روش شبیه سازی مونت کارلو در گرانش کوانتومی

امید جلیلی

چکیده:
انتشارگر گرانش کوانتومی در صورتبندی انتگرال مسیر فاینمن، با چرخش ویک(Wick) در محور زمان، به تابع افراز(پارش) در مکانیک آماری شبیه میشود. برای محاسبه تابع پارش طبیعی ترین ابزار روش مونت کارلو است. بنابراین با به کار بردن روش مونت کارلو به محاسبه غیر اختلالی انتشارگر نائل میشویم. برای اعمال روش مونت کارلو، لازم است فضای انتگرالگیری را گسسته کنیم و با اعمال الگوریتم مناسب، "منطقه مهم" شناسایی شود. درمورد گرانش کوانتومی، متغییر دینامیکی مورد نظر، یک میدان است(متریک). از این رو لازم است فضا زمان گسسته شود. به تکه های فضا زمانی سیمپلکس چهاربعدی میگویند و الگوریتم خاصی برای ساختن سیمپلکس های ترکیبی موجود است که به آن حساب رگ(Regge)گویند. به روش حساب رگ عبارتی برای تابع پارش و سپس با روش مونت کارلو دینامیک حجم بسلای فضا زمانی(سیمپلکس های ترکیبی ساده) برآورد میشود. در انجام این محاسبات، ثابتهای نظریه(ثابت گرانش و ثابت کیهان شناختی) متغییر فرض میشود. خواهیم دید فقط در نواحی مشخصی از فضای فاز این ثوابت، نظریه پایدار است.

واژه‌های کلیدی: گرانش کوانتومی، روش مونت کارلو، مثلث بندی، حساب رگ

۱. مقدمه

برای مشاهده اثر گرانش کوانتومی به انرژی هایی از مرتبه پلانک یعنی $10^{19}\,Gev$ نیاز هست. این انرژی ها در بعضی از ذرات بنیادی موجود هست و هم در نقطه صفر خلقت که اثر آن را می توان در تابش زمینه کیهانی (CMB) دید، قابل مشاهده است. ضرورت گرانش کوانتومی فقط به این موارد منتهی نمیشود. ۷۰٪ کیهان از انرژی تاریک و ۲۵٪ از ماده تاریک تشکیل شده است و تنها ۵٪ کیهان از مواد باریونی ساخته شده است. بنابراین تا زمانی که موضوع انرژی تاریک مطرح است به گرانش کوانتومی نیاز هست. شاید تدوین گرانش کوانتومی به اصلاحاتی در نظریه استاندارد ذرات بنیادی نیز منجر شود.

سوای ملاحظات تجربی فوق دلایل نظری مهمی هم برای مطالعه گرانش کوانتومی موجود است. حتی در کمترین حد تلفیق گرانش و کوانتوم یعنی جایگزینی تانسور انرژی سمت راست معادله گرانش اینشتین با مقدار چشمداشتی آن، نظریه با مشکلاتی روبرو میشود.

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}\langle\psi|\hat{T}_{\mu\nu}|\psi\rangle \tag{1}$$

۱. استادیار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد نورo_jalili@iaunour.ac.ir
۲عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال

نخست اینکه این مقدار چشمداشتی واگرا میشود ولازم می آید نظریه را بازتنظیم کنیم. با بازتنظیم، نه تنها به بازبهنجارش ثابتهای بنیادی نظریه منجر میشویم بلکه مجبور میشویم به معادله گرانش جملاتی بیافزاییم [۱]. در نهایت نظریه پدید آمده چندان قابل اعتماد نیست چراکه احتمالا موجب میشود فضای مینکوفسکی ناپایدار باشد [۲]!

دوم اینکه معادله (۱) به طور پیچیده ای غیرخطی استψ;درتشکیل متریک نقش دارد و برعکس متریک هم در مقدار ψ نقش دارد. از طرفی اگر ψ_1 و ψ_2 حالتهای متناظر با متریک های دیفئومورف g_1 و g_2 باشد، ترکیب خطی آنها هم جواب است. اما روشن نیست متریک متناظر با ترکیب خطی با g_1 یا g_2 دیفئومورف باشد! به خاطر همین موضوع دیراک معتقد بود معادله(۱) غلط است. این موضوع را می توان از کوانتومی کردن امواج گرانشی نیز فهمید; انتشارگر گراویتون با آنچه معادله(۱) می گوید قویا مغایرت دارد [۳]. برای بررسی دلایل دیگر در ضرورت کوانتومی کردن گرانش به [۴] مراجعه شود. در این مقاله ابتدا گرانش کوانتومی بر مبنای فرمولبندی انتگرال کوانتومی بررسی میشود سپس با توضیح ضرورت استفاده از روش عددی مونت کارلو به این روش پرداخته میشود و در پایان نتایج اعمال روش مونت کارلو به گرانش کوانتومی بررسی میشود.

