



تحلیل سرعت بحرانی لوله حاوی سیال با شرایط مرزی غیر کلاسیک

شاهرخ شمس^{۱*}، سجاد جنگروی^۲

۱ - استادیار، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، مهندسی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران

* تهران، کد پستی ۱۴۳۹۹-۵۷۱۳۱، shahrokh.shams@ut.ac.ir

چکیده

محاسبه سرعت بحرانی لوله حاوی سیال از مسائل مهم در مهندسی است. بدین منظور، سرعت بحرانی لوله حاوی سیال با شرایط مرزی غیر کلاسیک در مقاله حاضر محاسبه گردیده است. معادلات حرکت سازه بر اساس مدل تیر اویلر- برنولی پایه گذاری شده است. شرایط مرزی غیر کلاسیک شامل فنر خطی، فنر پیچشی، جرم متمرکز و میراکننده ها هستند. برای محاسبه سرعت بحرانی، معادله فرکانسی با توجه به شرایط مرزی با روش عددی حل میگردد. زمانی که قسمت حقیقی معادله فرکانسی به صفر برسد، سرعت بحرانی در لوله ظاهر و سیستم ناپایدار می شود. تاثیر پارامترهای مختلف شامل سختی فنر و جرم متمرکز بر سرعت بحرانی بررسی و نمودار های مقایسه ای از سختی های متفاوت فنر و جرم متمرکز ترسیم شده است. نتایج نشان میدهد که سرعت بحرانی در حالت دو سر فنر خطی بیشتر از شرط مرزی فنر پیچشی- فنر خطی و جرم متمرکز- فنر پیچشی است و همچنین کاهش قابل توجه فرکانس در حالت غیر کلاسیک نسبت به کلاسیک هستند.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۱۲ مرداد ۱۳۹۸

پذیرش: ۱۵ آذر ۱۳۹۸

ارائه در سایت: ۲۵ آذر ۱۳۹۸

کلیدواژگان

لوله حاوی سیال

سرعت بحرانی

شرایط مرزی غیر کلاسیک.

Critical velocity Analysis of Fluid-containing Pipe with Non-Classical Boundary Conditions

Shahrokh Shams^{1*}, Sajad Jangravi¹

1Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences and Technologies, University of Tehran, Tehran.

*Tehran, P.O.box:14399-57131 shahrokh.shams@ut.ac.ir, Iran

Article Information

Original Research Paper

Received 3 August 2019

Accepted 6 December 2019

Available Online 16 December 2019

Keywords

: Fluid-containing pipe

Critical velocity

Non-classical boundary conditions

ABSTRACT

calculating the critical velocity of fluid-containing pipes is an important issue in engineering. For this purpose, the critical velocity of fluid-containing pipes with Non-classical boundary conditions is investigated. The equation of motion is based on the Euler-Bernoulli beam model. Non-classical boundary conditions include conditions such as Translational springs, torsional springs, concentrated mass and dampers. In order to calculate the critical velocity the frequency equation is solved numerically. when real part of frequency equation reaches zero, the critical velocity in the pipe appears and the system becomes unstable. influence of various parameters including spring hardness and concentrated mass on critical velocity is investigated and comparative diagrams of different spring hardnesses and concentrated mass are drawn. The results show that the critical velocity in the Translational double-ended state is higher than the torsional spring-concentrated mass and torsional spring-concentrated mass boundary condition. The results also indicate a significant decrease in the frequency in the non-classical boundary condition compare to classical boundary condition.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Shahrokh Shams*, Sajad Critical velocity Analysis of Fluid-containing Pipe with Non-Classical Boundary Conditions, *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 10, No. 3, pp. 52-59, 2019 (In Persian)

