

پیش‌بینی دالان‌های پایداری فرز CNC با روش مرتبه سوم گسسته‌سازی کامل

سلمان پاک نظر^۱

salmanpaknazar@gmail.com

محمد جعفر استاد احمد قرابی^۲

چکیده

در این مقاله پیش‌بینی دالان‌های پایداری با روش جدید مرتبه سوم گسسته‌سازی کامل که مبتنی بر انتگرال‌گیری مستقیم است ارائه شده است. در ابتدا مدل دینامیکی فرزکاری با تاخیر زمانی به فرم فضای حالت را به فرم انتگرالی می‌نویسیم، بعد از اینکه هر تناوب زمانی به تعداد فواصل محدود گسسته شد روش گسسته‌سازی کامل برای حل دستی قسمت انتگرالی سیستم به کار گرفته می‌شود. در هر بازه کوچک زمانی چند جمله‌ای درجه سوم لاگرانژ جهت میان‌یابی قسمت حالت به کار رفته و چند جمله‌ای خطی لاگرانژ برای میان‌یابی قسمت‌های تاخیر زمانی و تناوب زمانی استفاده شده است. سپس یک طرح دینامیکی گسسته به دست می‌آید که با آن می‌توان ماتریس انتقال حالت را در یک بازه زمانی به دست آورد و با استفاده از این ماتریس در تئوری Floquet دالان‌های پایداری فرزکاری تخمین زده می‌شوند. در ادامه مثال مینایی جهت اعتبار سنجی روش و مقایسه نتایج با روش‌های قبلی ارائه شده است. در انتها برنامه MATLAB جهت حل مساله آورده شده است.

واژه‌های کلیدی: دالان‌های پایداری فرز، روش مرتبه سوم گسسته‌سازی کامل، تئوری Floquet، تاخیر زمانی، MATLAB

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مکانیک، گروه مهندسی مکانیک، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد سمنان، دانشگاه آزاد اسلامی، سمنان، ایران

۱. مقدمه

یکی از پرکاربردترین روش‌ها در ماشین‌کاری، فرآیند فرزکاری CNC است. ساخت پرده‌های توربین، ملخ هواپیما، انواع قالب‌های تزریق و فلزی و... تنها بعضی از کاربردهای ماشین‌های فرز CNC می‌باشد، در فرآیند فرزکاری افزایش قابلیت ماشینکاری و بهبود سرعت و کیفیت و دقت بسیار ضروری است، پدیده چتر (ارتعاشات در ماشینکاری) باعث کاهش عوامل فوق می‌شود که برای جلوگیری از آن اطلاع از نواحی و دالان‌های پایداری (SLD) امری ناگزیر است. پدیده چتر برای انتخاب عده دوران مناسب، عمق بار مناسب و سرعت پیشروی مناسب و... در ماشین‌کاری بسیار اهمیت دارد. از سال ۱۹۵۰ تاکنون روش‌های مختلف تحلیلی و آزمایشگاهی برای حل این مساله ارائه شده است.

در سال ۱۹۵۹، توبیاس^۱ از پایه‌گذاران مبحث تئوریک ارتعاش چتر بوده وی ارتعاشات چتر در ماشین ابزارها را بر اساس مکانیزم تغییر ضخامت براده بیان نمود. [۱] در سال ۱۹۶۷، داس^۲ اولین مدل ریاضی دینامیک فرآیند فرزکاری را ارائه داد. [۲] در سال ۱۹۶۹، هانا^۳ و توبیاس تئوری ارتعاش چتر غیرخطی را ارائه کردند. [۳] در سال ۱۹۹۵، آلتینتاش^۴ و بوداک^۵ مدلی تحلیلی برای ارتعاش چتر بدون در نظر گرفتن زاویه مارپیچ ابزار ارائه کردند. [۴] در سال ۲۰۰۲ روش نیمه گسسته‌سازی (SD) توسط استفان^۶ و اینسپرگر^۷ ارائه شد که روش عددی کاربردی برای تحلیل پایداری سیستم‌های با تاخیر خطی می‌باشد. [۵] در سال ۲۰۰۳، استفان و اینسپرگر راهکاری ریاضی برای تحلیل پایداری سیستم‌های با ترم تاخیر زمانی و سپس استفاده از آن برای ارتعاشات چتر در ماشین ابزار بدون در نظر گرفتن زاویه مارپیچ ابزار ارائه کردند. [۶]

در سال ۲۰۰۳ روش (TFEA) برای شبیه‌سازی فرآیند فرزکاری توسط بای لی^۸ ارائه شد. [۷] در سال ۲۰۰۶، زاتاراین^۹ و اینسپرگر روابط تحلیلی آلتینتاش و بوداک برای ابزار با زاویه مارپیچ برای فرزکاری با یک درجه آزادی را بسط دادند. [۸]

در سال ۲۰۱۰ یه‌دینگ^{۱۰} و لیمین زوو^{۱۱} روش کاملاً جدید گسسته‌سازی کامل (FD)^{۱۲} که مبتنی بر انتگرال‌گیری مستقیم می‌باشد را ارائه کردند. [۹]

سپس اینسپرگر روش گسسته‌سازی کامل ربا روش مرتبه صفر نیمه گسسته‌سازی و روش مرتبه اول نیمه گسسته‌سازی مقایسه کرد:

نتایج نشان داد که خطای گسسته‌سازی محلی برابر با $O(\tau^2)$ است و نیز خطای مرتبه صفر نیمه گسسته‌سازی مقداری مشابه است. [۱۰] بار دیگر یه دینگ و لیمین زوو با استفاده از روش مرتبه دوم گسسته‌سازی کامل مرتبه خطا را به $O(\tau^3)$ بهبود بخشیدند [۱۱].