۲-گرانش کوانتومی

از زمان ابداع انتگرال مسیر توسط فاینمن(۱۹۴۸) تاکنون، انتگرال مسیر همواره ابزاری اصلی در فیزیک نظری بوده است. انتگرال مسیر گرانش کوانتومی نخستین بار توسط میسنر در سال ۱۹۵۷ ارائه شد:

$$Z(g) = \int \mathfrak{D}g_{\mu\nu}(x)\, e^{iS[g_{\mu\nu}(x)]} \qquad (۲)$$

که درآن $S\left[g_{\mu\nu}(x)\right]$ کنش گرانش است و انتگرال بر روی همه متریک‌ها تقسیم برگروه دیفئومورفیسم گرفته میشود. برای راحت تر شدن بکارگیری انتگرال مسیر در نظریه های پیمانه ای، نظریه های پیمانه ای شبکه و همچنین دلایل فنی از جمله از پایین کراندار کردن کنش، بهتر است با دوران۹۰ درجه در فضای مختلط زمانی به زمان موهومی برویم (چرخش ویک) [۵]. در این صورت کنش گرانش عبارتست از

(۳)

$$S_E[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^4 x\, \sqrt{g}(R-2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} d^3 x\, \sqrt{h}K$$

که در آن $\mathcal{M}$ بسلای فضا زمانی، $\partial\mathcal{M}$ مرز این بسلا و h دترمینان متریک فضایی و K رد انحنای ذاتی ابر صفحه در فرمولبندی ۳+۱ است [۶]. انتگرال مسیر گرانش کوانتومی دارای طبیعت پیچیده ای است به طوریکه حتی بکارگیری روشهای عددی یعنی گسسته کردن انتگرال و در نهایت رفتن به حد پیوسته محل تردید است! دو روش عمده در گسسته سازی عبارتست از حساب رگ($Regge$) و مثلث بندی دینامیکی. در واقع انتگرالهای مسیر گرانش کوانتومی در چهار بعد را نمی توان بدون استفاده از روشهای تقریبی به صورت تحلیلی حساب کرد. در حساب $Regge$ انتگرال مسیر را اقلیدسی بررسی می کنیم و ساختار چهاربعدی را به مجموعه ای از سیمپلکس ها تجزیه می کنیم و طول یال ها را به عنوان متغییر دینامیکی در نظر می گیریم [۷]. یکی از جنبه های مهم محاسبه، وجود نامساوی مثلث برای این یالها است. یعنی طول یک یال از مجموع دو یال دیگر کوچکتر است.

روش دیگر این است که طول یال را ثابت نگه داریم و جمع زنی در انتگرال مسیر را روی تمام بسلا های ناشی از به هم چسباندن سیمپلکس ها انجام دهیم، که این کار انتگرال‌گیری را به یک مسأله جایگشتی تقلیل می دهد. به این روش مثلث بندی دینامیکی گویند [۸]. اگر از نظریه اقلیدسی استفاده کنیم دچار مشکل می شویم. اول اینکه مسأله ضریب همدیس وجود دارد. دوم اینکه جمع زنی روی پیکربندی در حد ماکروسکپی هندسه

چهاربعدی را تضمین نمی کند؛ یا یک پلیمرسازی وجود خواهد داشت(یعنی پدید آمدن بعد موثری در حدود ۲) یا برای مقیاس بزرگ، هندسه هایی با ابعاد خیلی بزرگ پدید می آید! به این دلیل *Ambjorn* و *Loll* نسخه لورنتسی مثلث بندی دینامیکی را ارائه کردند [۹]. فایده این کار این است که ساختار علی (مخروط نوری) پیکربندی فضا زمان در انتگرال مسیر مستقیما محفوظ می ماند، از نقاط شاخه ای روش اقلیدسی اجتناب می شود و تغییری در توپولوژی فضایی ایجاد نمی شود. در اینجا مثلث بندی دینامیکی لورنتسی را به طور مختصر اشاره می کنیم. عنصر پایه عبارتست از سیمپلکس های دوبعدی نشان داده شده دز شکل یک. این سیمپلکس ها را می توان تماما با مربع ثابت طول یال $\{l_i^2\}$ توصیف کرد که در آن l_i^2در حالت فضا گونه برابر a^2 و در حالت زمان گونه برابر$-\alpha a^2$با $\alpha > 0$ است. در اینجا a پارامتر منظم سازی با ابعاد طول است که در حد پیوسته به صفر میل می کند. به دلیل ماهیت لورنتسی، در حالت کلی طول یال فضاگونه و زمان گونه باهم برابر نیستند. فضایی که از چسباندن تمام اینچنین سیمپلکس هایی پدید می آید فضای تمام هندسه ها را معین می کند.

