https://doi.org/10.71667/sarj.2024.1185673

تخمین پروفیل سطح آب زیرزمینی با موجک هار در کشاورزی پایدار

شیوا خسروی[۱]، امیر رباطی*[۲]

۱- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران و مدیریت منابع آب، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی،کرمان، ایران

۲- استادیار گروه مهندسی عمران، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی،کرمان، ایران

* ایمیل نویسنده مسئول:ammirrr@yahoo.com

(تاریخ دریافت: ۱٤۰۳/۰۷/۱۱- تاریخ پذیرش: ۱٤۰۳/۰۸/۱۵)

چکیده

از آنجا که آب‌های زیرزمینی یک منبع مهم در تامین آب شرب و کشاورزی می‌باشند، مدیریت منابع آب‌های زیرزمینی امری ضروری است. برداشت بی‌رویه از منابع آب زیرزمینی و کاهش تغذیه، موجب افت آبخوان‌ها و نشست زمین شده است. همچنین بخش کشاورزی به عنوان بزرگترین مصرف کننده منابع آب کشور بیشترین سهم را در بروز این ناپایداری داشته است. یکی از ملزومات دستیابی به یک برنامه پایدار در زمینه مدیریت منابع آب، آگاهی از طرز رفتار سطح ایستابی آب زیرزمینی خصوصاً برای فصول خشک است. بدین منظور برای آگاهی از وضعیت منابع آب زیرزمینی لازم است تخمین نسبتاً دقیقی از نوسانات سطح آب زیرزمینی انجام شود. با تعیین سطح آب زیرزمینی می‌توان از آن در برنامه‌ریزی تامین آب قابل اعتماد و نیز در مدیریت منابع آب استفاده نمود. در این مطالعه به منظور تخمین پروفیل سطح آب زیرزمینی در لایه آبدار آزاد و تحت فشار از روش موجک هار استفاده شده و پروفیل سطح آب زیرزمینی در لایه آبدار آزاد و تحت فشار در مسائل مهندسی منتخبی با موجک هار حل شده است. در این روش معادله دیفرانسیل به صورت مجموعه ای از معادلات جبری ساده با متغیرهای محدود تبدیل می‌شود. با حل این دستگاه معادلات جبری و تعیین ضرایب مجهول با کمک شرایط مرزی و اولیه، معادلات دیفرانسیل مسئله آب زیرزمینی حل می‌شوند. نتایج نشان می‌دهد حتی با تعداد نقاط کالوکیشن محدود روش موجک هار دقت بالایی دارد و حل حاصل از روش موجک هار با روش دقیق ریاضی کاملاً یکسان می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: تخمین، سطح آب زیرزمینی، موجک هار

https://doi.org/10.71667/sarj.2024.1185673

مقدمه

پایداری منابع آب در ایران بیش از هر چیز تحت تاثیر بهره برداری از منابع آب کشاورزی قرار می گیرد زیرا بخش کشاورزی بزرگترین مصرف کننده منابع آب محسوب شده و بیش از ۹۰ درصد مصارف آب کشور را شامل می شود. در سال های اخیر، برداشت بیش از تغذیه سفره های آب زیرزمینی، موجب بر هم خوردن توازن سیستم، عدم پایداری و کاهش ذخیره سفره های آب زیرزمینی شده و در نهایت توسعه پایدار کشاورزی را ناممکن می سازد. لذا برای دستیابی به توسعه پایدار کشاورزی، برقراری توازن میان تغذیه و برداشت منابع زیرزمینی از اهمیت بسیاری برخوردار است. تخمین سطح آ ب زیرزمینی می تواند کمک شایانی به برنامه ریزی و مدیریت ارزشمند آب نماید.