در این مقاله چند جمله‌ای مرتبه سوم لاگرانژ جهت میان‌یابی قسمت حالت معادله جایگزین میان‌یابی خطی و مرتبه دوم شده است. با توجه به میان‌یابی توسط ۴ نقطه دقت این روش بسیار بهبود پیدا کرده و مقایسه نتایج این امر را تایید می‌کند.

در ادامه این مقاله در قسمت دوم مدل ریاضی دینامیک فرزکاری ارائه شده که اثر تاخیر زمانی در آن به‌وسیله‌ی روش انتگرال‌گیری مستقیم فرمول‌بندی شده است، سپس روش مرتبه سوم گسسته‌سازی کامل ارائه گردیده و در قسمت سوم اعتبارسنجی روش با مقایسه این روش با سایر روش‌ها بحث شده است و ضریب هم‌گرایی و میزان تاثیر این روش به‌دست آمده است. در قسمت چهارم نتایج این مقاله ارائه گردیده و در نهایت برنامه‌های MATLAB برای رسم دیاگرام‌های دالان‌های پایداری فرز آورده شده است.

۲. محاسبه و مدل ریاضی

معادله دینامیکی فرزکاری با در نظر گرفتن اثر تاخیر زمانی به شکل زیر می‌باشد: [۱۱]

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + B(t)x(t) - B(t)x(t-T) \quad (1)$$

که در آن A ماتریسی است ثابت که نشان دهنده‌ی خاصیت تغییرناپذیری زمان در سیستم می‌باشد، B(t) ماتریس ضرایب متناوب است که در آن $B(t) = B(t+T)$ و T تناوب زمانی است که برابر با تاخیر زمانی می‌باشد.

بر اساس روش انتگرال‌گیری مستقیم و بازه زمانی T که به m قسمت مساوی کوچک تقسیم شده است $T = m\tau$ ، جواب معادله (۱) در فواصل کوچک $k\tau \leq t \leq (k+1)\tau$, $(k = 0, \dots, m)$ صورت زیر به‌دست می‌آید. [۱۱]

(۲)

$$x(t) = e^{A(t-k\tau)} x(k\tau) + \int_{k\tau}^t \{ e^{A(t-\zeta)} B(\zeta) x(\zeta) \} d\zeta - \int_{k\tau}^t \{ e^{A(t-\zeta)} B(\zeta) x(\zeta - T) \} d\zeta$$

- 1-stability lob diagrams
2. Tobias
3. Das
4. Hanna
- 5-Altintas
6. Budak
- 7- semi discretization method
8. Stephan
9. Inpsperger
- 10-Bayly et al
11. zatarain
- 12- Ye Ding
- 13-LiMIN Zhu
- 14- full discretization method

کـــه در آن $x(k\tau)$ نشان دهنده مقدار $x(t)$ در $t = k\tau$ می باشد. (3)

$$x(k\tau + \tau) = e^{A\tau} x(k\tau) + \int_0^\tau \{e^{A\zeta} [B(k\tau + \tau - \zeta)x(k\tau + \tau - \zeta)]\} d\zeta - \int_0^\tau \{e^{A\zeta} [B(k\tau + \tau - \zeta)x(k\tau + \tau - \zeta - T)]\} d\zeta$$

که در آن $0 \leq t \leq \tau$.

یهدینگ ولیمین زوو میان یابی خطی (مرتبه اول) را به طور هم زمان برای حل قسمت حالت سیستم و قسمتهای تناوب زمانی و تاخیر زمانی به کار گرفتند و آن را وروش مرتبه اول گسسته سازی کامل نامیدند. [۹] بار دیگر یه دینگ ولیمین زوو برای تناوب زمانی و تاخیر زمانی از همان میان یابی خطی استفاده کردند ولی برای قسمت حالت از میان یابی مرتبه دوم لاگرانژ استفاده کردند و روش مرتبه دوم گسسته سازی کامل را ارائه نمودند. [۱۱] در این مقاله برای تناوب زمانی و تاخیر زمانی از میان یابی خطی و برای قسمت حالت مساله از میان یابی مرتبه سوم لاگرانژ استفاده شده است. برای ماتریس ضرایب متناوب $B(k\tau + \tau - \zeta)$ در معادله (۳) با استفاده از میان یابی خطی لاگرانژ داریم:

$$B(k\tau + \tau - \zeta) = B_0^{(k)} + B_1^{(k)} \zeta, \quad (4)$$

که در آن B_k و $B_0^{(k)} = B_{k+1}$, $B_1^{(k)} = (B_k - B_{k+1}) / \tau$ نشان دهنده مقدار B_t در زمان $t_k = k\tau$ است. به طور مشابه برای قسمت تاخیر زمانی معادله (۳) $x(k\tau + \tau - \zeta - T)$ اگر از میان یابی خطی استفاده کنیم با استفاده از مقادیر X_{k-m} و X_{k+1-m} و دو مقدار مرزی در بازه زمانی $(k-m)\tau, (k+1-m)\tau$ داریم:

$$x(k\tau + \tau - \zeta - T) = X_{k+1-m} + \zeta(X_{k-m} + X_{k+1-m}) / \tau \quad (5)$$