۱- مقدمه

از لوله ها برای انتقال سیالات با سرعت و فشار بالا که معمولاً تحت شرایط زمانی مختلف استفاده میشود. افزایش سرعت سیال داخل لوله موجب افزایش دامنه ارتعاشات میشود و این عملکرد ممکن است موجب بروز ارتعاشات شدید در لوله و خسارات شدید گردد. با در نظر گرفتن استفاده گسترده لوله های حاوی سیال در صنایع مختلف، مدلسازی ریاضی و تحلیل ارتعاشات لوله های حاوی سیال مورد توجه محققان قرار گرفته است. از اولین پژوهش های انجام شده در زمینه ارتعاشات لوله های حاوی سیال توسط اشلی و هویلند [1] در سال ۱۹۵۰ انجام شد، آنها لوله حاوی سیال را هنگامی که در ارتعاشات شدید هست را مورد پژوهش قرار دادند. هوسنر [2] نیز در سال ۱۹۵۲ به این نتیجه رسید که پدیده وقوع سرعت بحرانی در لوله ای با شرط مرزی تکیه گاه ساده موجب کماتش لوله میشود. در ۱۹۵۵ لانگ [3] به آزمایش تاثیر شرایط مرزی مختلف بر سرعت بحرانی پرداخت. پایدوسی و گرگوری [4] در سال ۱۹۶۶ به مطالعه رفتار دینامیک لوله یکسرگردار حاوی سیال پرداختند، برای معین کردن وضعیت پایداری به ناپایداری به تحلیل قسمت موهومی فرکانس در چهار مود سیستم با کمترین مقدار پرداختند. چن [5] در ۱۹۷۱ تلاش به محاسبه سرعت بحرانی تیر هنگامی که یک فنر به انتهای آزاد لوله حاوی سیال بود، نمود، تحلیل ناپایداری را با تغییر محل قرارگیری شرط مرزی انجام شد. ویور و یونی [6] در ۱۹۷۳ با استفاده از فلاج-کمپنر برای لوله حاوی سیال با طول محدود به محاسبه سرعت بحرانی، تحلیل فلاتر^۱ و دینامیک لوله پرداختند. در سال ۱۹۷۴ پایدوسی و ایسید [7] به مطالعه رفتار دینامیکی و پایداری لوله هنگامی که سیال با سرعت ثابت و با اندکی تحریک خارجی پرداختند، نتایج آنها اثبات کرد که علاوه بر کماتشی که در ناپایداری رخ میدهد، در شرایط سرعت های بالاتر لوله دچار شرایط فلاتر نیز میگردد، نمودارهای خروجی پایداری نیز با روش بولتون^۲ حاصل شد. پایدوسی و لی [8] به مطالعه مروری بر فعالیت های مروری در زمینه دینامیک لوله های حاوی سیال پرداختند. در ۱۹۹۳ شرایط مرزی به دو بخش کلاسیک و غیر کلاسیک تقسیم بندی میشود، شرایط مرزی کلاسیک مانند