نظریه موجک برای اولین بار توسط گراسمن (۱۹۸٤) معرفی گردید و در مدت زمان کوتاهی توجه پژوهشگران سراسر دنیا را به خود جلب کرد. این موفقیت موجک دلایل متعددی دارد: از یک طرف مفهوم موجک ترکیبی از نظریه‌های موجود در علوم مهندسی، ریاضی و فیزیک می‌باشد و از طرف دیگر این توابع ابزارهای ساده ای در ریاضیات هستند. (Young, 2012). اصول اولیه تحلیل سیگنال توسط فوریه در قرن ۱۹ مطرح شد. کارهای فوریه پایه ای برای ابداع تئوری موجک بود. سال‌ها محققان با استفاده از تحلیل فوریه اقدام به تجزیه و تحلیل داده‌های نامنظم و متناوب می-نمودند. در بسیاری از موارد نتایج خوبی از این روش به دست نمی‌آوردند. مورلت پس از سال‌ها تحقیق در سال ۱۹۸۰ با کمک گراسمن و یک تیم تحقیقاتی در مرکز تحقیقات فیزیک نظری مارسی در فرانسه، موفق به پایه‌گذاری تئوری موجک شد. در سال ۱۹۱۰ موجک هار به عنوان اولین و ساده‌ترین موجک متعامد و متقارن معرفی شد (Haar, 1910). در آنالیز عددی، حل معادله دیفرانسیل معمولی و جزئی معمولاً پیچیده و خسته کننده می‌باشد و همچنین روش اجرایی آن بسیار آهسته صورت می‌پذیرد. معمولاً در حل معادلات مربوط به رشته‌های مهندسی روش اجرایی سریع مدنظر می‌باشد. یک روش ساده و سریع محاسباتی در حل معادلات مربوطه، استفاده از موجک می‌باشد. آنالیز موجک محاسبات طولانی را کوتاه‌تر و همچنین محاسبات را به وسیله دستور و فرمان‌های نرم افزاری انجام می‌دهد که کمک شایانی در حل معادلات مربوطه خواهد داشت.

چن و هیسو (۱۹۹۷) از روش موجک هار با استفاده از پایه‌های انتگرال توانستند معادلات دیفرانسیل مورد بررسی را حل کنند (Chen & Hsiao, 1997). چانگ و پیو (۲۰۰۸) روش ماتریسی ساده برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه داد (Chang & Piau, 2008). از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱٤ لپیک به کاربرد موجک هار برای حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی و حل عددی معادلات دیفرانسیل با مرتبه بالاتر با استفاده از موجک هار پرداخت (Lepik, 2011). هریهاران و همکاران از سال ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۹ حل چندین معادلات دیفرانسیل از جمله معادلات فیشر، فیتزهیو- ناگومو و ... را با استفاده از موجک هار ارائه داد (Hariharan, 2019). شسا و همکاران (۲۰۱۷) به حل معادله برگر با استفاده از روش موجک هار پرداخت (Shesha *et al.*, 2017). محمدی و همکاران (۲۰۱۹) از روش موجک هار برای حل معادلات امدن-فور استفاده کرد (Mohammadi *et al.*, 2019). سپاراوا و همکاران (۲۰۲۱) معادله حرارت را با

استفاده از سری موجک هار حل نمود(Saparova *et al.*, 2021).

در این مطالعه روش عددی موثر بر اساس روش موجک هار به منظور تخمین پروفیل سطح آب زیرزمینی ارائه شده است. تاکنون بر اساس مطالعات صورت گرفته این مسائل مهندسی آب زیرزمینی توسط روش موجک هار حل نشده است. در این مطالعه مسائل مهندسی آب زیرزمینی با روش موجک هار حل شده و راه حل ریاضی این مسائل با حل روش موجک هار مقایسه شده است و کارآیی روش موجک هار در حل این مسائل مهندسی نشان داده شده است.

مواد و روش ها

موجک هار در حل معادله دیفرانسیل

خانواده موجک هار برای $x\epsilon[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود (Heydari *et al.*, 2022):

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } x\epsilon[\alpha,\beta) \\ -1, & \text{, for } x\,\epsilon[\beta,\gamma) \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (1)$$

که $\alpha = \frac{k}{m},\ \beta = \frac{k+0.5}{m},\ \gamma = \frac{k+1}{m}$ ، عدد صحیح $m = 2^j$ $(j = 0,1,2,3,\dots,J)$ درجه موجک را نشان می‌دهد و $k = 0,1,2,3,\dots,m-1$ پارامتر انتقال می‌باشد. اندیس i با استفاده از رابطه $i = m + k + 1$ بدست می‌آید که کمترین مقدار $i = 2$ به ازای $m = 1$ و $k = 0$ بدست می آید. بیشترین مقدار i برابر با $2M$ می‌باشد.