در این بخش برای قسمت حالت معادله (۳) $x(k\tau + \tau - \zeta)$ از چند جمله ای مرتبه سوم لاگرانژ با استفاده از نقاط $t_{k+1}, t_k, t_{k-1}, t_{k-2}$ و مقادیر این نقاط که به ترتیب $X_{k+1}, X_k, X_{k-1}, X_{k-2}$ است، استفاده شده است:

$$x(k\tau + \tau - \zeta) = \frac{(2\tau - \zeta)(\tau - \zeta)(-\zeta)}{6\tau^3} X_{k-2} + \frac{(3\tau - \zeta)(\tau - \zeta)(-\zeta)}{2\tau^3} X_{k-1} + \frac{(3\tau - \zeta)(2\tau - \zeta)(-\zeta)}{-2\tau^3} X_k + \frac{(3\tau - \zeta)(2\tau - \zeta)(\tau - \zeta)}{6\tau^3} X_{k+1} \quad (6)$$

با جای گذاری معادلات (۴) و (۶) در معادله (۳) طرح دینامیکی گسسته سازی به صورت زیر به دست می آید:

$$X_{k+1} = F_{k+1} X_{k+1} + (F_0 + F_{0,k}) X_k + F_{k-2} X_{k-2} \quad (7)$$

$$+ F_{k-1} X_{k-1} - F_{m-1} X_{k+1-m} - F_m X_{k-m}$$

$$F_0 = \phi_0,$$

$$F_{k+1} = (\phi_1 - \frac{11\phi_2}{6\tau} + \frac{\phi_3}{\tau^2} - \frac{\phi_4}{6\tau^3}) B_0^{(k)} + (\phi_2 - \frac{11\phi_3}{6\tau} + \frac{\phi_4}{\tau^2} - \frac{\phi_5}{6\tau^3}) B_1^{(k)}$$

$$F_{0,k} = (\frac{3\phi_2}{\tau} + \frac{\phi_4}{2\tau^3} - \frac{5\phi_3}{2\tau^3}) B_0^{(k)} + (\frac{3\phi_3}{\tau} + \frac{\phi_5}{2\tau^3} - \frac{5\phi_4}{2\tau^3}) B_1^{(k)}$$

$$F_{k-2} = (\frac{-\phi_2}{\tau} + \frac{\phi_3}{6\tau} - \frac{\phi_4}{6\tau^3}) B_0^{(k)} + (\frac{-\phi_3}{\tau} + \frac{\phi_4}{6\tau} - \frac{\phi_5}{6\tau^3}) B_1^{(k)}$$

$$F_{k-1} = (\frac{-3\phi_2}{2\tau} + \frac{\phi_3}{2\tau^2} - \frac{\phi_4}{2\tau^3}) B_0^{(k)} + (\frac{-3\phi_3}{2\tau} + \frac{\phi_4}{2\tau^2} - \frac{\phi_5}{2\tau^3}) B_1^{(k)}$$

$$F_{m-1} = (\phi_1 - \frac{\phi_2}{\tau}) B_0^{(k)} + (\phi_2 - \frac{\phi_3}{\tau}) B_1^{(k)}$$

$$F_m = (\frac{\phi_2}{\tau}) B_0^{(k)} + (\frac{\phi_3}{\tau}) B_1^{(k)}$$

در معادلات فوق ماتریس های ϕ_5, ϕ_0 به صورت زیر است:

$$\phi_0 = e^{A\tau}, \quad (8)$$

$$\phi_1 = \int_0^\tau e^{A\zeta} d\zeta,$$

$$\phi_2 = \int_0^\tau \zeta e^{A\zeta} d\zeta,$$

$$\phi_3 = \int_0^\tau \zeta^2 e^{A\zeta} d\zeta,$$

$$\phi_4 = \int_0^\tau \zeta^3 e^{A\zeta} d\zeta,$$

$$\phi_5 = \int_0^\tau \zeta^4 e^{A\zeta} d\zeta,$$

واضح است که می توان ماتریس های ϕ_5, ϕ_0 را بر اساس $A^{(k)}$ بیان نمود: [۱۱]

$$\phi_1 = A^{-1}(\phi_0 - I), \quad (9)$$

$$\phi_2 = A^{-1}(\tau\phi_0 - \phi_1), \quad (10)$$

$$\phi_3 = A^{-1}(\tau^2\phi_0 - 2\phi_2), \quad (11)$$

$$\phi_4 = A^{-1}(\tau^3\phi_0 - 3\phi_3), \quad (12)$$

$$\phi_5 = A^{-1}(\tau^4\phi_0 - 4\phi_4), \quad (13)$$

اگر $[I - F_{k+1}]^{-1}$ وجود داشته باشد، طرح گسسته‌سازی را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$y_{k+1} = D_k y_k \quad (14)$$

که در آن برداری y_k است $n(m+1)$ بعدیکه به این صورت نمایش داده می‌شود:

$$y_k = \text{col}(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k+1-m}, x_{k-m}) \quad (15)$$