در این روش، انحنا در جمع روی انحنای گوسی تمام زیر بسلاهای دو بعدی نهفته است که در اینجا زاویه در هر راس اندازه ایی از انحنای گوسی است.

بنابراین، تعریف انتگرال مسیر کوانتومی به صورت زیر تغییر می کند

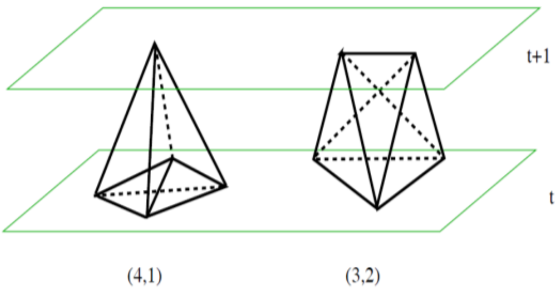
(۴)

$$Z(g) = \int \mathfrak{D}g_{\mu\nu}(x)\, e^{iS[g_{\mu\nu}(x)]} \longrightarrow \sum_{T\in\mathcal{T}} \frac{1}{C_T} e^{iS_{discrete}(T)}$$

که در آن T نمایانگر چسباندن ناهم ارز از دسته $\mathcal{T}$ مثلث بندی است و C_T ضریب تقارن است که در مثلث بندی بزرگ تقریبا همیشه برابر یک است. به دلایل فنی می توان همچنان از چرخش *Wick* استفاده کرد: نگاشت زمینه زمان گونه به زمینه ($t \longrightarrow -i\tau$ فضاگونه). بعد از این چرخش*Wick* به ناحیه اقلیدسی، کنش $S_{discrete}$ (که همچنان کنش *Regge* نامیده می شود) برابر است با عبارت

(۵)

$$S_{discrete}(T) = \kappa_{d-2}N_{d-2} - \kappa_d N_d$$



شکل-۱. سیمپلکس های پایه که در ساخت مثلث بندی چهاربعدی استفاده میشود

که در آن N_d تعداد سیمپلکس های d بعدی است(که با حجم کل متناسب است) و κ_i توابعی از ثابت گرانشی و کیهان شناختی لخت (بدون بازبهنجارش) است. با جایگذاری(۵) در(۴) دو جمله مجزا قابل تشخیص است: یک سیمپلکس d بعدی که از حجم می آید یعنی جمله دوم در (۵) و یک سیمپلکس بیش از (d-2) بعدی که از سیمپلکس های هم بعد ۲ می آید زیرا جمله نخست در (۵) یک جمله انحنا است و انحنا از انحناهای گوسی زیر بسلا های دو بعدی بدست می آید.

در انتهای محاسبه می توانیم با انجام وارون دوران *Wick* به یک ناحیه لورنتسی برگردیم. این کار تنها در d=2 به طور صریح انجام پذیر است. در ابعاد بالاتر عموما مشاهده پذیرهایی بررسی میشوند که تحت دوران *Wick* ناوردا هستند و بنابر این ناحیه لورنتسی و اقلیدسی دارای مقدار یکسانی هستند. نکته مهم این است که مقدم بر هرچیز، صورتنبدی لورنتسی است.

در حد پیوسته، حد گیری $N_d \longrightarrow \infty$ و$a \longrightarrow 0$ را انجام می دهیم با شرط ثابت بودن بعضی کمیتهای لازم (مانند حجم کل متوسط سیمپلکس ها که با $N_d a^d$

متناسب است). با وجود اینکه این موضوع با مشاهدات رایج در توافق است اما هیچ مقدار عددی ای نمی توان برای آن برآورد کرد.

