤e-۸/۰۰٥٦	٤e-۸/۰٥۳	٤e-۸/۲٦۷	۳e-۱/۰۳۱٦	٤e-۸/۰٦۸	۳e-۱/۲٥٤٥	٤e-۲/۰۲٥	٤e-۸/٤۸٤	۳e-٤/۱٤۹٦
٦	٤e-۱/۷۲	٤e-۱/۸٦٥٥	٤e-۲/۰٥۱۱	٤e-۱/۹٦۷۱	٤e-۱/٤۳۹	٤e-۳/٦۱۰٥	٤e-۱/۹۹۷	٤e-۳/٦۰۷۸	٤e-۳/۰۳۲	٤e-۸/۱۷٦
۹	٥e-٦/۲۳۸۹	٥e-۷/۳٤۲	٥e-۷/٤٥۳	٥e-۷/۸۰۱۹	٥e-۸/۲۲٤	٥e-۸/٤٥۷٥	٥e-۸/٥۷۹٤	٥e-۹/۱٥۹۹	٥e-۹/٥٦۲	٤e-۱/۰۸٥

جدول ٥- مقادیر حداقل متوسط خطا به ازای مقادیر مختلف N و L در حل مسئله دوم با روش RBF-DQ

Table 5. Minimum average error values for different N and L in solving the second problem using the RBF-DQ method

N	L (m)									
	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠
٥	٣e-١/٦٩٧١	٣e-٤/١٧٨	٣e-٥/٤٠٤٢	٣e-٦/١٠٦٠	٣e-٦/٥٥٩٦	٣e-٦/٨٧٥٢	٣e-٧/١١١٠	٣e-٧/٢٨٤٣	٣e-٧/٤٤٣٥	٣e-٧/٥٤٧٨
٦	٤e-٥/٦٥٥٩	٣e-١/٣٨٤٤	٣e-٢/٠٩٧٧	٣e-٢/٥٤٨٠	٣e-٢/٨٥٢٢	٣e-٣/٧٠٩٣	٣e-٣/٢٣٢٧	٣e-٣/٣٦١٠	٣e-٣/٤٦٣٥	٣e-٣/٤٦٣٥
٩	٤e-٢/٥١٥	٤e-١/٤٨١٣	٤e-٢/٣٩٦٨	٤e-٣/٦٩٢٤	٤e-٤/٧٦٧٧	٤e-٥/٦٢٣٢	٤e-٦/٣٠٤٤	٤e-٦/٨٦٨٣	٤e-٧/٣٣٩٩	٤e-٧/٧٢٩٤

همانطورکه در جداول ٤ و ٥ مشاهده می‌شود مدلسازی عددی با هر دو روش با خطای قابل قبولی انجام شده و در بین این دو روش، روش DQ دارای متوسط خطای کمتری بوده است. البته همانطور که قبلا گفته شد، متوسط خطای روش RBF-DQ به مقدار انتخاب شده برای پارامتر شکل (C) بستگی دارد که این موضوع در شکل (٣) قابل مشاهده است.

شکل ٣- نمودار تغییرات متوسط خطا نسبت به تغییرات پارامتر شکل در مسئله دوم

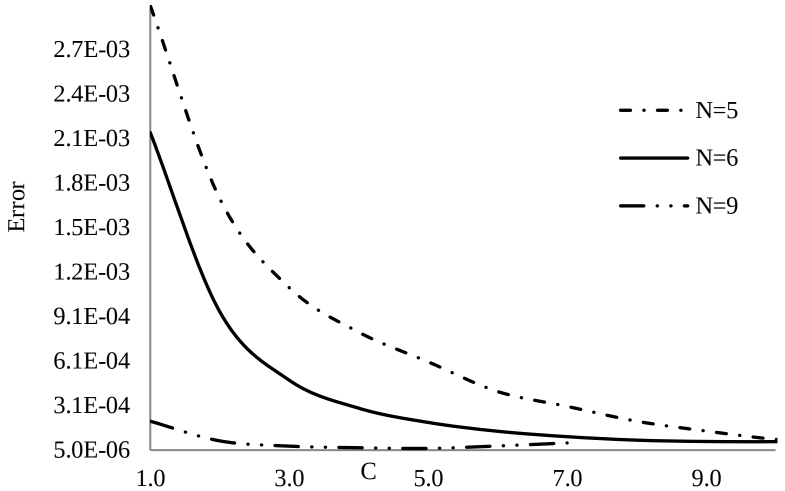

Fig 3. Graph of average error variations with respect to shape parameter changes in the second problem

همچنین زمان محاسبات برای هر سه روش در جداول ٦ و ٧ آورده شده است. همانطور که زمان محاسبات در روش‌های DQ و FD به یکدیگر نزدیک است ولی زمان محاسبات در روش RBF-DQ به طور قابل ملاحظه‌ای نسبت به دو روش دیگر بیشتر است که دلیل آن محاسبات مورد نیاز برای وارون‌گیری‌ها از ماتریس‌ها جهت تعیین ضرایب وزن است که قبلا در معرفی این روش در مورد آن توضیح داده شده است.