و D_k به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_k = \begin{bmatrix} [I-F_{k+1}]^{-1}(F_0+F_{0k}) & [I-F_{k+1}]^{-1}F_{k-2} & [I-F_{k+1}]^{-1}F_{k-1} & 0 & \dots \\ I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -[I-F_{k+1}]^{-1}F_{m-1} & -[I-F_{k+1}]^{-1}F_m & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & I & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & I & 0 & \end{bmatrix}$$

حال ماتریس انتقال ϕ را می‌توانیم از یک ثابت زمانی متناوب برای پیش‌بینی پایداری با استفاده از گسسته‌سازی متوالی D_k ، $(k=0, \dots, m-1)$ ساخت. [۱۱]

$$y_m = \phi y_0 \quad (16)$$

که در آن ϕ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi = D_{m-1} D_{m-2} \dots D_1 D_0. \quad (17)$$

سرانجام بر طبق تئوری Floquet، پایداری سیستم می‌تواند اینگونه تعریف شود: اگر قدر مطلق همه بردارهای ویژه ماتریس انتقال ϕ کمتر از واحد باشد سیستم پایدار و در غیر این صورت ناپایدار است. [12]

۳. اعتبارسنجی روش:

در این قسمت ابتدا مدل یک درجه آزادی و دو درجه آزادی برای فرزکاری آورده شده است. سپس توسط مدل یک درجه آزادی برای چهارروش زیر با هم مقایسه شده‌اند:

- روش نیمه گسسته‌سازی کامل (بعنوان روش مبنا با $m=200$)

- روش گسسته‌سازی کامل خطی

- گسسته‌سازی کامل مرتبه دوم

- گسسته‌سازی کامل مرتبه سوم (که در این مقاله ارائه گردیده است).

۳-۱ سیستم یک درجه آزادی

فرم فضای حالت سیستم یک درجه آزادی فرزکاری به صورت زیر است: [۹]

$$\dot{X}(t) = Ax(t) + A(t)x(t) + B(t)x(t-T) \quad (18)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\zeta\omega_n & \frac{1}{m_t} \\ m_t(\zeta\omega_n)^2 - m_t\omega_n^2 & -\zeta\omega_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -wh(t) & 0 \end{bmatrix},$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ m_t \dot{x}(t) + m_t \zeta \omega_n x(t) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ضریب نیروی برشی $h(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(20)$$

$$h(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t) \sin(\phi_j(t))) [k_t \cos(\phi_j(t)) + k_n \sin(\phi_j(t))],$$

که در آن ζ ضریب میرایی، ω_n فرکانس طبیعی زاویه ای، m_t جرم سیستم، w عمق بار، $x(t)$ جابجای نسبی بین ابزار و قطعه کار است و تاخیر زمانی T مساوی با دوره عبور ابزار $60 / (N\Omega)$ است (N تعداد دندانان و Ω سرعت دوران محور برحسب دور بر

(26)

$$h_{yx}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t) \sin(\phi_j(t)) [-k_t \cos(\phi_j(t)) + k_n \cos(\phi_j(t))]$$

(27)

$$h_{yy}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t) \cos(\phi_j(t)) [-k_t \cos(\phi_j(t)) + k_n \cos(\phi_j(t))]$$

برای نشان دادن معادله سیستم اصلی به فرم فضای حالت M و C و k و $q(t)$ به ترتیب نشان دهنده ماتریس‌های زیر در معادله (۲۶)، است:

$$\begin{bmatrix} m_t & 0 \\ 0 & m_t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2m_t \zeta \omega_n & 0 \\ 0 & 2m_t \zeta \omega_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} m_t \omega_n^2 & 0 \\ 0 & m_t \omega_n^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

سپس $p(t) = M \dot{q} + C q / 2$ و $x(t)$ مشخص کننده $[q(t) \quad p(t)]^T$ می‌باشد. [۱۵]

سرانجام مدل فرزکاری دو درجه آزادی به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\dot{X}(t) = A_0 x(t) + A(t) x(t) + B(t) x(t-T) \quad (28)$$

که در آن

$$A_0 = \begin{bmatrix} -M^{-1}C/2 & M^{-1} \\ CM^{-1}C/4 - K & -CM^{-1}/2 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

دقیقه می‌باشد) و k_t و k_n به ترتیب ضرایب نیروی برشی مماسی و نرمال می‌باشند و $\phi_j(t)$ موقعیت زاویه ای دندانها j ام است که به این صورت تعریف می‌شود:

$$\phi_j(t) = (2\pi * \Omega / 60)t + (j-1)2\pi / N \quad (21)$$

تابع $g(\phi_j(t))$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$g(\phi_j(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi_{st} < \phi_j(t) < \phi_{ex} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

که ϕ_{st} و ϕ_{ex} به ترتیب زوایای ورودی و خروجی [آمین دندانها می‌باشند. برای براده برداری به روش مخالف $\phi_{st} = \arccos(2a/D - 1)$ و $\phi_{ex} = \pi$ برای براده برداری به روش همراه $\phi_{st} = 0$ و $\phi_{ex} = \arccos(1 - 2a/D)$ که در آن a/D نسبت فرو رفتگی شعاعی است.

