ارائه روشی برای بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی سیستم غیر خطی نامشخص با استفاده همزمان از تبدیلات ویگنر-ویل و ویولت

مبینا بنکدار[1]، احسان جمشیدی[2*]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد سمنان، **دانشگاه آزاد اسلامی** ، سمنان، ایران
۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد سمنان، **دانشگاه آزاد اسلامی** ، سمنان، ایران
* سمنان، صندوق پستی: ۱۷۹-۳۵۱۴۱، ehsan.jamshidi@gmail.com

چکیده

در آنالیز خروجی هر سیستم نامشخص و به طور خاص آنالیز ارتعاشات در مکانیک، به طور معمول از تجزیه بردار خروجی در حوزه زمان یا تابع پاسخ فرکانسی محاسبه شده از تبدیل فوریه یا لاپلاس استفاده می شود. در چنین مواردی ابتدا باید مودهای غالب سیستم مشخص شود و سپس بر اساس آنها تحلیل مناسبی از خروجی صورت گیرد. در حالتی که عملکرد سیستم غیر خطی باشد، بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی با تبدیلات فوریه و لاپلاس بدلیل ماهیت خطی آنها امکان پذیر نیست. در تمامی روش های مرسوم برای بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی غیر خطی، تبدیل ویولت به عنوان یکی از اصلی ترین تبدیلات غیر خطی در حوزه زمان مقیاس استفاده شده است. نقطه ضعف تبدیل ویولت مرسوم، نیاز به مشخص بودن تقریبی قطب در سیستم مورد تحلیل است. در این مقاله روشی بسیار کارامد برای بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی در سیستم های غیر خطی زمان متغیر بر اساس ترکیب تبدیل ویگنر-ویل و ویولت ارائه شده است. در این روش ابتدا با اعمال یک سیگنال چیرپ کل مودهای سیستم تحریک و سپس خروجی با تبدیل ویگنر-ویل تحلیل و با دقت قابل قبولی مودهای سیستم مشخص می گردند. سپس با استفاده از تبدیل ویولت، تابع پاسخ فرکانسی سیستم محاسبه می‌شود. در انتها با شبیه سازیهای مختلف کارایی بسیار مناسب این روش در بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی در مقایسه با روشهای مبتنی بر حوزه زمان فرکانس متداول نشان داده شده است.

کلیدواژگان

آنالیز ارتعاشات، ویگنر-ویل، ویولت، چیرپ، تابع پاسخ فرکانسی

۱- مقدمه

برای فهم ماهیت عملکرد سیستم، توابع پاسخ فرکانسی[1] و پاسخ ضربه[2] از مهمترین روشها محسوب می شوند. درتحلیل FRF به دنبال این هستیم که به نوعی اطلاعات زمانی را در کنار مشخصات فرکانسی سیگنال وارد کنیم. بیان تحلیلی این دو تابع برای سیستمهای نامیرا که از معادله دیفرانسیل (۱) پیروی میکنند به صورت روابط ۲ تا ۴ بیان می شود:

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{q}} + \mathrm{Kq} = \mathrm{f} \qquad (۱)$$

$$\mathrm{H}(\omega) = [-\omega^2\mathrm{M} + \mathrm{K}]^{-1} = \phi[-\omega^2\mathrm{I} + \Omega^2]^{-1}\phi^T \qquad (۲)$$

$$\phi^T\mathrm{M}\,\phi = \mathrm{I}, \quad \phi^T\mathrm{K}\phi = \Omega^2 \qquad (۳)$$

$$\mathrm{h}(t) = \phi\,\mathrm{diag}\,[\sin\Omega_i t/\Omega_i,\ i = 1, 2, ..., n]\,\phi^T \qquad (۴)$$

باید به این نکته توجه کرد که هر دو تابع FRF وIRF با اعمال یک ضربه واحد به عنوان ورودی به سیستم بدست آمده اند[۱]. سه اصلاح روی دو تابع FRF وIRF قبل از اینکه در عمل استفاده شوند باید صورت گیرد. اول اینکه تحریک ورودی و خروجی اندازه گیری شده در عمل الزاما گسسته خواهد بود چرا که کلیه تجهیزات اندازه گیری در حالت گسسته عمل میکنند و این بدین معنی می باشد که روش ها و روابط تبدیلات فوریه گسسته در حوزه زمان و فرکانس باید جایگزین روش های پیوسته تحلیلی شود. دوم اینکه، با توجه به اندازه گیری های گسسته انجام شده در مرحله اول در غالب موارد اطلاعات موجود در تابع اندازه گیری شده برای حل کامل سیستم مد نظر طراح کفایت نمیکند و لذا سیستم مدل شده که در حالت کلی توسط روش های المان محدود به صورت عددی حل میشود دچار مشکل نامشخص بودن تابع پاسخ فرکانسی یا ضربه میشود. این محدودیت کاربردی اغلب منجر به ماتریس های غیر مربعی FRF/IRF میشودکه باعث دشواری و ایجاد اشکال در محاسبات می گردد. سومین و مهمترین مشکل عدم وجود ضربه ایده ال در عمل می باشد. در محیط های آزمایشگاهی حداکثر قادر به ایجاد تحریک های سینوسی یا رندم هستیم که به هیچ وجه مشخصات ضربه ایده آل را دارا نیستند. حتی در بعضی از موارد ایجاد تحریک سینوسی یا رندم مشابه حالات واقعی نیز ممکن نیست برای مثال طوفان به عنوان تحریک ورودی لرزش روی ساختمان های بلند و یا نیروی زمین لرزه نمی توانند به عنوان ورودی در حالت واقعی ایجاد شوند.