تکیه گاه ساده، یکسرگردار و... هستند و شرایط مرزی غیر کلاسیک نیز شامل فنر های پیچشی و خطی، جرم متمرکز و میراکننده ها در انتهای آزاد لوله یا تیر هستند. سوندارا راجان و سوگیاما [9] در ۱۹۷۵ به آزمایش سرعت بحرانی با افزودن فنر به انتهای سیستم الاستیک با وجود نیروی خارجی پرداختند. نتایج محاسبات آنها نشان از تاثیر قابل توجه افزودن فنر بر سرعت بحرانی داشت. در ۲۰۱۰ رینالدی و پایدوسی [10] با استفاده از روش های تجربی و تحلیلی به مطالعه رفتار دینامیکی تیر یکسرگردار با افزودن جرم متمرکز به لوله حاوی سیال پرداختند، مطالعات آنها نیز نشان از تاثیر اضافه کردن این شرط مرزی غیر کلاسیک بر ارتعاشات لوله حاوی سیال داشت. شانکار چارل و همکاران [11] در سال ۲۰۱۵ به بررسی ارتعاشات لوله با قید الاستیک و شرایط مرزی انتهایی متفاوت پرداختند. در ۲۰۱۶ سیلوا و همکارانش [12] به مطالعه ارتعاشات تیر در شرایط مرزی مختلف پرداختند، مدل تیر مورد بررسی را تیر اوپلر-برنولی در نظر گرفتند و به استخراج معادله فرکانسی و تحلیل شکل مودهای مختلف نیز پرداختند و مقادیر و تابع ویژه برای تیر با شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک را محاسبه کردند. در سال ۲۰۱۷ رضایی و عرب مالکی [13] به تعیین مشخصه های ارتعاشی لوله های حامل سیال مجهز به جاذب ارتعاشی پرداختند، معادلات حاکم برای جاذب بر اساس قانون دوم نیوتن و برای استخراج شکل مود های ارتعاشی و معادله مشخصه به حل معادلات بر مبنای سری های توانی پرداختند. با توجه به بررسی مطالعات انجام شده در حوزه لوله های حاوی سیال مشاهده میشود که تاکنون تاثیر استفاده از شرایط مرزی غیر کلاسیک بر ارتعاشات و سرعت بحرانی لوله های حاوی سیال صورت نگرفته. معادلات سازه ای بر اساس تئوری تیر اوپلر برنولی صورت گرفته است و برای استخراج معادله فرکانسی از صفر قرار دادن دترمینان ضرایب حاصل از ماتریس ضرایب استفاده شده است.

۲- استخراج معادلات حاکم بر سیستم

در شکل (۱) نمایی از یک لوله حاوی سیال که دارای سیال با سرعت U مشاهده میشود. در صورتی که جرم لوله m_p و جرم سیال داخل لوله m_f در نظر گرفته شود، معادله حاکم

¹ Flutter² Bolton's Method

$$V^2 = \frac{L^2 m_f U}{EI}$$

$$\lambda^4 = \frac{L^4}{EI} \omega^2 (m_p + m_f) \quad (3)$$

$$\xi = \frac{X}{l}$$

در معادله (۳)، l طول لوله است.

در نتیجه معادله (۲) به شکل زیر تبدیل میشود:

$$\frac{\partial^4 y^4(x,t)}{\partial \xi^4} + V^2 \frac{\partial^2 y^2(x,t)}{\partial \xi^2} - \lambda^4 y(x,t) = 0 \quad (4)$$

در ابتدا با حل معادله فرکانسی و در سرعت صفر تنها قسمت موهومی معادله ظاهر و نشانگر فرکانس است، با افزایش سرعت سیال قسمت حقیقی فرکانس ظاهر میشود و هنگامی که این مقدار به صفر رسیده و تغییر علامت دهد سرعت بحرانی در لوله به وجود می آید. زمانی که قسمت حقیقی معادله فرکانسی به صفر میرسد، سرعت بحرانی در لوله ایجاد میشود و موجب کماتش لوله و تخریب سازه میگردد.

در ادامه برای استخراج معادله فرکانسی به شکل زیر داریم [13]:

$$y(X, t) = w(X) e^{i\omega t}$$

$$w(X) = C e^{sX} \quad (5)$$

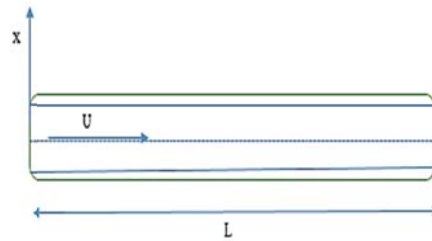
$$cs^4 e^{sX} + 2V^2 cs^2 e^{sX} - \lambda c e^{sX} = 0$$

با حل معادله موجود در روابط (۵):

$$s^4 + 2V^2 s^2 - \lambda^4 = 0$$

$$s^2 = -V^2 \pm (V^4 + \lambda) \quad (6)$$

بر حرکت لوله با استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی به شکل زیر است [13]:



شکل ۱- نمایی از لوله حاوی سیال

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m_f U^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + 2m_f U \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

در مقاله حاضر از خواص پلی اتیلن برای لوله در نظر گرفته شده است. ترم اول معادله (۱) مربوط به سختی لوله، ترم دوم همان ترم نیروی کوریولیس و $y(x,t)$ جابجایی عرضی لوله است.