جدول ٦- زمان محاسبات برای سه روش به ازاء مقادیر مختلف تعداد نقاط (N) مورد استفاده در مسئله اول

Table 6. Computation time for the three methods for different values of the number of points (N) used in the first problem

N	RBF-DQ	DQ	FD
٥	٢e-٩/٣٦	٢e-٤/٦٨	٢e-٤/٦٨
٦	٠/١٥٦	٢e-٦/٢٤	٢e-٦/٢٤
٩	٠/٩٦٧	٢e-٧/٨	٠/١٤٠٤

جدول ۷- زمان محاسبات برای سه روش به ازاء مقادیر مختلف تعداد نقاط (N) مورد استفاده در مسئله دوم

Table 7. Computation time for the three methods for different values of the number of points (N) used in the second problem

N	RBF-DQ	DQ	FD
٥	٠/٨٢٧	٠/١٥٦	٠/١٢٤٨
٦	١/٤٣٥	٠/١٤٠	٠/١٠٩٢
٩	٨/١٧٤	٠/٤٥٢	٠/٤٠٥٦

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله برای اولین بار از روش‌های DQ و RBF-DQ برای مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان‌های محصور استفاده گردیده است و کارآیی این دو روش برای شبیه‌سازی عددی این نوع جریان نشان داده شده است. نتایج به دست آمده نشان داد که دقت جواب‌های به دست آمده با روش DQ نسبت به روش سنتی FD بهتر بوده است ولی روش RBF-DQ دارای دقت کمتری نسبت به روش FD بوده است. همچنین دقت جواب‌های به دست آمده از روش RBF-DQ وابستگی زیادی به مقدار انتخاب شده برای پارامتر شکل دارد که برای تعیین بهترین جواب باید مقادیر مختلفی برای پارامتر شکل در نظر گرفت تا به مقدار بهینه‌ای که منجر به کمترین خطا گردد به دست آید که فرآیندی زمان بر است. مقایسه مدت زمان محاسبات برای سه روش نیز نشان داده است که روش RBF-DQ نسبت به روش DQ و RBF-DQ دارای زمان محاسباتی بیشتری است. اگرچه در این مسئله که جهت امکان مقایسه سه روش دامنه محاسباتی به صورت منظم در نظر گرفته شده، روش DQ دارای مزیت نسبت به دو روش دیگر است ولی در صورت نامنظم بودن دامنه محاسباتی امکان استفاده از آن وجود ندارد ولی روش RBF-DQ در ناحیه‌های نامنظم نیز قابل استفاده است که باتوجه به نتایج این تحقیق، تنها مزیت نسبی این روش است.

۵- تضاد منافع نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که هیچ تضاد منافعی در رابطه با نویسندگی و یا انتشار این مقاله ندارند.

٦- منابع

Abdollahian, M., GhorbanpourArani, A., MosallaieBarzoki, A A., Kolahchi, R., & Loghman, A. (2014). Non-local wave propagation in embedded armchair TWBNNTs conveying viscous fluid using DQM. *Physica B*, 1-15. https://doi.org/10.1016/j.physb.2013.02.037. (In Persian)

Behroozi, A M., & Vaghefi, M. (2022). Thin plates spline based differential quadrature for numerical solution of groundwater flow. *Engineering Computation*, 3(6). https://doi.org/10.1108/EC-06-2021-0331 2194-2208. (In Persian)

Bellman, R., & Casti, J. (1971). Differential quadrature and long-term integration. *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 34, 235-238. https://doi.org/10.1016/0022-247X (71)90110-7

Boujoudar, M., Beljadid, A., & Taik, A. (2024). LRBF meshless methods for predicting soil moisture distribution in root zone. *Preprint submitted to Elsevier*, 1-27. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.33221.87523