در حد پیوسته هیچ جواب تحلیلی برای وضعیت چهاربعدی وجود ندارد اما برای حالت دو و تا حدی سه بعدی جواب تحلیلی در دست است. در وضعیت سه بعدی جمع زنی (۴) همچنان ممکن است اما این بار باید از شبیه سازی مونت کارلو استفاده شود(که حجم فضا زمان تقریبا ثابت فرض می شود). البته روش مونت کارلو را می توان برای وضعیت جالب d=4 هم بکار برد. اگرچه حد پیوسته به طور تحلیلی بدست نیامده است ولی شواهد عددی نیرومندی برای آن موجود است و نتایج جالب توجهی در دست است. بنابراین ابتدا روش مونت کارلو را مرور میکنیم.

۳-روش مونت کارلو

واژه مونت کارلو نخستین بار در سال ۱۹۴۹ توسط فیزیک دانانی که در لوس آلاموس برروی سلاح هسته ای کار می کردند بکار گرفته شد. هدف تبدیل انتگرالهای معین به یک مسئله میانگین گیری در نظریه احتمال است. یعنی در محاسبه انتگرال معین، انتگرالده را به صورت زیر فرض می‌کنیم.

(۶)

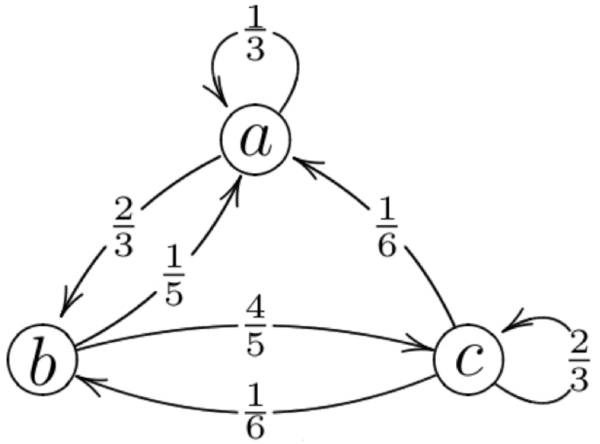
$$\langle G_N \rangle = \int f(x) g(x) dx.$$

این تجزیه را به گونه ای انجام می دهیم که تابع f مثبت باشد و مساحت آن واحد باشد به طوری که بتوان آن را تابع احتمال فرض کرد. اکنون فرض می کنیم که ماشینی داریم که مقدار x را با احتمال f(x) تولید می کند. این ماشین را N بار به کار می اندازیم. در این صورت داریم

$$G_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i) \qquad (۷)$$

پس همه چیز در گرو ساختن ماشین یا الگوریتمی است که با احتمال مفروض f(x) برای ما x تولید کند [۱۰]

این کار را با بنا کردن یک زنجیر مارکف انجام میدهیم. شکل-۲ یک زنجیر مارکف نوعی را نشان میدهد [۱۱].



شکل-۲. مثالی از یک زنجیر مارکوف با سه جایگاه

دایره ها معرف حالتهای مشخصی هستند که به آن جایگاه میگوییم. در این مثال جایگاه ها از سه حالت b, a و c تشکیل شده است. در هر لحظه از زمان هر حالت دارای احتمال مشخصی است و با طی بازه های گسسته زمانی، گذارهایی با احتمال مندرج بر روی هر گذار روی میدهد. اگر احتمال هر جایگاه در حد $t \longrightarrow \infty$ به اعداد مشخصی برسد گوییم زنجیر پایا است. در روش مونت کارلو زنجیر مارکفی پایایی طراحی میشود که به $f(x)$ همگرا میشود. مقادیر مختلف x همان مقادیرجایگاه ها است. کاری که باید انجام بدهیم طراحی احتمال گذار است. این کار نخستین بار توسط توسط متروپلیس و همکاران انجام شد که به الگوریتم $M(RT)^2$ معروف است.به طور مختصر در روش مونت کارلو با الگوریتم $M(RT)^2$ (یا الگوریتمهای مشابه) زنجیر مارکفی طراحی میکنیم تا برای ما متغییر x را با احتمال $f(x)$ تولید کند. سپس این x را در معادله (۷) قرار میدهیم تا تقریبی از انتگرال (۶) بدست آید.