[13] معادله (۱) را میتوان به صورت بی بعد به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial \xi^4} + V^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial \xi^2} + 2\gamma V \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial \xi \partial t} - \lambda^4 y(x,t) = 0 \quad (2)$$

در معادله (۲):

سرعت بی بعد، λ پارامتر بی بعد و ξ هم مختصات طبیعی سیستم است. V نسبت جرم، γ

با توجه به اینکه در پژوهش حاضر هدف به دست آوردن مرزهای بالایی فرکانس ارتعاشات است، پس از تاثیر ترم نیروی کوریولیس صرف نظر میشود. عبارت های بی بعد به شکل زیر تعریف میشوند [13]:

میشود. با تشکیل ماتریس ضرایب و صفر قرار دادن دترمینان ماتریس معادله مربوط به فرکانس لوله حاصل میشود. [13]

۴- شرایط مرزی غیرکلاسیک

همانطور که عنوان شد شرایط مرزی در علوم مهندسی به دو بخش کلاسیک و غیر کلاسیک تقسیم بندی میشوند، شرایط مرزی کلاسیک شامل شرایط تکیه گاهی ساده، یکسرگیردار و دو سر مفصل و شرایط مرزی غیرکلاسیک نیز شامل جرم متمرکز، فنرهای پیچشی و خطی و میراکننده ها هستند. شرایط مرزی فنر خطی - فنر پیچشی و جرم متمرکز مقاله حاضر مورد تحلیل قرار گرفته اند. معادلات مربوط به شرایط مرزی مذکور در جدول (۱) آمده اند:

در جدول فوق هنگامی که شرط مرزی در سمت راست لوله قرار داشته باشد، $a = 1$ و $b = -1$ و در حالتی که شرط مرزی سمت چپ لوله باشد $a = -1$ و $b = 1$. [10]

جدول ۱- معادلات مربوط به شرایط مرزی غیرکلاسیک

شرایط مرزی غیرکلاسیک	معادلات
فنر خطی	$EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$, $EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} =$ $aky(x, t)$
فنر پیچشی	$EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} = 0$, $EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} =$ $bk_t \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$
جرم متمرکز	$EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0$, $EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} =$ $am_c \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

۵- نتایج تحلیلی

در این قسمت به بررسی تاثیر پارامترهای مختلف شرایط مرزی غیرکلاسیک بر سرعت بحرانی لوله های حاوی سیال پرداخته میشود. برای محاسبه سختی مناسب برای فنرها از قسمت موهومی معادله فرکانسی استفاده شده است و سرعت

$$\begin{cases} s_1 = \sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + \lambda}} = \alpha \\ s_3 = -\sqrt{-V^2 + \sqrt{V^4 + \lambda}} = -\alpha \\ s_2 = \sqrt{-V^2 - \sqrt{V^4 + \lambda}} = i\beta \\ s_4 = -\sqrt{-V^2 - \sqrt{V^4 + \lambda}} = -i\beta \end{cases}$$

۳- استخراج معادله فرکانسی

برای حل معادله (۲) پاسخ زیر در نظر گرفته میشود [13]:

$$w(x) = A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$$

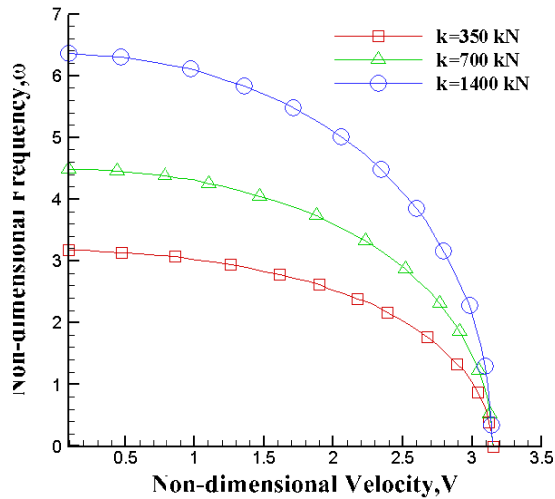
$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \alpha A \sinh(\alpha x) \\ &+ \alpha B \cosh(\alpha x) \\ &- \beta C \sin(\beta x) \\ &+ \beta D \cos(\beta x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \alpha^2 A \cosh(\alpha x) \\ &+ \alpha^2 B \sinh(\alpha x) \\ &- \beta^2 C \cos(\beta x) \\ &- \beta^2 D \sin(\beta x) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} &= \alpha^3 A \sinh(\alpha x) \\ &+ \alpha^3 \alpha B \cosh(\alpha x) \\ &- \beta^3 C \sin(\beta x) \\ &- \beta^3 D \cos(\beta x) \end{aligned}$$

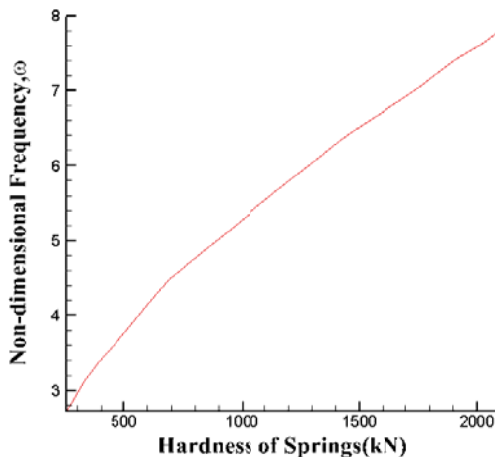
$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \alpha^4 A \cosh(\alpha x) \\ &+ \alpha^4 B \sinh(\alpha x) \\ &+ \beta^4 C \cos(\beta x) \\ &+ \beta^4 D \sin(\beta x) \end{aligned}$$

هر کدام از شرایط مرزی دو معادله در دو سمت تیر ایجاد میکنند که موجب محاسبه ثوابت موجود در معادله (۷)



شکل ۴- سرعت بحرانی لوله با دو فنر خطی در دو انتها

همانطور که در تصاویر مشاهده میشود، سرعت بحرانی در این شرط مرزی برابر با π است و این عدد برابر با عدد بحرانی در حالت تکیه گاه ساده است، افزایش سختی فنر تاثیری در تغییر سرعت بحرانی ایجاد نمیکند ولی با توجه به بالا رفتن سختی فنر ها در دو سمت لوله موجب افزایش فرکانس در لوله میشود و این اتفاق در سازه های تحت ارتعاش موجب نتایج مخربی است. پس از محاسبه سرعت بحرانی به بررسی تاثیر افزایش سختی فنر بر فرکانس پرداخته میشود.



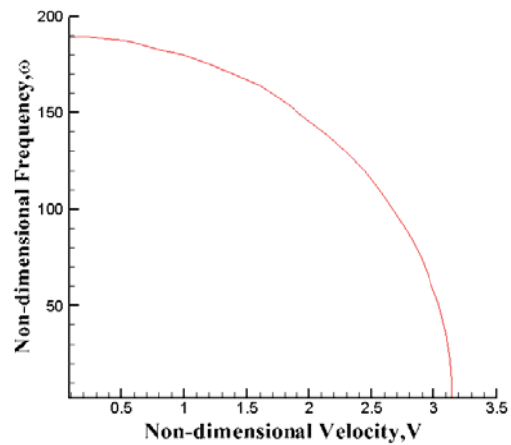
شکل ۵- افزایش فرکانس در سختی های مختلف فنر

در نمودار افزایش فرکانس بر اساس افزایش سختی فنر مشاهده می شود. طبق نمودار فوق میتوان به این نتیجه رسید که

بحرانی در سختی ها و جرم های مختلف فنر ها و جرم متمرکز حاصل شده است.