۳-۲ سیستم دو درجه آزادی

معادله دینامیکی سیستم دو درجه آزادی مدل فرزکاری با ابزار متقارن به صورت زیر است. [۱۳] و [۱۴]

(23)

$$\begin{bmatrix} m_t & 0 \\ 0 & m_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{y}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_t \zeta \omega_n & 0 \\ 0 & 2m_t \zeta \omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_t \omega_n^2 & 0 \\ 0 & m_t \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -wh_{xx}(t) & -wh_{xy}(t) \\ -wh_{yx}(t) & -wh_{yy}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -wh_{xx}(t) & -wh_{xy}(t) \\ -wh_{yx}(t) & -wh_{yy}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-T) \\ y(t-T) \end{bmatrix}$$

$h_{xx}(t)$ ، $h_{yy}(t)$ ، $h_{xy}(t)$ و $h_{yx}(t)$ ضرایب نیروی برشی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(24)

$$h_{xx}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t) \sin(\phi_j(t)) [k_t \cos(\phi_j(t)) + k_n \sin(\phi_j(t))] \quad (25)$$

$$h_{yy}(t) = \sum_{j=1}^N g(\phi_j(t) \cos(\phi_j(t)) [k_t \cos(\phi_j(t)) + k_n \sin(\phi_j(t))]$$

در زیر مشخصات نمونه حل شده آورده شده است. در این نمونه برای نمودار مبنا از نمونه حل شده با $m=200$ توسط نرم افزار MATLAB و با روش نیمه گسسته‌سازی کامل استفاده نموده‌ایم و m برای سایر روش‌ها را ۱۵ و ۲۵ و ۳۵ در نظر گرفته‌ایم:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Wh_{xx}(t) & -Wh_{xy}(t) & 0 & 0 \\ -Wh_{yx}(t) & -Wh_{yy}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- عده دوران $5000 \text{rpm} \leq \Omega \leq 10,000$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ Wh_{xx}(t) & Wh_{xy}(t) & 0 & 0 \\ Wh_{yx}(t) & Wh_{yy}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- تعداد دندانه ابزار ۲ دندانه

- فرکانس طبیعی $f_n = \omega_n / (2\pi) = 922 \text{Hz}$

- ضریب میرایی $\zeta = 0.011$

- جرم $m_t = 0.03993 \text{kg}$

۳-۳- نمودارهای دالان‌های پایداری:

- ضریب نیروی برشی مماسی $k_t = 6 * 10^8 \text{ N / m}^2$

- ضریب نیروی برشی عمودی $k_n = 2 * 10^8 \text{ N / m}^2$

- نسبت $a / D = 1$

- تعداد تقسیم‌های بازه زمانی T

$m = 15$ و $m = 25$ و $m = 35$

نتایج در جدول شماره ۱ آمده است:

برای نشان دادن دقت روش ارائه شده نمودارهای دالان‌های پایداری را با استفاده از ۴ روش و جمعاً ۱۰ مرتبه حل کرده و مقایسه نمودیم.

نمودار مبنا معادله‌ای است که با روش نیمه گسسته‌سازی با $m = 200$ حل شده است (که با رنگ مشکی مشخص شده است). برنامه MATLAB جهت ترسیم نمودار دالان‌های پایداری با روش نیمه گسسته‌سازی در ضمیمه (الف) آمده است.

برای ترسیم ۹ نمودار دیگر به ۳ برنامه MATLAB نیاز داریم که این ۳ برنامه تنها در پارامترهای مربوط به میان‌بایی قسمت حالت تفاوت دارند. یک نمونه از این ۳ برنامه نیز در ضمیمه (ب) این مقاله آمده است جهت ترسیم ۹ نمودار هر کدام از این ۳ برنامه را برای m های مختلف حل نمودیم ($m = 15$, $m = 25$, $m = 35$). زمان مصرف شده توسط کامپیوتر نیز در هر مرحله مشخص شده است.

computer [Intel Core (TM) 2 Duo Processor, 2.1)
(GHz, 1 GB]

مشخصات نمونه حل شده با MATLAB

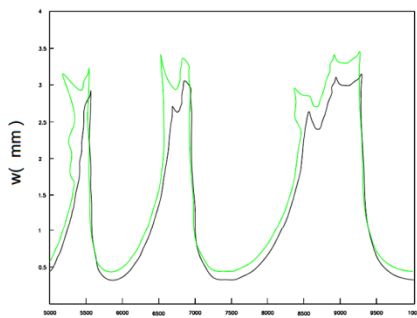
جدول شماره ۱: مقایسه نمودار دالانهای پایداری سیستم یک درجه آزادی فرزکاری در روشهای مختلف