مجموعه نقاط $x_j = \frac{(l-0.5)}{2M}$ بطوری که $l = 1,2,3,\dots,2M$ در نظر گرفته می‌شود.

معادلات انتگرالی رابطه $h_i(x)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$p_i(x) = \int_0^x h_i(x')\,dx' \qquad (2)$$

$$q_i(x) = \int_0^x p_i(x')\,dx' \qquad (3)$$

به ازای که $i > 1$ مقادیر $h_i(x)$ ، $p_i(x)$ و $q_i(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & for\ x\epsilon[\alpha,\beta) \\ -1, & for\ x\ \epsilon[\beta,\gamma) \\ 0, & elsewhere \end{cases} \qquad (4)$$

$$p_i(x) = \begin{cases} x-\alpha, & \text{for } x\epsilon[\alpha,\beta) \\ \gamma - x, & \text{for } x\ \epsilon[\beta,\gamma) \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (5)$$

$$q_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^2}{2}, & \text{for } x\epsilon[\alpha,\beta) \\ \frac{(x-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2 - (\gamma-x)^2}{2}, & \text{for } x\ \epsilon[\beta,\gamma) \\ \frac{(x-\beta)^2 + (\beta-\gamma)^2}{2}, & \text{for } x\ \epsilon[\gamma,1) \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (6)$$

با توجه به خصوصیات تبدیل موجک هار، $y^n(x)$ که تابعی از x می‌باشد، به وسیله تابع موجک هار به صورت زیر می‌تواند تقریب سازی شود. با انتگرال گیری از رابطه (۷)، روابط (۸) و (۹) بدست می‌آید:

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_j) \qquad (7)$$

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i p_i(x_j) + C_m \qquad (8)$$

$$y^{(n-2)}(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i q_i(x_j) + x\,C_m + C_{m+1} \qquad (9)$$

با اعمال شرایط مرزی و اولیه و حل دستگاه معادلات بدست آمده، مقادیر ضرایب موجک هار a_i محاسبه می‌شود و با جایگذاری مقادیر a_i در رابطه (۷) جواب معادله دیفرانسیل بدست می‌آید.

معادله پروفیل سطح آب زیرزمینی

مطالعه حرکت آب در زیرزمین از مهمترین جنبه‌های مهندسی هیدرولوژی می‌باشد. زمانی که سطح ایستابی در لایه‌های آبدار آزاد یا تحت فشار در وضعیت ثابت بماند و نسبت به زمان تغییر نکند جریان در حالت ماندگار می‌باشد. در اینجا به حل معادله جریان آب

زیرزمینی در حالت ماندگار با روش موجک هار پرداخته شده است.

معادله پروفیل سطح آب زیرزمینی در لایه آبدار آزاد در جریان یک بعدی ماندگار

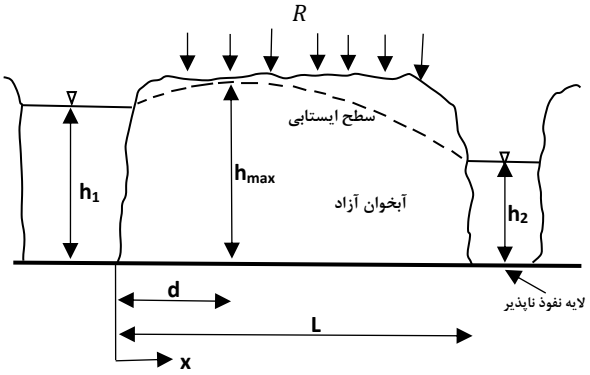
معادله جریان در لایه آبدار آزاد با تغذیه از بالا در محیط همگن به صورت زیر می‌باشد(Fetter, 2018):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{R}{K}=\frac{S_y}{K}\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (10)$$

که R شدت تغذیه، K هدایت هیدرولیکی و S_y ضریب ذخیره می‌باشند.

در جریان ماندگار $\frac{\partial h}{\partial t}=0$، معادله (۱۱) بدین شکل در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)=-\frac{R}{K} \qquad (11)$$



شکل ۱- پروفیل جریان ماندگار آب زیرزمینی با تغذیه بارش در لایه آبدار آزاد

حل معادله دیفرانسیل پروفیل سطح آب زیرزمینی به صورت زیر می‌باشد:

$$h=\left(h_1^2-\frac{(h_1^2-h_2^2)x}{L}+\frac{R}{K}(L-x)x\right)^{0.5} \qquad (12)$$

که در آن h_1 ارتفاع آب در بالادست و h_2 ارتفاع آب در پایین‌دست می‌باشد. همچنین x فاصله از مبدا و L فاصله بین دونقطه‌ای که ارتفاع آب در آن اندازه‌گیری شده است.