Chaabelasri, E., Jeyar, M., & Borthwick, A G L. (2019). Explicit radial basis function collocation method for computing shallow water flows. *Procedia Computer Science*, 148, 361-370. https://doi.org/10.1016/j.procs.2019.01.044

Dehghan, M., & Mohammadi, V. (2015). The numerical solution of Cahn–Hilliard (CH) equation in one, two and three dimensions via globally radial basis functions (GRBFs) and RBFs-differential quadrature (RBFs-DQ) methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 51, 74-100. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.10.008. (In Persian)

Eldho, T I., & Boddula S. (2016). Simulation-optimization models for the remediation of groundwater contamination. *American Society of Civil Engineers*, 381-391. https://doi.org/10.1061/9780784480168.038

Ghosh, A., & Chakraborty, R. (2011). Finite difference method for computation of 1d pollutant migration through saturated homogeneous soil media. *International Journal of Geomechanics*, 10, 12-22. https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM. 1943-5622.0000068

Hashemi, M R., & Hatam, F. (2011). Unsteady seepage analysis using local radial basis function-based differential quadrature method. *Applied Mathematical Modeling*, 35, 4934-4950. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.04.002. (In Persian)

Hatami, M., & Ganji, D D. (2014). Motion of a spherical particle in a fluid forced vortex by DQM and DTM. *Particuology*, 16, 206-212. https://doi.org/10.1016/j.partic.2014.01.001. (In Persian)

Hardy, RL. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal Geophysical Research*, 76, 1905-1915. https://doi.org/10.1029/JB076i008p01905

Hung, C S., Lee, C F., & Cheng, A H D. (2007). Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31, 614-623. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2006.11.011

Kaya, B. (2010). Investigation of gradually varied flows using differential quadrature method. *Scientific Research and Essays*, 13, 2630-2638. https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000509

Khoshfetrat, A., & Abedini, M J. (2011). A hybrid DQ/LMQRBF-DQ approach for numerical solution of Poisson-type and Burger's equations in irregular domain. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 1885-1901. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.07.079

Meenal, M., & Eldho, T I. (2012). Simulation–optimization model for groundwater contamination remediation using meshfree point collocation method and particle swarm optimization. *Sadhana*, 37, 351-369. https://doi.org/10.1007/s12046-012-0086-0

Rahman, S., & Bhuiyan, M. (2012). Simulation of subsurface water flow by galerkin finite element method in dhaka city aquifer. Journal of Hydrolic American Society of Civil Engineers, 1-10. https://doi.org/10.1061/9780784410363

Raj, S., & Pradhan, V H. (2013). Numerical simulation of one - dimensional solute transport equation in an adsorbing medium by using differential quadrature method. *International Journal of Mathematics and Computer Applications Research* (IJMCAR), 3 (3), 23-36. https://doi.org/10.48550/arXiv.1510.08011

Safavi, H R. (2006). Engineering hydrology. Arkan Publications, Isfahan. (In Persian)

Shen, Q. (2010). Local RBF-based differential quadrature collocation method for the boundary layer problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 213-228. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2009.10.004

Shu, C., & Wu, YL. (2002). Development of RBF-DQ method for derivative approximation and its application to simulate natural convection in concentric annuli. *Springer-Verlag*, 8, 477-485. https://doi.org/10.1007/s00466-002-0357-4

Soleimani, S., Qajarjazi, A., Bararnia, H., Barari, A., & Domairry, G., (2011). Entropy generation due to natural convection in a partially heated cavity by local RBF-DQ method. *Meccanica*, 46, 1023-1033. https://doi.org/10.1007/s11012-010-9358-0

Xie, Y., Wu, J., & Xie, C. (2015). Cubic-spline multiscale finite element method for solving nodal darcian velocities in porous media, *Journal of Hydraulic*, 20 (11), 1-10. https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001222

Zhang, J., Ross, M., Fu, C., & Trout, K. (2014). Certification tests of MODFLOW implementation in the integrated hydrologic model. *Journal Hydraulic*, 19(3), 643-648. https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000822

Zhang, J., Bai, SH., Ma, ZH., An, D., Jiang, Y., Jiang, L., Xi, B., Yang, Y., & Li, M. (2013). Analysis for remedial alternatives of unregulated municipal solid waste landfills leachate-contaminated groundwater. *Higher Education Press and Springer*, 1-10. https://doi.org/10.1007/s11707-013-0374-y

Zhou, F., Xu, J., & Wang, X. (2017). Finite layer formulations for land subsidence due to groundwater withdrawal. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 17 (11). https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000996