روش مرتبه اول گسسته‌سازی کامل
خط سبز

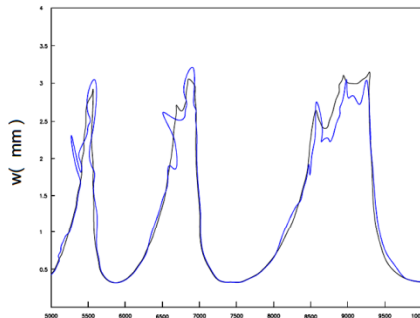
روش مرتبه دوم گسسته‌سازی کامل
خط آبی

روش مرتبه سوم گسسته‌سازی کامل
خط قرمز

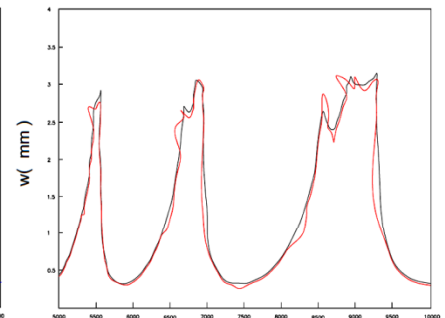
$m=15$



زمان محاسبه (ثانیه) ۲۰,۳

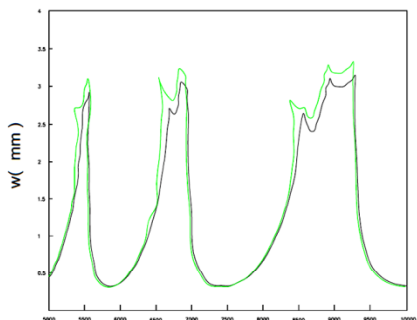


۲۶,۳

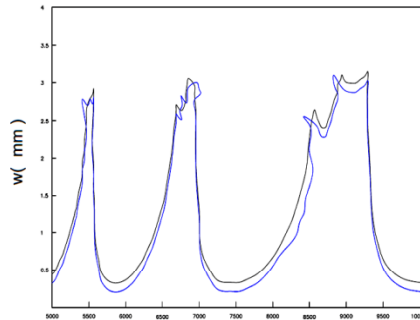


۳۱,۴

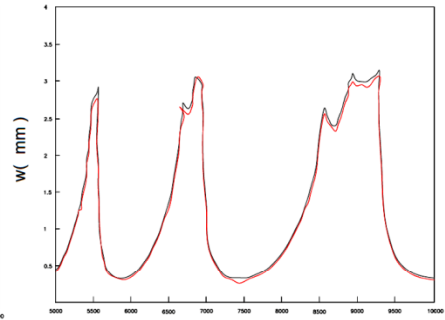
$m=25$



زمان محاسبه (ثانیه) ۴۰,۱

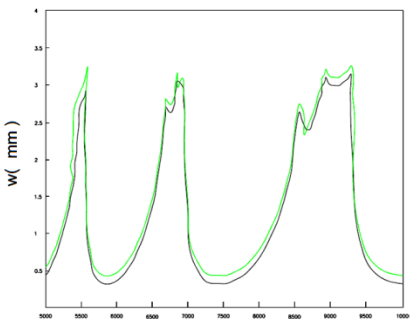


۵۵,۷

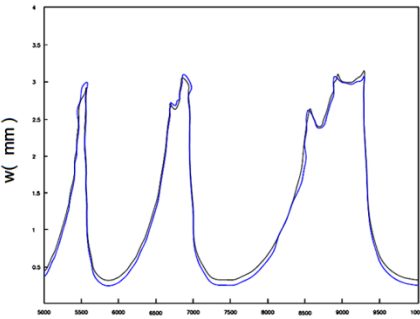


۶۶,۸

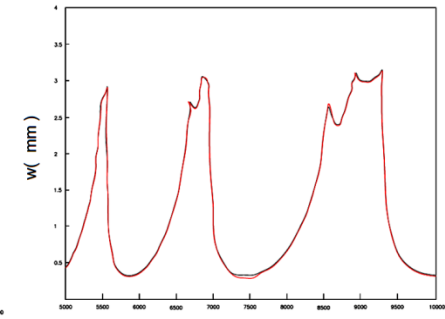
$m=35$



زمان محاسبه (ثانیه) ۷۲,۳



۱۰۱,۴



۱۱۷,۳

4- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی:

در این مقاله پیش‌بینی دالان‌های پایداری فرز CNC با روش مرتبه سوم گسسته‌سازی کامل ارائه گردید که این روش مبتنی بر انتگرال گیری مستقیم است، نتایج این مقاله را می‌توان در چند بخش زیر دسته بندی کرد:

با مشاهده نمودارهای فوق این نکته به روشنی مشخص است که در m های برابر دقت نتایج برای روش مرتبه سوم به مراتب بالاتر است. البته با توجه به حجم محاسبات بالاتر زمان محاسبه در این روش بالاتر می‌باشد که با کمی دقت می‌توان این نکته را یافت که اگر فاکتور زمان را به عنوان مبنا برای مقایسه در نظر بگیریم بازهم این روش مناسب‌تر است. به‌طور مثال نمودار $m=25$ برای روش مرتبه سوم با نمودار $m=35$ برای مرتبه اول تقریباً در زمانی معادل ۷۰ ثانیه محاسبه شده‌اند اما دقت روش مرتبه سوم با $m=25$ به مراتب بالاتر است.

نکته‌ی دیگر این مقاله تاثیر مشخص سرعت دوران و عمق بار بر روی دالان‌های پایداری در دو برنامه MATLAB ضمیمه این مقاله با اندکی تغییر در مقادیر سرعت دوران و عمق بار می‌توان این نکته را مشاهده نمود.

در نهایت می‌توان به این نکته اشاره کرد که در مثال مبنا نمودار حاصل از این روش با $m=35$ (رنگ قرمز) با نمودار حاصل از روش نیمه گسسته‌سازی با $m=200$ (رنگ مشکی) تطابق خوبی دارد که این امر سرعت هم‌گرایی روش فوق را مشخص می‌کند.