۱-۵ اعتبارسنجی

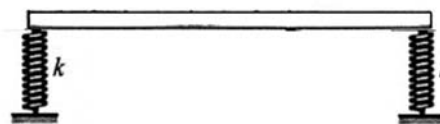
برای اعتبارسنجی نتایج حاصله از کد، با در نظر گرفتن نتیجه خروجی در مقاله [13] برای تیر با شرط مرزی تکیه گاه ساده که سرعت بحرانی را برابر با π محاسبه کرده است، نمودار خروجی برای سرعت بحرانی رسم شده است. مشاهده میشود که عدد حاصله از کد با تقریب قابل قبولی برابر با π است.



شکل ۲- نمودار اعتبار سنجی بر اساس تیر با تکیه گاه ساده

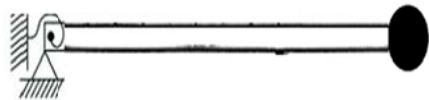
۲-۵ فنر خطی - فنر خطی

در تصویر (۳) نمایی از لوله با شرط مرزی دو سر فنر خطی مشاهده میشود:



شکل ۳- نمایی از لوله با فنر خطی در دو انتها

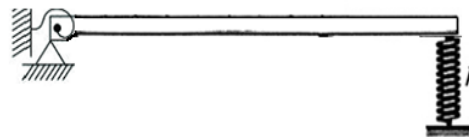
سرعت بحرانی در مقادیر مختلف سختی با رسم قسمت حقیقی معادله فرکانسی محاسبه میشود:



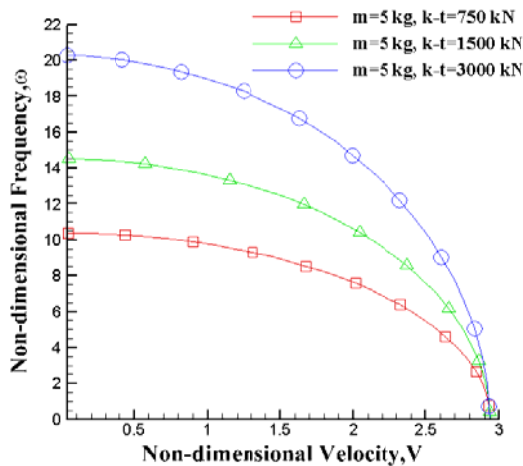
طراحی مناسب فنرها بر اساس خواص لوله میتواند به کاهش مطلوب فرکانس ارتعاشات منجر شود.

۳-۵ فنر خطی - فنر پیچشی

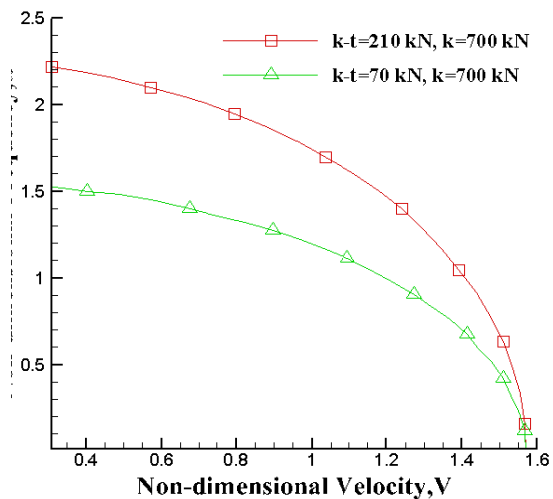
مانند قسمت قبل به محاسبه سرعت بحرانی لوله در مقادیر مختلف سختی فنرهای پیچشی و خطی پرداخته میشود.