تعیین پروفیل سطح آب زیرزمینی لایه آبدار آزاد با روش موجک هار

با ساده سازی رابطه (۱۱)، معادله دیفرانسیل جریان آب زیرزمینی حاکم بر آبخوان آزاد به صورت رابطه (۱۳) زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}\right)=-\frac{R}{k} \qquad (13)$$

رابطه (۱۳) با جایگذاری تقریب‌سازی $y''(x)$ با تابع موجک هار به صورت زیر درمی‌آید:

$$y''(x)=\sum_{i=1}^{2M} a_i\, h_i(x_j)=\frac{-2R}{k} \qquad (14)$$

$$a_1h_1(x_j)+a_2h_2(x_j)+a_3h_3(x_j)+a_4h_4(x_j)=\frac{-2R}{K} \qquad (15)$$

به منظور تعیین ضرایب، ٤ نقطه کالوکیشن در رابطه (۱۵) جانشین می‌شود.

$$\begin{cases} x_j=0.125\rightarrow a_1+a_2+a_3=\frac{-2R}{k} \\ x_j=0.375\rightarrow a_1+a_2-a_3=\frac{-2R}{k} \\ x_j=0.625\rightarrow a_1-a_2+a_4=\frac{-2R}{k} \\ x_j=0.875\rightarrow a_1-a_2-a_4=\frac{-2R}{k} \end{cases} \qquad (16)$$

ضرایب a_i به صورت زیر بدست می‌آید:

$$a_1=\frac{-2R}{k} \qquad a_2=a_3=a_4=0 \qquad (17)$$

با جایگذاری تقریب‌سازی$y(x)$ با تابع موجک هار رابطه به صورت زیر درمی‌آید:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{2M} a_i\, q_i(x_j)+x\,c_m+c_{m+1}=a_1\,q_1(x)+a_2\,q_2(x)+a_3\,q_3(x)+a_4\,q_4(x)+xc_1+c_2 \qquad (18)$$

$$y(x)=h^2=\frac{-2R}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)+xc_1+c_2 \qquad (19)$$

با جایگذاری شرایط مرزی $h(0)=h_1,\quad h(L)=h_2$ و جانشینی مقادیر c_1 و c_2 بدست آمده، حل معادله دیفرانسیل به صورت رابطه (۲۰) بدست می‌آید.

$$h^2=\left(h_1^2-\frac{(h_1^2-h_2^2)x}{L}+\frac{R}{k}(L-x)x\right) \qquad (20)$$

حل معادله آب زیرزمینی لایه آبدار آزاد با روش موجک هار رابطه (۲۰) با حل معادله دیفرانسیل رابطه (۱۲) دقیقاً یکسان است.

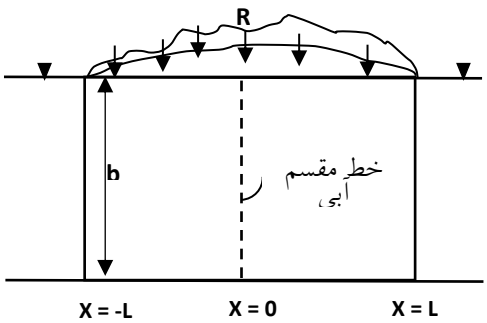
معادله پروفیل سطح آب زیرزمینی در لایه آبدار تحت فشار در جریان یک بعدی ماندگار

معادله دیفرانسیل حاکم برجریان ماندگار در آبخوان تحت فشار با تغذیه از بالا به صورت زیر است (Fetter, 2018):