ضمیمه الف: برنامه MATLAB برای سیستم یک درجه آزادی فرزکاری باروش
نیمه گسسته سازی زمانی [۱۳]

```
clear
% parameters
N = 2;
Kt = 6e8;
Kn = 2e8;
w0 = 922*2*pi;
zeta = 0.011;
m_t = 0.03993;
aD = 0.05;
up_or_down = -1;
if up_or_down == 1
    fist = 0;
    fiex = acos(1 - 2*aD);
elseif up_or_down == -1
    fist = acos(2*aD - 1);
    fiex = pi;
end
stx = 400;
sty = 200;
w_st = 0e - 3;
w_fi = 10e - 3;
o_st = 5e3;
% number of teeth
% tangential cutting force coefficient (N/m2)
% normal cutting force coefficient (N/m2)
% angular natural frequency (rad/s)
% relative damping (1)
% mass (kg)
% radial depth of cut
% 1: up-milling, -1: down-milling
% up-milling
% start angle
% exit angle
% down-milling
% start angle
% exit angle
% steps of spindle speed
% steps of depth of cut
% starting depth of cut (m)
% final depth of cut (m)
% starting spindle speed (rpm)
```



```

    B(2, 1) = h_i(i)*w/m_t;
    P = expm(A*dt); % matrix Pi
    R = (expm(A*dt) - eye(2))*inv(A)*B; % matrix Ri
    D(1 : 2, 1 : 2) = P;
    D(1 : 2, m + 1) = wa*R(1 : 2, 1 : 1);
    D(1 : 2, m + 2) = wb*R(1 : 2, 1 : 1);
    Fi = D*Fi; % transition matrix Φ
end
ss(x, y) = o; % matrix of spindle speeds
dc(x, y) = w; % matrix of depth of cuts
ei(x, y) = max(abs(eig(Fi))); % matrix of eigenvalues
end
stx + 1 - x
end
figure
contour(ss,dc,ei,[1, 1],'k')

o_fi = 25e3; % final spindle speed (rpm)
% computational parameters
k = 40; % number of discretization interval over one
period
int k = 20; % number of numerical integration steps for
Equation (37)
m = k; % since time delay = time period
wa = 1/2; % since time delay = time period
wb = 1/2; % since time delay = time period
D = zeros(m + 2, m + 2); % matrix D
d = ones(m + 1, 1);
d(1 : 2) = 0;
D = D + diag(d, -1);
D(3, 1) = 1;
% numerical integration of specific cutting force coefficient according to Equation (37)
for i = 1 : k
    dtr = 2*pi/N/k; % Δt, if τ = 2π/N
    h_i(i) = 0;
    for j = 1 : N % loop for tooth j
        for h = 1 : int k % loop for numerical integration of hi
            fi(h) = i*dtr + (j - 1)*2*pi/N + h*dtr/int k;
            if (fi(h) >= fist)*(fi(h) <= fiex)
                g(h) = 1; % tooth is in the cut
            else
                g(h) = 0; % tooth is out of cut
            end
        end
        h_i(i) = h_i(i) + sum(g.*(Kt.* cos(fi) + Kn.* sin(fi)).* sin(fi))/int k;
    end
end
end
% start of computation
for x = 1 : stx + 1 % loop for spindle speeds
    o = o_st + (x - 1)*(o_fi - o_st)/stx; % spindle speed
    tau = 60/o/N; % time delay
    dt = tau/(m); % time step
    for y = 1 : sty + 1 % loop for depth of cuts
        w = w_st + (y - 1)*(w_fi - w_st)/sty; % depth of cut
    end
% construct transition matrix Fi
    Fi = eye(m + 2, m + 2);
    for i = 1 : m
        A = zeros(2, 2); % matrix Ai
        A(1, 2) = 1;
        A(2, 1) = -w0^2 - h_i(i)*w/m_t;
        A(2, 2) = -2*zeta*w0;
        B = zeros(2, 2); % matrix Bi
    end
end

```

ضمیمه ب: برنامه MATLAB برای سیستم یک درجه آزادی فرزکاری با روش گسسته‌سازی کامل [۱۱]

```

close all, clear all, clc
tic
% the model parameters
N = 2; % number of teeth
Kt = 6e8; % tangential cutting force coefficient (N/m2)
Kn = 2e8; % normal cutting force coefficient (N/m2)
w0 = 922*2*pi; % angular natural frequency (rad/s)
zeta = 0.011; % relative damping (1)
m_t = 0.03993; % mass (kg)
aD = 0.05; % radial depth of cut, for aD = 1, 0.1, and 0.05
up_or_down = -1; % 1: up-milling, -1: down-milling
if up_or_down == 1 % up-milling
    fist = 0; % start angle
    fiex = acos(1-2*aD); % exit angle
elseif up_or_down == -1 % down-milling
    fist = acos(2*aD-1); % start angle
    fiex = pi - acos(2*aD-1); % exit angle

stx = 400; % steps of spindle speed
sty = 200; % steps of depth of cut
w_st = 0e-3; % starting depth of cut (m)
w_fi = 10e-3; % final depth of cut (m)
o_st = 1000; % starting spindle speed (rpm)
o_fi = 25e3; % final spindle speed (rpm)
% the control parameters
m = 40; % number of discretization interval over one period
D = zeros(m+2, m+2); % matrix D
d = ones(m+1, 1);
d(1 : 2) = 0;
D = D+diag(d, -1);
D(3, 1) = 1;