در تحلیل ارتعاش کلاسیک فرض می شود که سیستم های آنالیز شده مشخصه های زمان ثابتی از خود نشان میدهند. برای مثال خروجی برای چنین سیستم هایی با یک تاخیر در ورودی تغییر نمی کند، این فرض برای بسیاری از سیستم های مهندسی با ضرایب زمان متغیر در معادلات مربوط به حرکت معتبر نیست. آنالیزهای مودال و تعاریف متعارف آنها برای سیستم های زمان ثابت خطی گسترش و توسعه یافته است و برای سیستم های زمان متغیر معتبر نیست. به نظر می رسد کار کمتری برای گسترش آنالیز مودال کلاسیک ورودی- خروجی برای سیستم های زمان متغیر انجام شده است. یکی از روشهای بسیار متعارف آنالیزهای زمان- مقیاس، تبدیل ویولت[3] است که بهترین و پر کاربردترین روش شناخته شده براساس آنالیز زمان- فرکانس می باشد. مهمترین پارامتر در آنالیز مودال، مودهای غالب سیستم می باشد که تاثیر اصلی روی خروجی ایفا می کنند. در تمامی کارهای انجام شده برای تحلیل سیستم، اولین مرحله تشخیص محدوده یا مقدار دقیق مودهای غالب است.

---

[1] FRF
[2] Impulse response function (IRF)
[3] Wavelet

یکی از اولین کارهای انجام شده برای تحلیل FRF در حوزه ویولت برای سیستم متغیر با زمان مرجع[2] محسوب می شود. در روش پیشنهادی مرجع [2] از تغییرات آرام دامنه و تغییرات فاز پاسخ ضربه سیستم استفاده شده است. برای حذف نویز موجود در خروجی و بالا بردن دقت جواب، در محاسبه سطوح برجسته[1] تبدیل ویولت از الگوریتم بهینه سازی تبرید[2] استفاده شده است. این سطوح برجسته معادل مودهای غالب سیستم هستند. این روش میتواند برای سیستم های چند درجه آزادی نیز با توجه به حالت خاص طیف فرکانسی و خواص ویولت پیوسته گراسمن-مورلت[3] استفاده شود. در نهایت مرجع [2] نتایج روش خود را با شبیه سازی سیستم های یک و چند درجه آزادی استخراج نموده و صحت روش را نشان داده است. مرجع [2] نشان داده در صورت وجود نویز بیشتر از ۲۰٪ در داده ها روش پیشنهادی کارا نخواهد بود. از مهمترین نقاط ضعف روش ارائه شده در مرجع[2] میتوان به عدم کارایی آن در نویز های بالای ۲۰٪ اشاره کرد که استفاده از این روش را خصوصا در کاربردهای صنعتی محدود می سازد. علاوه بر آن فرض تغییرات آرام دامنه در مقایسه با فاز همیشه صحیح نمی باشد و فرض چنین موردی در ابتدای تحلیل جای بحث دارد. مشابه این روش در [3] روشی مبتنی بر تبدیل هیلبرت برای تحلیل سیستم های دارای ارتعاشات متغیر پیشنهاد شده است. از معایب استفاده از این روش می توان به این نکته اشاره کرد که پارامترهای بدست آمده توسط آن اطلاعات کمی درباره رفتار غیر خطی می دهند. از دیگر محدودیت های این روش این است که فرکانس لحظه ای در این روش فقط برای سیگنال های مجانبی[4]صحیح می باشد یعنی سیگنال هایی که تغییرات دامنه آنها در مقابل تغییرات فاز خیلی آرام هستند.

در مرجع [4] سعی شده نقطه ضعف روش مرجع [2] در شناسایی برجستگی ها و سطوح برجسته در اندازه تبدیل ویولت پیوسته اصلاح شود. این روش بر اساس مینیمم سازی خطای یک تابع منطبق شده بر روی مجموعه ای از نقاط کاندید به عنوان ماکزیمم می باشد. تابع هدف نیازمند اطلاعات قبلی روی سیگنال (برای مثال، نمایش زمان – فرکانس سیگنال) است و با توجه به مینیمم ساختن خطا هنگام تطبیق ممکن است با وجود نویز نیز توانایی خود را حفظ کند. از معایب روش مرجع [4] نیاز آن به اطلاعات قبلی از نویز و سیگنال هنگام محاسبه تابع هدف است که در بسیاری از سیستمهای عملی ممکن نیست.

در مرجع [5] روشی برای شناسایی مدل های گسسته خطی سیستم های دینامیکی بر اساس تبدیل ویولت پیشنهاد شده است. در این روش که فرض میشود معادله دیفرانسیل دینامیک سیستم معلوم است برای حل معادله دیفرانسیل دارای ضرایب زمان متغیر در حضور نویز از تبدیل ویولت کمک گرفته شده است. ایراد عمده روش استفاده شده در تحریک تک فرکانس سیستم می باشد. در صورتی که سیستم نامشخصی بخواهد به صورت کامل تحلیل شود فرض معلوم بودن مودهای غالب، معادله دینامیک سیستم و تحریک تک فرکانس براحتی نقض میشوند چرا که باید تحریک در کلیه فرکانس ها صورت گیرد تا جزییات پاسخ در همه فرکانسها مشخص شود.. از دیگر نقاط ضعف روش مرجع [5] بالا رفتن تصاعدی حجم محاسبات به ازای بالا رفتن درجه آزادی سیستم میباشد.