۴-تحلیل

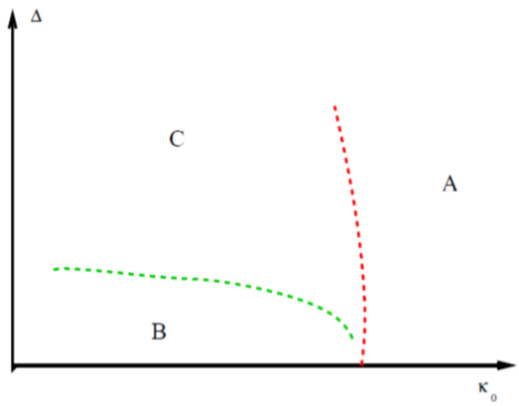
فرض میکنیم توپولوژی بسلا به صورت $[0,1] \times S^3$ باشد. این بسلا را می توان با سیمپلکس های پایه شکل-

۱ ساخت. با انجام این کار کنش گرانشی تابعی از چند عدد صحیح و چند ثابت فیزیکی خواهد بود [۱۴ و ۱۳]

(۸)

$$S_E = -(k_o + 6\Delta)N_o + k_4\big(N_4^{(4,1)} + N_4^{(3,2)}\big) + \Delta\big(2N_4^{(4,1)} + N_4^{(3,2)}\big)$$

که در آن k_o ، k_4 و Δ توابعی از ثابت گرانش، ثابت کیهان شناختی و α هستند. همچنین $N_4^{(4,1)}$ تعداد سیمپلکس های نوع (۱و۴) و $N_4^{(3,2)}$ تعداد سیمپلکس های نوع (۲و۳) است. در حد حجم بی نهایت k_4 به صورت تابعی فقط از ثابت کیهان شناختی به دست می آید. برای دو ثابت باقیمانده یعنی k_o و Δ می توان سه فاز(شکل-۳) تشخیص داد.



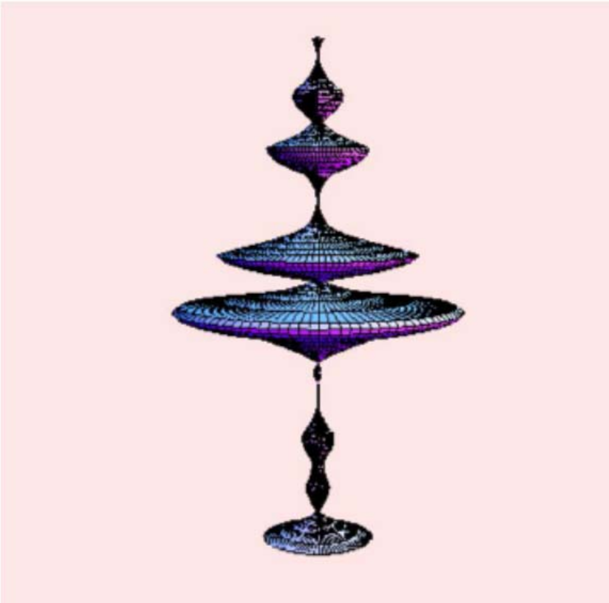
شکل-۳. نمودار کیفی فضای فاز

این سه منطقه فاز عبارتست از:

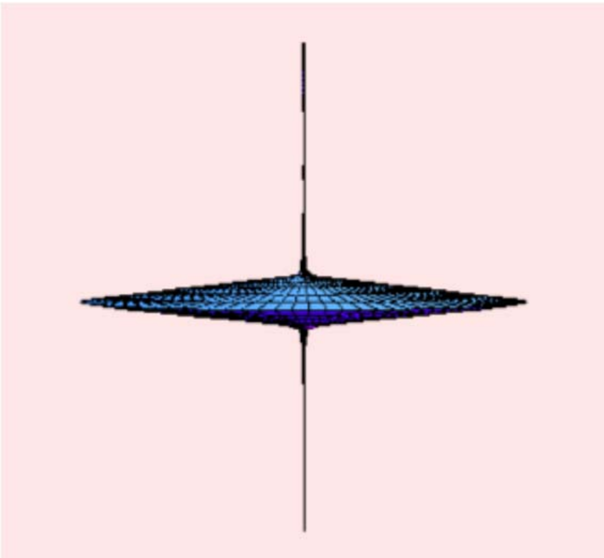
A)-این فاز با k_o های به اندازه کافی بزرگ متناظر است. اگر به روش مونت کارلو حجم ابرصفحه ثابت $\tau =$ را محاسبه کنیم، شاهد نوسانات غیر عادی در طول زمان خواهیم بود، شکل-۴.

B)-این فاز به ازای k_o و Δ های به اندازه کافی کوچک(که شامل $\Delta= o$ می شود) روی می دهد. اگر به روش مونت کارلو حجم ابر صفحه ثابت $\tau =$ را حساب کنیم این بار شاهد یک کاهش بعد خودبخودی خواهیم بود، شکل-۵.

c)-این فاز به ازای k_o های به اندازه کافی کوچک اما Δ ناصفر روی می دهد. این فاز دارای ساختار هندسی جدیدی است [۱۴].