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{-R}{T} \qquad (21)$$

که در آن R میزان تغذیه، h بار آبی و T ضریب انتقال سفره می‌باشند. حل معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی بار آبی صفر در $x = -\mathrm{L}$ یا $x = L$ و $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ در $x = 0$ صورت زیر ارائه شده است:

$$\mathrm{h(x)} = \frac{\mathrm{R(L^2 - x^2)}}{\mathrm{2T}} \qquad (22)$$



شکل ۲- پروفیل جریان ماندگار آب زیرزمینی با تغذیه بارش در لایه آبدار تحت فشار

تعیین معادله دیفرانسیل پروفیل سطح آب زیرزمینی لایه آبدار تحت فشار با روش موجک هار

برای حل مسئله از روش موجک هار مقدار درجه موجک $M = 2$ در نظر گرفته شده است. بنابراین مقادیر $\mathrm{h}_i(x)$ ، $\mathrm{p}_i(x)$ و $\mathrm{q}_i(x)$ برای $\mathrm{i} = 1,2,3,4$ طبق روابط (۱) تا (٦) بدست می‌آید. مقادیر $\mathrm{h}_i(x)$ در رابطه مسئله جایگذاری می‌شود.

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i\, h_i(x_j) = \frac{-R}{T} \qquad (23)$$

$$a_1 h_1(x_j) + a_2 h_2(x_j) + a_3 h_3(x_j) + a_4 h_4(x_j) = \frac{-R}{T} \qquad (24)$$

بعد از حل معادلات جبری رابطه (٢٤)، مقادیر a_i بدست می‌آید:

$$a_1 = \frac{-R}{T} \qquad a_2 = a_3 = a_4 = 0 \quad (25)$$

با جایگذاری $l = 1,2,3,4$ معادلات جبری بدست می‌آید بدین صورت ٤ نقطه کالوکیشن درنظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} x_j = 0.125 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = \frac{-R}{T} \\ x_j = 0.375 \rightarrow a_1 + a_2 - a_3 = \frac{-R}{T} \\ x_j = 0.625 \rightarrow a_1 - a_2 + a_4 = \frac{-R}{T} \\ x_j = 0.875 \rightarrow a_1 - a_2 - a_4 = \frac{-R}{T} \end{cases} \qquad (26)$$

با جایگذاری تقریب‌سازی $\mathrm{y}'(x)$ و $\mathrm{y}(x)$ با تابع موجک هار روابط زیر بدست می‌آید:

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i\, p_i(x_j) + c_m = a_1\, p_1(x) + a_2\, p_2(x) + a_3\, p_3(x) + a_4\, p_4(x) + c_1 = \frac{-R}{T}\,(x) + c_1 \qquad (27)$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i\, q_i(x_j) + x\, c_m + c_{m+1} = a_1\, q_1(x) + a_2\, q_2(x) + a_3\, q_3(x) + a_4\, q_4(x) + xc_1 + c_2 = \frac{-R}{T}\left(\frac{x^2}{2}\right) + xc_1 + c_2 \quad (28)$$

بنابراین با توجه به شرایط مرزی $\mathrm{y(-L) = y(L) = 0}$ و $\mathrm{y'(0) = 0}$ ،مقادیر c_1 و c_2 به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{c_1 = 0\,,\ \ c_2 = \frac{RL^2}{2T}} \qquad (29)$$

با جایگذاری مقادیر $\mathrm{c_1}$ و $\mathrm{c_2}$، معادله پروفیل سطح آب زیرزمینی بدست می‌آید:

$$y(x) = \frac{-Rx^2}{2T} + \frac{RL^2}{2T} = \frac{R(L^2 - x^2)}{2T} \qquad (30)$$

حل معادله آب زیرزمینی لایه آبدار تحت فشار با روش موجک هار رابطه (۳۰) با حل معادله دیفرانسیل رابطه (۲۲) دقیقاً تطابق دارد.

بحث و نتایج

مسئله ۱. تعیین پروفیل آب زیرزمینی لایه آبدار آزاد با روش موجک هار

ضریب نفوذپذیری در یک لایه آبدار غیرمحصور ۰/۰۰۲ سانتی متر بر ثانیه و تخلخل موثر آن ۰/۲۷ است. آبخوان در بستری از شن به فاصله ۳۱ متر از سطح زمین می‌باشد. دو چاه به فاصله ۱۷۵ متراز یکدیگر در امتداد جریان حفر شده است. سطح ایستابی در چاه اول و دوم به ترتیب ۲۱ متر و ۲۳/۵ متر زیر سطح زمین قرار گرفته است. سطح ایستابی را در وسط فاصله بین دو چاه بدین صورت محاسبه می شود:

بعد از محاسبه بار آبی، تقریب‌سازی $y(x)$ با تابع موجک هار به صورت رابطه (۳۳) ارائه می‌شود:

$$h_1 = 31\ \mathrm{m} - 21\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{m} \qquad (31)$$

$$h_2 = 31\ m - 23.5\ m = 7.5\ m \qquad (32)$$

$$a_1 h_1(x_j) + a_2 h_2(x_j) + a_3 h_3(x_j) + a_4 h_4(x_j) = 0 \qquad (33)$$

با جایگذاری نقاط کالوکیشن در رابطه (۳۳)، مقادیر ضرایب a_i همگی صفر بدست می‌آید.

با جانشین‌کردن شرایط مرزی $h(0) = 10,$ $h(175) = 7.5$ درتقریب‌سازی $y(x)$ با موجک هار رابطه (۳٤) و تعیین ضرایب c_1 و c_2 مقدار ارتفاع سطح ایستابی در فاصله ۸۷/۵ متری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y(x) = h^2 = xc_1 + c_2 \qquad (34)$$

$$c_2 = (10)^2 \quad , c_1 = -\frac{(10\mathrm{m})^2 - (7.5\mathrm{m})^2}{175} \qquad (35)$$

$$h = \sqrt{(10\mathrm{m})^2 - [(10\mathrm{m})^2 - (7.5\mathrm{m})^2]\frac{87.5\mathrm{m}}{175\mathrm{m}}} = 8.8\ \mathrm{m} \qquad (36)$$

بنابراین ارتفاع سطح ایستابی در وسط فاصله بین دو چاه، ۸/۸ متر می‌باشد.

مسئله ۲. تعیین پروفیل آب زیرزمینی آبخوان تحت فشار با روش موجک هار

ضخامت یک لایه آبدار تحت فشار ۳۳ متر و عرض آن ۷ کیلومتر است. دو چاه مشاهده‌ای به فاصله ۱/۲ کیلومتر در جهت جریان حفر شده‌اند. هر دو چاه تا لایه غیرقابل نفوذ و افقی زیرین حفر شده‌اند. بار هیدرولیکی در چاه اول ۹۷/۵ متر و در چاه دوم ۸۹ متر است. ارتفاع پیزومتریک در نقطه‌ای به فاصله ۰/۳ کیلومتر از چاه اول بدین صورت بدست می آید:

تقریب‌سازی $y''(x)$ با تابع موجک هار به صورت رابطه (۳۷) می‌باشد:

$$a_1 h_1(x_j) + a_2 h_2(x_j) + a_3 h_3(x_j) + a_4 h_4(x_j) = 0 \qquad (37)$$

مقادیر ضرایب a_i همگی صفر بدست می‌آید.

تقریب سازی $y(x)$ با موجک هار رابطه (۳۸) می‌باشد:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i\, q_i(x_j) + x\, c_m + c_{m+1} = a_1\, q_1(x) + a_2\, q_2(x) + a_3\, q_3(x) + a_4\, q_4(x) + xc_1 + c_2 = 0\left(\frac{x^2}{2}\right) + xc_1 + c_2 \qquad (38)$$

با جانشین‌کردن شرایط مرزی $h(0) = 97.5,$ $h(1200) = 89$ درتقریب‌سازی $y(x)$ با موجک هار رابطه (۳۹) و تعیین ضرایب c_1 و c_2 رابطه (۳۹)، مقدار ارتفاع پیزومتریک در فاصله ۰/۳ کیلومتر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$c_2 = 97.5 \quad , c_1 = -\frac{97.5 - 89}{1200} = -0.007 \qquad (39)$$

$$h = -0.007 \times 300 + 97.5 = 95.4m \qquad (40)$$

نتیجه‌گیری

در این مطالعه معادلات تخمین سطح آب زیرزمینی در لایه آبدار آزاد و تحت فشار در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل این مسائل به روش موجک هار حل شده است و با حل دقیق معادله دیفرانسیل این مسائل مقایسه شده است. در روش موجک هار شرایط مرزی