در مرجع [6] یک کار تحلیلی روی پارامترهای تبدیل ویولت پیوسته صورت گرفته است. با توجه به کاربرد ویولت در شناسایی سیستم های زمان متغیر که دارای فرکانس متغیر نیز می باشند انتخاب درست پارامترها و تحلیل صحیح اطلاعات حوزه زمان فرکانس به صورت همزمان بسیار حائز اهمیت میباشد. در روش پیشنهادی مرجع [6] ضمن بررسی اثرات ناپایدار در انتهای حوزه فرکانس(مقیاس) در هر بازه فرکانسی اهمیت انتخاب صحیح و دقیق فرکانس های مرکزی و کناری فیلترهای ویولت نشان داده شده است. روش پیشنهادی مرجع [6] هیچ راهکاری برای تشخیص مود غالب و انتخاب فرکانس مرکزی ویولت بر اساس آن ارائه نکرده است و صرفا به اهمیت انتخاب درست فرکانس مرکزی ویولت پرداخته است.

در مرجع [7] از تبدیل ویولت پیوسته برای شناسایی مودال سیستم مکانیکی با استفاده از پاسخ میرا شده استفاده شده است. در روش پیشنهادی فرکانس های طبیعی، نرخ دمپینگ ویسکوز و شکل مودها با اعمال یک ورودی دلخواه و اعمال آنالیز ویولت به پاسخ محاسبه شده است. پارامتر مهم در روش مرجع [7] انتخاب مناسب بازه های فرکانسی و نوع فیلترهای ویولت به منظور بهبود محاسبات عددی و دقیق تر شدن نتیجه می باشند. از نقاط ضعف آن نیز میتوان نیاز به تنظیم پارامترهای ویولت به کار رفته بر اساس سیستم مورد بحث اشاره کرد که ممکن است در همه موارد امکان پذیر نباشد. علاوه برآن در شبیه سازی نیز سیستم های مدل شده شده یک و چهار درجه آزادی خطی فرض شده اند که مطمئنا فرض کلی محسوب نمی شود. در صورت وجود نویز در اطلاعات نمونه برداری شده از سیستم مطمئنا تحلیل دچار خطا خواهد بود که این موضوع نیز اصلا مد نظر قرار نگرفته است.

مرجع [8] کاربردهای آنالیز زمان متغیر را برای شناسایی آسیب و تشخیص مود غالب گرد آوری کرده است و دو روش اصلی آنالیزهای زمان فرکانس و زمان مقیاس را به صورت مجزا بحث کرده است. در مرجع [8] تبدیل ویگنر-ویل[5] به عنوان یکی از روشهای متداول برای این کار پیشنهاد شده است و نشان داده شده، ویگنر-ویل محدودیت رزولوشن را توسط پخش سیگنال f(t) با انتقال بین زمان و فرکانس توسط خودش افزایش می دهد.

شناسایی سیستم زمان متغیر خطی مبتنی بر ویولت پیوسته به صورت یک چهارچوب سیستماتیک در مرجع [9] بسط داده شده است. با توجه به عدم اگاهی قبلی از ماهیت سیستم، وابستگی روش پیشنهادی به انتخاب درست و دقیق مقیاس (اطلاع از محل مودهای غالب) از معایب و محدودیت های روش مرجع [9] می باشد که این روش را محدود به سیستمهایی با نرخ سیگنال به نویز بالا و یا موجود بودن اطلاعات قبلی راجع به سیستم کرده و کاربرد آن را محدود می سازد. مرجع [10] روشی برای یافتن تابع پاسخ فرکانسی مبتنی بر تبدیل ویولت در وسایل نقلیه جاده ای ارائه کرده است. نتایج مرجع [10] نشان میدهد که این روش برای سیستم های با نرخ سیگنال به نویز پایین دقت خوبی ندارد و تنها برای سیستم های با نرخ سیگنال به نویز بالا جوابهای قابل قبولی ارائه می دهد که این خود از محدودیت های این روش محسوب می شود. این روش با اعمال یک ضربه کلاسیک به عنوان ورودی، توابع پاسخ فرکانسی را با آنالیزهای دو بعدی محاسبه می کند.

1 Ridge
2 Simulated Annealing
3 Grossman_Morlet
4 asymptotic

5 Wigner ville distribution

شناسایی سیستم های خطی زمان – متغیر با استفاده از روش فضا – حالت[1] مبتنی بر تبدیل ویولت در مرجع [11] بیان شده است که در آن روش جدید فضا - حالت برای شناسایی پارامترهای دینامیک در سیستم های خطی زمان متغیر نشان داده شده است و از داده های سیستم های دارای پاسخ ارتعاشی آزاد وداده های پاسخ ارتعاشی اجباری استفاده می کند. در این روش نیز مودهای غالب یا محدوده آنها معلوم فرض شده است. از دیگر معایب مرجع [11] این است که تنها به بررسی سیستم های خطی پرداخته است هیچ تعمیمی در مورد استفاده از این روش در مورد سیستم های غیر خطی ارائه نشده که این خود از محدودیت های این روش می باشد.

در مرجع [12] روشی برای شناسایی آسیب در ساختار با استفاده از روش پردازش سیگنال[2] ارائه شده است که هدف آن نشان دادن مزیت استفاده از تبدیل ویولت برای شناسایی و تعیین محل آسیب های کوچک می باشد. در روش ارائه شده مرجع [12] از تبدیل ویولت پیوسته گوسی مختلط[3] برای بدست آوردن توزیع ضرایب ویولت به منظور شناسایی موقعیت آسیب روی صفحه مربعی استفاده شده است. در این روش نیز مودهای غالب یا محدوده آنها معلوم فرض شده است.