شکل-۴. نمودار حجم فضای فاز بر حسب زمان که با روش مونت کارلو در ناحیه A رسم شد.



شکل-۵. نمودار حجم فضای فاز بر حسب زمان که با روش مونت کارلو در ناحیه B رسم شد.

۵-نتیجه

جهان کنونی به غیر از شکل خاص قوانین حاکم برآن معلول مقدار عددی ثابتهای بنیادین آن است. در واقع مقدار خاص این ثابت ها جنبه متافیزیکی فیزیک کنونی به حساب می آید. اخیرا سازوکاری برای تغییر این ثابتهای بنیادین پیشنهاد شده است[۱۶، ۱۵]. بر اساس این پیشنهاد در عبور از تکینگی ها ثابتهای بنیادین می تواند تغییر کند و جهانی متفاوت با نیای خود پدید آورد. مقدار خاص این ثابت ها نه تنها در پدید آمدن یا نیامدن ساختارهای مقید نظیر اتمها نقش دارد بلکه در پایدار بودن یا نبودن خود فضا زمان کیهان تازه متولد شده هم نقش دارد. هرچند نظریه نهایی گرانش کوانتومی در دست نیست اما اگر به همان روش سنتی متریک نظریه را کوانتومی کنیم و از روش مونت کارلو استفاده کنیم به سه فاز مجزا در فضای فاز ثوابت فیزیکی (ثابت گرانش، ثابت کیهانشناسی) بر می خوریم. ثابت شد یک ناحیه از این سه ناحیه فیزیکی است. یعنی مناطق فاز دیگر منجر به انبساط عالم و تشکیل فضا نمی شود. بنابراین در تشکیل کیهان های جدید فقط کیهان هایی که در این منطقه خاص هستند ادامه می یابند و قادرند نوعی فرآیند داروینی را ادامه دهند [۱۵].

مراجع

[1]-Birrell, N. D. and Davies, P. C. W.,*Quantum fields in curved space*, Cambridge University Press, 1982

[2]- Ford, L. H. *Spacetime in semiclassical gravity*. http://arxiv.org/abs /grqc/0504096 [18 pages] (2006).

[3]- Page, D. N. and Geilker, C. D. *Indirect evidence for quantum gravity.Phys. Rev. Lett.*, **47**, 979–82 (1981).

[4]- Thiemann, T.,*Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press(2007).

[5]- Rothe, HeinzJ.-Lattice *Gauge Theories An Introduction*-World Scientific Publishing Company (2005)

[6]- R. M. Wald. *General Relativity*, The University of Chicago Press (1989)

[7]- Williams, R.,*Recent progress in Regge calculus.*Nucl. Phys. B (Proc.Suppl.),**57**, 73–81(1997).

[8]-Ambjorn,Jan MauroCarfora, Annalisa Marzuoli*The Geometry of Dynamical Triangulations,* Springer (1997)

[9]- Ambjorn, J. and Loll, R. *Non-perturbative Lorentzian quantum gravity, causality and topology change.Nucl. Phys. B*, **536**, 407–34(1998).

[10]- Kalos, Malvin H. ; Whitlock, Paula A (auth.) *Monte Carlo Methods*, Second Edition (2008)

[11]- Rubinstein R.Y., Kroese D.P. *Simulation and Monte-Carlo method,* Wiley, (2007)

[12]- AmbjørnJ., Jurkiewicz J.,Loll, R.,*Dynamically triangulating Lorentzian quantum gravity*, Nuclear Physics BVolume 610, Issues 1–2, 3 September 2001, Pages 347–382

[13]-Ambjørn, J., Jurkiewicz, J., and Loll, R.*The Spectral Dimension of the Universe is Scale Dependent* Phys. Rev. Lett.95, 171301 – Published 20 October 2005

[14]- Ambjørn, J., Jurkiewicz, J., and Loll, R.*Reconstructing the Universe* Phys. Rev. D 72, 064014 – Published 22 September 2005

[15]- L. Smolin, "*The life of the cosmos*",; Class. Quan. Grav. 9, 173 (1992) Oxford University Press, Oxford 1994

[16]-Rodolfo Gambini, and Jorge Pullin, *Discrete quantum gravity: a mechanism for selecting the value of fundamental Constants* Int. J. Mod. Phys. D 12, 1775 (2003).