و اولیه مسئله در تعیین ضرایب نقش مهمی ایفا می‌کند. این روش عددی ساده بر اساس موجک هار بدین‌گونه است که معادله دیفرانسیل به دستگاه معادلات جبری با متغیر محدود تبدیل می‌شود و با حل دستگاه معادلات جبری و جایگزین کردن شرایط مرزی و اولیه، ضرایب بدست آمده و معادله دیفرانسیل حل می‌شود. یکسان بودن حل دقیق مسائل مهندسی آب زیرزمینی در آبخوان‌های آزاد و تحت با حل بدست آمده از روش موجک هار صحت روش موجک هار را تایید می‌کند. مقایسه این دو راه حل نشان داد که راه حل هار نتایج دقیقی را حتی برای چهار نقطه محدود کالوکیشن ارائه می‌دهد.

REFERENCES

Chang, P. and Piau, P., 2008. Haar wavelet matrices designation in numerical solution of ordinary differential equations. *Int. J. Appl*. Math, 38, 11.

Chen, C.F. and Hsiao, C.H., 1997. Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 144, 87-94.

Fetter, C.W., 2018. Applied hydrogeology. Waveland Press.

Haar, A., 1911. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, 71, 38-53.

Hariharan, G., 2019. Wavelet solutions for reaction-diffusion problems in science and engineering. *Singapore: Springer*.

Heydari, M., Avazzadeh, Z. and Hosseinzadeh, N., 2022. Haar wavelet method for solving high-order differential equations with multi-point boundary conditions. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 8, 528-544.

Lepik, Ü., 2011. Solving PDEs with the aid of two-dimensional Haar wavelets. *Computers & Mathematics with Applications*, 61,1873-1879.

Mohammadi, A., Aghazadeh, N. and Rezapour, S., 2019. Haar wavelet collocation method for solving singular and nonlinear fractional time-dependent Emden–Fowler equations with initial and boundary conditions. *Mathematical Sciences*, 13, 255-265.

Saparova, B., Mamytova, R., Kurbanbaeva, N. and Ahmedov, A.A., 2021. A haar wavelet series solution of heat equation with involution. *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, 86, 50-55.

Shesha, S.R., Nargund, A.L. and Bujurke, N.M., 2017. Numerical solution of non-planar Burgers equation by Haar wavelet method. *Journal of Mathematical Modeling*, 5, 89-118.

Young, R.K., 2012. Wavelet theory and its applications Vol. 189. *Springer Science & Business Media*.

Sustainable Agricultural Science Research /Vol. 4/No. 3/Fall 2024/P: 15 -21

https://sanad.iau.ir/journal/sarj/

Estimation of Groundwater Level Profile Using Haar Wavelet in Sustainable Agriculture

Shiva Khosravi [1], Amir Robati[2]*

[1] PhD Student, Department of Civil Engineering, Kerman Branch, Islamic Azad University, Kerman, Iran.

[2] Department of Civil Engineering, Kerman Branch, Islamic Azad University, Kerman, Iran.

* Corresponding Author's Email: Ammirrr@yahoo.com

(Received: October. 2, 2024 – Accepted: November. 5, 2024)

ABSTRACT

Water Since groundwater resources are the major source of water supply, therefore, the estimation of the groundwater level profile plays an important role in the management of valuable water resources. Nowadays, due to the increasing aquifer use, groundwater levels are declining. The sustainable management of groundwater resources requires high level of knowledge and skills in planning. Accurate groundwater level estimation allows water managers and engineers to develop better strategies to manage groundwater resources. In recent years, the Haar wavelet method has been very effective in solving engineering problems. In this study, in order to investigate the efficiency of the Haar wavelet method, governing equations of groundwater level profile estimation in confined and unconfined aquifer have been used. In this method, the differential equation is converted into a system of algebraic equations that contains a few variables and solution of differential equation is obtained. After solving the algebraic equations, the values of multipliers are obtained. By substituting the boundary conditions in Haar wavelet functions, the values of coefficients determined. After putting the values of coefficients in the basic equation, differential equations are solved. The results of engineering problems using Haar wavelet compared with the solution of the exact mathematical method in related references. The comparisons indicate both of the solution in problems are the same. The results of show that even with a finite number of collocation points, the Haar wavelet method is highly accurate and the solution obtained from the Haar wavelet method is quite similar to the exact mathematical method.

Keywords: Estimation, Groundwater Level, Haar Wavelet