در مرجع[13] یک روش بر اساس برجستگی تبدیل ویولت پیوسته برای شناسایی فرکانس لحظه ای سیستم های زمان متغیر پیشنهاد شده است. در این روش برای حذف کردن اثر نویز ، در ابتدا یک تابع جریمه[4] اعمال می شود و سپس روش بهینه سازی دینامیکی برای استخراج برجستگی ویولت به کار گرفته می شود که در نهایت فرکانس های لحظه ای از استخراج برجستگی ویولت شناسایی می گردند. برای بررسی اعتبار این روش یک مثال عددی برای سیستم ضربه گیر جرم- فنر دودرجه آزادی با سختی زمان متغیر ارائه شده است. این روش بر اساس برجستگی منحنی رسم شده با استفاده از تبدیل ویولت پیوسته برای شناسایی فرکانس های لحظه ای ساختارهای زمان متغیر با نرخ آرام تغییرات زمان پیشنهاد شده است و بنابراین اگر نرخ تغییرات زمان سریع باشد دقت روش مرجع[13] بسیار پایین می آید و دیگر به صحت نتایج نمی توان استناد نمود.

در این قسمت مروری بر کارهای قبلی انجام شده صورت گرفت و روش های مختلفی که برای شناسایی سیستم های خطی و غیر خطی زمان متغیر با نگاه ویژه به مودهای غالب در مقالات مختلف پیشنهاد شده بود بررسی و نقاط ضعف و قوت آنها نشان داده شد. ساختار مقاله به شرح زیر است. ابتدا در بخش بعد تئوری ویگنر-ویل و ویولت بیان می‌شود. روش پیشنهادی و سیستم نمونه در نظر گرفته شده در بخش سوم آورده شده است. بخش چهارم به پیاده سازی سیستم، به همراه نتایج و اشکال و بررسی نتایج بدست آمده می‌پردازد و در نهایت آخرین قسمت مقاله نیز نتیجه گیری و خاتمه خواهد بود.

۲- تبدیلات حوزه زمان فرکانس

۲-۱ تبدیل ویگنر-ویل

تبدیل فوریه زمان کوتاه و تبدیل ویولت پیوسته تبدیل های خطی هستند زیرا قضیه جمع آثار برای انها به صورت زیر برقرار است:

[1] state-space
[2] signal processing
[3] complex Gaussian wavelet
[4] penalty function

$$T\left[\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2\right]=\alpha_1 T\left[f_1\right]+\alpha_2 T\left[f_2\right] \qquad (۵)$$

T می‌تواند هریک از تبدیلات فوریه زمان کوتاه یا ویولت پیوسته باشد و $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو سیگنال متفاوت با ضرایب α_1 و α_2 هستند. این تبدیل ها از این جهت که تفسیری از طیف سیگنال در همسایگی زمان t تولید می کنند بسیار مهم هستند. نقطه ضعف این تبدیلات این است که اطلاعات انرژی لحظه ای سیگنال را در یک لحظه مشخص از زمان تولید نمی کنند.

برای محاسبه انرژی یک تبدیل جدید به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(\tau-t)\right|^2 e^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-\tau)f(t-\tau)^* e^{-j\omega\tau}d\tau \qquad (۶)$$

از آنجاکه تعیین انرژی سیگنال در یک زمان داده شده آسان نیست، خیلی مهم است که انرژی سیگنال را در فاصله $(t-\tau/2,\, t+\tau/2)$ که اطراف زمان t است بدست آوریم. برای این هدف، تبدیل ویگنر-ویل به صورت زیر تعریف شده است:

$$W_f(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(t+\frac{\tau}{2}\right)f\left(t-\frac{\tau}{2}\right)^* e^{-j\omega t}d\tau \qquad (۷)$$

ضریب $\frac{1}{2\pi}$ یک ضریب نرمال کننده در محاسبات است. باید به این نکته توجه کنیم که خاصیت خطی بودن برای معادله۷ صدق نمی کند. معادله ۷ را به اختصار تبدیل ویگنر-ویل می نامند. تبدیل ویگنر-ویل یک تبدیل زمان – فرکانس غیرخطی[5] می باشد زیرا سیگنال بیش از یک بار داخل انتگرال به صورت ضرب وارد می شود. همچنین مشاهده می شود که تبدیل ویگنر-ویل در زمان داده شده t در دو جهت چپ و راست سیگنال در یک فاصله $\tau/2$ متقارن به نظرمی رسد. محاسبه $W_f(t,\omega)$ اطلاعات سیگنال را در $t\pm\tau/2$ نیاز دارد و نمی تواند در زمان واقعی انجام شود.

۲-۲ تبدیل ویولت

تبدیل ویولت پیوسته به عنوان روشی جایگزین بر تبدیل فوریه زمان کوتاه ارائه گردید و هدف آن، فائق آمدن بر مشکلات مربوط به رزولوشن در تبدیل فوریه زمان کوتاه است. در آنالیز ویولت، مشابه با تبدیل فوریه زمان کوتاه، سیگنال مورد نظر در یک تابع (ویولت) ضرب می شود که در حقیقت نقش همان تابع پنجره را دارد. این تبدیل دو اختلاف عمده با تبدیل فوره زمان کوتاه دارد که عبارتند از:

۱- در تبدیل ویولت، از سیگنال پنجره شده، تبدیل فوریه گرفته نمی شود و بنابراین پیک های منفرد متناظر با یک سینوسی، یا به عبارت دیگر فرکانس های منفی محاسبه نمی شود.

۲- در تبدیل ویولت، عرض پنجره به موازات تغییر مولفه های فرکانسی تغییر می کند که به طور حتم مهمترین ویژگی تبدیل ویولت است.