```

```

% Discretization of the specific cutting force coefficient h(t) in Eq. (29)
for i = 1 : m+1
    dtr = 2*pi/N/m; % Δt
    h(i) = 0;
    for j = 1 : N % loop for tooth j
        fi = i*dtr +(j-1)*2*pi/N;
        if (fi >= fist)*(fi <= fiex)
            g = 1; % tooth is in the cut
        else
            g = 0; % tooth is out of cut
        end
        h(i) = h(i) + g*(Kt*cos(fi)+Kn*sin(fi))*sin(fi);
    end
end

%----- Begin of the proposed method -----
A0 = [-zeta * w0, 1/m_t; % A0 in Eq. (33)
      m_t * ((zeta * w0)^2 - w0^2), -zeta * w0];
I=eye(size(A0));
invA0 = inv(A0); % invA0 = (A0)^(-1)
% start of computation
for x = 1 : stx+1 % sweeping spindle speeds
    o = o_st +(x-1)*(o_fi-o_st)/stx; % spindle speed
    tau = 60/o/N; % time delay
    dt = tau/m; % time step
    %----- Calculation of Φ0, Φ1, Φ2, Φ3 -----
    Fi0 = expm(A0*dt); % Φ0 in Eq. (15)
    Fi1 = invA0 * (Fi0 - I); % Φ1 in Eq. (16)
    Fi2 = invA0 * (Fi0 * dt - Fi1); % Φ2 in Eq. (17)

    A0k = [0 0; -w*h(i+1) 0]; % Eq. (7)
    A1k = [0 0; w*(h(i+1)-h(i))/dt 0]; % Eq. (7)
    F01 = Fi2*A0k/dt + Fi3*A1k/dt; % F0,1 using Eq. (11)
    Fkpl = (Fi1 - Fi2/dt)*A0k + (Fi2 - Fi3/dt)*A1k; % Fk+1 using Eq. (12)
    invOfImFkpl = inv(I - Fkpl); % [I - Fk+1]^(-1)
    D(1 : 2, 1 : 2) = invOfImFkpl * (Fi0+F01); % Eq. (25)
    D(1 : 2, m+1) = -invOfImFkpl * Fkpl(1:2, 1:1); % since Fm-1 = - Fk+1
    D(1 : 2, m+2) = -invOfImFkpl * F01(1:2, 1:1); % since Fm = - F01
    Fi = D * Fi; % Eq. (27)
end
ss(x, y) = o; % matrix of spindle speeds
dc(x, y) = w; % matrix of depth of cuts
ei(x, y) = max(abs(eig(Fi))); % matrix of eigenvalues
end % End of sweeping depth of cuts
stx+1-x

end % End of sweeping spindle speeds
%----- The end of the proposed method -----
toc
figure;
contour(ss, dc, ei, [1, 1], 'k'), xlabel('Ω (rpm)'), ylabel('w (m)')

```

مراجع :

- [1]. S. A. Tobias, W.F., The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions. ASME, transactions, v. 80, no. 5, July 1958, p. 1079-1088. Wear, 1959, 2(3): p. 246
- [2]. Das, M.K. and S.A. Tobias, The relation between the static and the dynamic cutting of metals. International Journal of Machine Tool Design and Research, 1967, 7(2): p. 89-93
- [3]. Hanna, N.H. and S.A. Tobias, The non-linear dynamic behaviour of a machine tool structure. International Journal of Machine Tool Design and Research, 1969, 9(3): p. 293-307
- [4]. Altıntaş, Y. and E. Budak, Analytical Prediction of Stability Lobes in Milling. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 1995, 44(1): p. 362-367
- [5]. Insperger T, S.G., Semi-discretization method for delayed systems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 55(5): p. 503-518
- [6]. Insperger, T., et al., Stability of up-milling and down-milling, part 1: alternative analytical methods. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2003, 43(1): p. 34-45
- [7]. P. V. Bayly, J.E.H., B. P. Mann and M. A. Davies, Stability of Interrupted Cutting by Temporal Finite Element Analysis. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2003, 125, p. 225-230
- [8]. Zatarain, M., et al., Analysis of the Influence of Mill Helix Angle on Chatter Stability. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 2006, 55(1): p. 368-375
- [9]. Ding, Y., et al., A full-discretization method for prediction of milling stability. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2010, 50(5): p. 509-522
- [10]. Insperger, T., Full-discretization and semi-discretization for milling stability prediction: Some comments. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2010, 50(7): p. 662-668
- [11]. Ding, Y., et al., Second-order full-discretization method for milling stability prediction. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2010, 50(10): p. 926-932
- [12]. M. Farkas, Periodic Motions. Springer-Verlag, New York, 1994
- [13]. T. Insperger, G.S.p.n., Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(1): p. 117-141
- [14]. P.V. Bayly, B.P.M., T.L. Schmitz, D.A. Peters, G. Stepan, T. Insperger, Effects of Radial Immersion and Cutting Direction on Chatter Instability in End-Milling. 12, American Society of Mechanical Engineers, Manufacturing Engineering Division, 2002; p. 351-363
- [15]. Y. Gu, B.C., H. Zhang, Z. Guan, Precise time-integration method with dimensional expanding for structural dynamic equations. AIAA Journal, 2001, 39, p. 2394-2399