بر این اساس، تبدیل ویولت پیوسته به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\mathrm{CWT}_x^{\psi}(\tau,s)=\Psi_x^{\psi}(\tau,s)=\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)dt \qquad (۸)$$

[5] bilinear

که در آن τ و s به ترتیب پارامترهای انتقال[1] و مقیاس[2] می باشند. مفهوم انتقال دقیقا مشابه با مفهوم انتقال زمانی در تبدیل فوریه زمان کوتاه است که میزان جابجایی پنجره را معلوم می کند و به وضوح، اطلاعات زمانی را در بر دارد. اما بر خلاف تبدیل فوریه زمان کوتاه، در تبدیل ویولت به طور مستقیم پارامتر فرکانس نداریم. در عوض، پارامتر مقیاس را داریم که به طور معکوس با فرکانس ارتباط دارد. به عبارت دیگر $s = \frac{1}{f}$. در رابطه (۸)، ψ تابع پنجره است که اصطلاحا ویولت مادر نامیده می شود[۱۴].

تبدیل ویولت معرفی شده در رابطه (۸) معکوس پذیر است هرگاه:

$$\int \psi(t)\,dt = 0 \qquad (۹)$$

برای برقرار بودن این شرط باید ویولت مادر، تابعی نوسانی باشد. در این صورت، عکس تبدیل ویولت از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi^2}\iint \Psi_x^\psi(\tau, s)\frac{1}{s^2}\psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)d\tau\, ds \qquad (۱۰)$$

که در آن c_ψ یک مقدار ثابت است و به ویولت مورد استفاده بستگی دارد. برگشت پذیر بودن تبدیل و توانایی بازسازی کامل به این ثابت بستگی دارد. عموما این ثابت را ثابت پذیرش[3] می نامند. بر این اساس، شرط پذیرش[4] به صورت زیر بیان می شود:

$$c_\psi = \sqrt{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|}d\xi} < \infty \qquad (۱۱)$$

که در این رابطه، $\hat{\psi}$ تبدیل فوریه تابع ویولت مادر است.

قضیه کانولوشن به فرم متعارف برای سیستم های زمان متغیر کارایی ندارد. اگر وجود کانولوشن را در مفهوم ویولت در نظر بگیریم انتظار داریم FRF کلاسیک بتواند به حوزه ویولت توسعه داده شود و برای سیستم های زمان متغیر تعمیم یابد. در این حالت تابع پاسخ فرکانسی بر اساس ویولت می تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$H_\psi(a,b) = \frac{W_\psi(a,b)[x(t)]}{W_\psi(a,b)[f(t)]} \qquad (۱۲)$$

صورت کسر تبدیل ویولت پیوسته پاسخ ارتعاشی و مخرج کسر تبدیل ویولت پیوسته نیروی تحریک می باشد.

۳- روش پیشنهادی و سیستم پیاده سازی شده

۳-۱ روش پیشنهادی

در تمامی روش های مرسوم بدست آوردن تابع پاسخ فرکانسی غیر خطی، تبدیل ویولت به عنوان یکی از اصلی ترین تبدیلات غیر خطی در حوزه زمان مقیاس استفاده شده است. نقطه ضعف یا ایراد تبدیل ویولت در ابهام موجود در انتخاب تابع ویولت مادر و تنظیم صحیح اسکیل فیلترهای استفاده شده در تابع ویولت با هدف حداقل کردن محاسبات و بدست آوردن حداکثر دقت از خروجی تبدیل است. با توجه به حساسیت تبدیل ویولت و تحلیل FRF نسبت به انتخاب اسکیل در ویولت، برای پوشاندن این ایراد ابتدا خروجی سیستم در روش پیشنهادی با تبدیل ویگنر-ویل تحلیل می شود و سپس با مشخص شدن فرکانس یا فرکانس های طبیعی سیستم، اسکیل ها در تبدیل ویولت طوری انتخاب می شوند که قادر به نشان دادن کلیه جزئیات در تابع پاسخ فرکانسی در محدوده فرکانس طبیعی سیستم باشند. در نهایت تابع پاسخ فرکانسی سیستم طبق رابطه ۱۲ محاسبه می شود.

۳-۲ سیستم پیاده سازی شده

برای بررسی روش پیشنهادی یک سیستم یک درجه آزادی جرم فنر دمپر[5] با سختی غیر خطی در نظر گرفته شده است.

معادله دیفرانسیل غیر خطی سیستم به صورت زیر است:

$$mx'' + cx' + \beta x^3 + kx = f(t) \qquad (۱۳)$$

پارامترهای m و c به ترتیب جرم و ضریب دمپینگ و β و k پارامترهای ضریب سختی فنر هستند. در حقیقت تاثیر ضریب سختی فنر به صورت $\beta x^3 + kx$ مدل شده است. برای حل عددی این معادله و مشخص شدن خروجی در متلب یک زیربرنامه به روش رانگ کوتای درجه ۴ طراحی شدکه با دریافت شرایط اولیه و پارامترهای m، c، β، k و f معادله را به صورت عددی در هر بازه زمانی دلخواه حل می کند. با توجه به معادله دیفرانسیل مرتبه دو در نظر گرفته شده، برای حل آن حداقل به دو شرط اولیه نیاز داریم. که شرایط اولیه برای سهولت کار هردو صفر در نظر گرفته شده اند. در سیستم نمونه پارامتر c در معادله برابر عدد ۲ و جرم برابر ۱ فرض شده است. رابطه فرکانس طبیعی سیستم غیر خطی در نظر گرفته شده به صورت ۱۴ بیان می شود

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}\beta x^2 + k}{m}} \qquad (۱۴)$$

۴- پیاده سازی سیستم

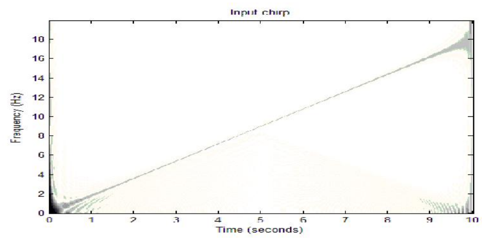
برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی در تمام حالات ممکن، سیستم جرم-فنر-دمپر رابطه (۱۳) در دوحالت مورد بررسی قرار گرفت که در یکی فرم خطی غالب و در سیستم دوم قسمت غیر خطی یا همان ترم β غالب باشد. در حالت اول با انتخاب $\beta = 5$ و $k = 100$ و با در نظر گرفتن رابطه ۱۴داریم:

$$\frac{3}{4}\beta x^2 << k \Rightarrow \frac{3}{4}\beta x^2 < 20 \Rightarrow x^2 < 5.33 \Rightarrow x < 2.3 \qquad (۱۵)$$

پس در صورتی که ماکزیمم دامنه خروجی سیستم کمتر از ۲٫۳ باشد ترم خطی سیستم غالب خواهد بود. با توجه به فرض انجام شده ماکزیمم فرکانس طبیعی سیستم میتواند برابر $\sqrt{120} = 10.95$ باشد. برای ورودی، یک سیگنال چیرپ با فرکانس متغیر، از صفر تا ۱۸ هرتز و دامنه ثابت ۱۰۰ در نظر گرفته شد که با فرض ماکزیمم فرکانس طبیعی ۱۰٫۹۵، تحت هر شرایطی فرکانس طبیعی سیستم را تحریک خواهد کرد. در این حالت روش

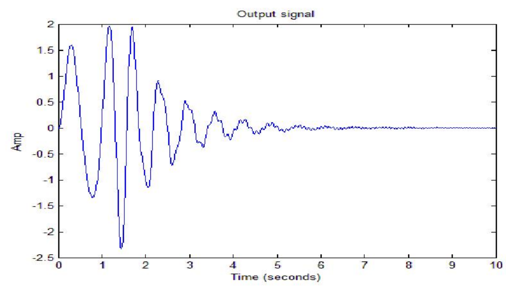
1 Translation
2 Scaling
3 Admissibility Constant
4 Admissibility Condition
5 Nonlinear system with cubic stiffness

پیشنهادی برای سیستم های با حالت تقریبا خطی تست شده و نشان داده می شود که روش پیشنهادی هم در حالت غیر خطی و هم در حالت خطی با دقت بسیار بالا قادر به محاسبه FRF خواهد بود. شکل سیگنال چیرپ ورودی در حوزه زمان فرکانس در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱ تبدیل ویگنر-ویل سیگنال چیرپ ورودی در صفحه زمان فرکانس

خروجی فنر در حوزه زمان که در حقیقت جواب معادله دیفرانسیل رابطه ۱۳است در شکل ۲ نشان داده شده است. همانطور که از شکل مشخص است بعد از اعمال نیرو ابتدا حالت نوسانی تشدید و سپس سیستم دمپ می شود و تقریبا از ثانیه ۷ به بعد خروجی برابر صفر می باشد.



شکل ۲ خروجی سیستم در حوزه زمان

نکته بسیار مهم در شکل ۲ ماکزیمم دامنه خروجی عدد ۱٫۹۵ در حوزه زمان است که اعتبار فرض خطی بودن سیستم را نشان میدهد. از رابطه ۱۴فرکانس طبیعی تحریک سیستم برابر خواهد بود با:

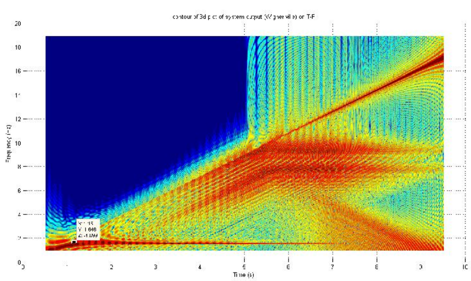
$$\omega=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}\beta x^{2}+k}{m}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}5\times 1.95^{2}+100}{1}}=10.69\ rad/s\approx 1.7\,Hz \qquad (۱۶)$$

با بررسی شکل ۳، خروجی سیستم دارای یک فرکانس چیرپ به صورت کاملا محو و یک فرکانس خطی نسبتا غالب در عدد ۱٫۶۵ هرتز است که با جواب تئوری سیستم که برابر ۱٫۷ هرتز بود با دقت نسبتا قابل قبولی انطباق دارد. نویزهای شدید در ابتدا و انتهای دامنه کاملا مشهود است. بر اساس تبدیل ویگنر-ویل خروجی و بدون توجه به فرکانس بدست آمده از نظر تئوری می توان اینطور استنباط کرد که با وجود چیرپ ورودی که فرکانس متغیر با زمان صفر تا ۱۸ دارد، خود سیستم یک فرکانس خطی با عدد ۱٫۶۵ ثابت در خروجی به وجود آورده است که نشانگر وجود یک مود تحریک یا یک قطب در عدد ۱٫۶۵ هرتز است. سیستم مود غالب دیگری بر اساس شکل ویگنر-ویل ندارد. عدد اسکیل را طوری انتخاب می کنیم که این فرکانس که فرکانس طبیعی سیستم محسوب می شود در نقطه مرکزی فرکانس فیلتر ویولت قرار گیرد.

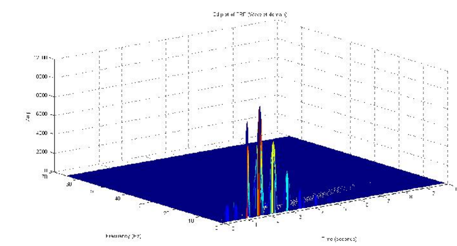
$$f_a=\frac{f_c}{a.\Delta} \qquad (۱۷)$$

در رابطه فوق، f_a فرکانس مهم تابع تبدیل یا همان فرکانس طبیعی سیستم بر حسب هرتز، f_c فرکانس مرکزی تابع ویولت مادر بر حسب هرتز، a مقیاس و Δ زمان نمونه برداری بر حسب ثانیه هستند.

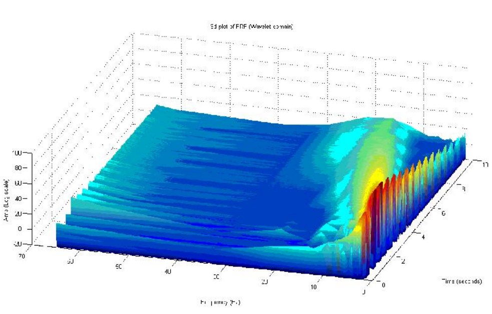
به عنوان آخرین مرحله بعد از تنظیم صحیح اسکیل یا مقیاس در ویولت پایه، FRF سیستم از طریق نسبت ویولت خروجی به ورودی محاسبه و در دو حالت نرمال و لگاریتمی در حالت سه بعدی رسم شده است. در شکل (۴)حالت معمول سیستم یا همان اسکیل نرمال رسم شده است که دامنه زیاد خروجی FRF کاملا مشخص است و رد پای اثر چیرپ در قسمت پس زمینه شکل به وضوح مشهود است. در شکل (۵)در حالت لگاریتمی این وضعیت خود را بهتر نشان می دهد و سیگنال چیرپ کاملا به عنوان ورودی مشهود و دامنه های خروجی سیستم نیز مشخص هستند. در حقیقت با تقسیم تبدیل ویولت خروجی به تبدیل ویولت ورودی ما توانسته ایم یک FRF برای سیستم با رفتار متغیر با زمان بدست آوریم.



شکل ۳ تبدیل ویگنر-ویل خروجی سیستم در صفحه زمان فرکانس



شکل ۴FRF سیستم بر اساس نسبت ویولت خروجی به ویولت ورودی



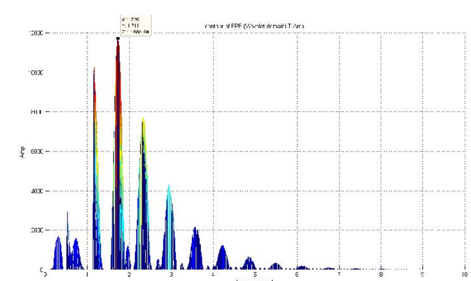
شکل ۵FRF سیستم بر اساس نسبت ویولت خروجی به ویولت ورودی در مقیاس لگاریتمی

برای اثبات صحت FRF بدست آمده الزاما باید FRF در فرکانس طبیعی یا قطب سیستم دارای دامنه حداکثر شود. به این منظور در حالت نرمال تصویر منحنی سه بعدی FRF بدست آمده با استفاده از ویولت، بر صفحه زمان دامنه تصویر و نقطه ماکزیمم دامنه استخراج شد. در شکل (۶)این تصویر رسم شده است و همانطور که کاملا واضح است نقطه ماکزیمم دامنه متناظر با زمان ۱٫۷ ثانیه دارای فرکانسی برابر ۱٫۷ هرتز می باشد که با نتیجه بدست آمده ۱٫۶۵هرتز از ویگنر-ویل و ۱٫۷ هرتز بدست آمده از تئوری یا رابطه ۱۴ کاملا همخوانی دارد.به این ترتیب می توان اطمینان داشت که FRF بدست آمده توسط ویولت به صورت کامل مودهای تحریک یا فرکانس های طبیعی سیستم را مدل کرده و چیزی از قلم نیفتاده است.

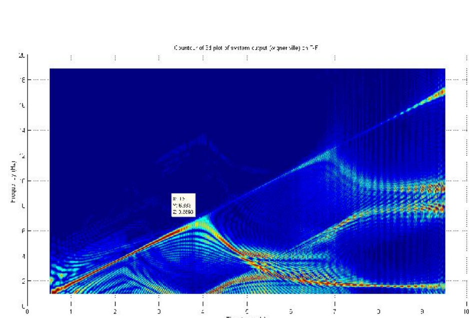
در حالت دوم پارامترهای سیستم غیر خطی در نظر گرفته شده با سختی مکعبی، با غلبه قسمت غیر خطی تنظیم شده است. در این آزمایش $\beta = 2000$ انتخاب شده و پارامترهای دیگر سیستم ثابت فرض شده است که منجر به تغییر فرکانس طبیعی از ۱٫۶۵ به ۶٫۷ هرتز می شود. ماکزیمم دامنه خروجی در حوزه زمان برابر ۱٫۰۶ به دست می آید. با در نظر گرفتن رابطه ۱۴ خواهیم داشت :

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}\beta x^2 + k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}2000 \times 1.06^2 + 100}{1}} = 42.25 \; {}^{rad}\!/\!_{s} \approx 6.7\,Hz \tag{18}$$

و نشان میدهد که در این حالت ترم غیر خطی β غلبه کاملی نسبت به ترم خطی k دارد. سیگنال چیرپ ورودی نیازی به تغییر ندارد به این دلیل که فرکانس ۶٫۷ برای این سیستم کاملا با فرکانس ۱۸ هرتز چیرپ قابل تحریک است.



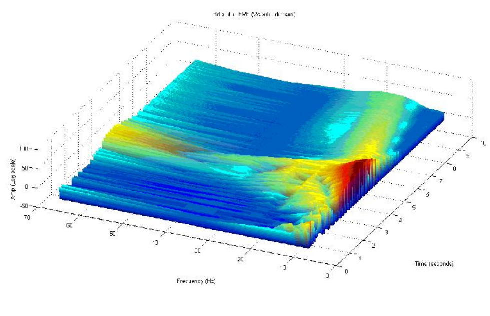
شکل ۶ FRF سیستم بر اساس نسبت ویولت خروجی به ویولت ورودی تصویر شده بر صفحه زمان دامنه



شکل ۷ تبدیل ویگنر-ویل خروجی سیستم نمونه دوم در صفحه زمان فرکانس

شکل ۷ نشان می دهد سیستم یک فرکانس خطی بیشتر ندارد که این فرکانس یا مود تحریک برابر ۶٫۸۸ هرتز است. با توجه به جواب تئوری بدست آمده ازرابطه ۱۴که برابر ۶٫۷ هرتز است باز هم انطباق بسیار قابل قبولی بین فرکانس بدست آمده توسط ویگنر-ویل و فرکانس محاسبه شده از راه تئوری مشاهده می شود. با توجه به این مود غالب و با استفاده از رابطه ۱۷، این بار اسکیل مناسب عدد ۹٫۵ بدست می آید. با توجه به افزایش فرکانس طبیعی و رابطه عکس داشتن مقیاس با فرکانس، کاهش مقیاس از ۴۰ به ۱۰ در این حالت کاملا بدیهی است.

برای محاسبه FRF در این حالت با محاسبات انجام شده در رابطه ۱۷،پارامتر اسکیل یعنی a، هنگام محاسبه تبدیل ویولت برابر عدد ۱۰ انتخاب شد. پس از تقسیم ویولت خروجی به ورودی و محاسبه FRF جواب به صورت سه بعدی در شکل ۸ به صورت لگاریتمی رسم شده است. باز هم فرم سیگنال چیرپ در خروجی سیستم و فرکانس های تحریک سیستم حول ۶٫۸ هرتز در معیار لگاریتمی خود را به وضوح نشان می دهد.



شکل ۸ FRF سیستم نمونه دوم به صورت سه بعدی در مقیاس لگاریتمی

از دو مثال آورده شده می توان دید که روش پیشنهادی هم در حالت خطی و هم در حالت غیر خطی بدرستی تابع پاسخ فرکانسی سیستم را محاسبه می کند.

۵- مراجع

[1] ویلیام تیرل تامسون - ماری دیلون داهله، *تئوری ارتعاشات* باکاربردهای آن، مترجم:اردشیر کرمی محمدی ، ناشر نوپردازان، 1388.

[2] W.J. Staszewski, *Identification Of Non-Linear Systems Using Multi-Scale Ridges And Skeletons Of The Wavelet Transform*, Journal of Sound and Vibration (1998) 214(4), 639-658.

[3] K. Worden, *Data processing and experiment design for the restoring force surface method, part 1: integration and differentiation off measured time data*, Mechanical Systems and Signal Processing 4, 295-319, 1990.

[4] R.A. Carmona, W.L. Hwang, B. Torresani, *Characterization of signals by the ridges of their wavelet transform*, IEEE Trans. Signal Process. 45 (10) (1997) 2586.

[5] R. Ghanem, F. Romeo, *A wavelet-based approach for the identification of linear time-varying dynamical systems*, J. Sound Vib. 234 (4) (2000) 555–576.

[6] Tracy L. Kijewski1, Student Member ASCE and Ahsan Kareem2, Member ASCE, *Wavelet Transforms For System Identification And Associated Processing Concerns*,15th ASCE Engineering Conference June 2-5 ,2002, Colambia University, New York,NY.

[7] T-.P. Le, P. Argoul, *Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response*, J. Sound Vib. 277 (2004) 73–100.

[8] Staszewski, W. J. & Robertson, A. N. *Time-frequency and time-scale analysis for structural health monitoring*. Phil.Trans.R.Soc.A365,(2007) 449–477.

[9] X. Shan, J.B. Burl, *Continuous wavelet based linear time-varying system identification*, Signal Process. 91 (2011) 1476–1488.

[10] W.J. Staszewski, J. Giacomin, *Application of wavelet based FRFs to the analysis of nonstationary vehicle data*, in: Proceedings of IMAC-XV, 3–6 February, Orlando, Florida, vol. 1 (1997) pp. 425–431.

[11] X .Xu, Z .Y .Shi, Q .You ,*Identification of linear time-varying systems using a wavelet-based state-space method*, Mechanical Systems and Signal Processing ,vol. 26, (2012) pp. 91 - 103.

[12] Mallikarjuna D Reddy and Seetharaman Swarnamani, *Structural damage identification using signal processing method*, International Journal of Advanced Structural Engineering 2013.

[13] Chao Wang , Wei-Xin Ren , Zuo-Cai Wang, Hong-Ping Zhu, *Instantaneous frequency identification of time-varying structures by continuous wavelet transform*, Engineering Structures 52 (2013) 17–25.

[14] Goswami, J. C., & Chan, A. K. *Fundamentals of wavelets: theory, algorithms and applications*. Oxford, Wiley-Blackwell, (2011).