شکل ۸- نمایی از لوله با جرم متمرکز و فنر پیچشی



شکل ۶- نمایی از لوله با فنر خطی و پیچشی



شکل ۹- سرعت بحرانی لوله با جرم متمرکز و فنر پیچشی

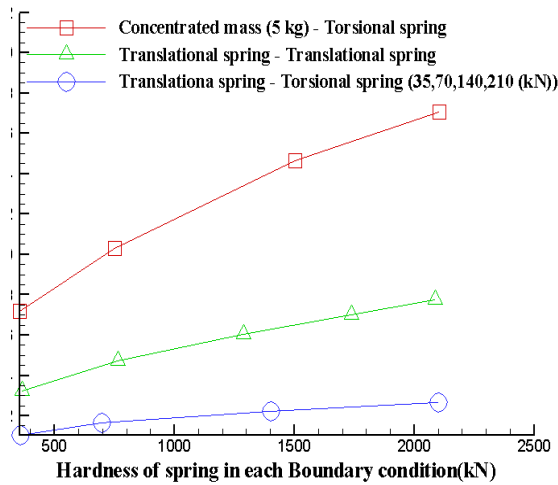
در نمودار (۹) مشاهده میشود که در جرم ثابت ۵ کیلوگرم جرم متمرکز سرعت بحرانی کمتر از شرط مرز دو سر فنر خطی و بیشتر از شرط مرزی یکسرفنر خطی، یکسرفنر پیچشی است و تقریباً برابر با ۳ است، ضمناً فرکانس با افزایش سختی فنر پیچشی افزایش می یابد. در قسمت بعد وزن جرم متمرکز را دو برابر حالت قبل و سختی فنر ثابت در نظر گرفته میشود.

شکل ۷- سرعت بحرانی لوله با فنر خطی و پیچشی

سرعت بحرانی در این شرط مرزی نزدیک به ۱,۶ است. همانطور که در نمودار خروجی مشهود است، سرعت بحرانی در این حالت از سرعت بحرانی در حالت دو سر فنر خطی کمتر است. مانند حالت با دو فنر خطی افزایش میزان سختی فنر ها موجب افزایش فرکانس لوله شده که در سازه ها این افزایش فرکانس موجب بروز پدیده خستگی در سازه و تخریب سازه میگردد.

۴-۵ جرم متمرکز- فنر پیچشی

در این بخش به تاثیر جرم متمرکز و سختی فنر پیچشی بر سرعت بحرانی لوله حاوی سیال پرداخته میشود.

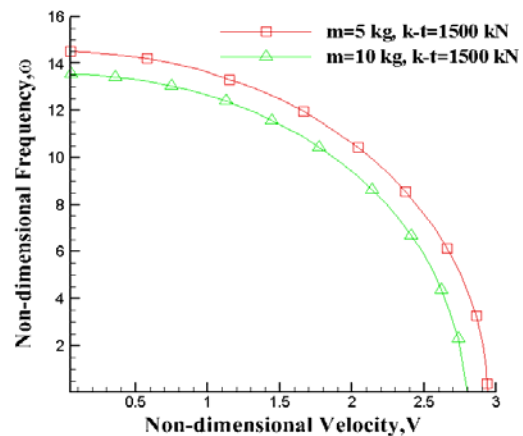


شکل ۱۱- مقایسه فرکانسی شرایط مرزی تحت بررسی در پژوهش حاضر

همانطور که در بخش های قبل اثبات شد افزایش سختی فنرها موجب افزایش فرکانس در لوله و افزایش جرم متمرکز نیز فرکانس را کاهش میدهد، با ذکر این نکته که میزان افزایش جرم متمرکز نباید بیشتر از حد تحمل سازه باشد. با توجه به تصویر (۱۱) مشاهده میشود که بیشترین افزایش فرکانس بین شرایط مرزی مدنظر در پژوهش حاضر مربوط به جرم متمرکز- فنر پیچشی و کمترین فرکانس هم مربوط به فنر پیچشی - فنر خطی است.

۶- نتیجه گیری و پیشنهاد

با توجه به اهمیت بالای تعیین سرعت بحرانی و تحلیل ارتعاشات لوله های حاوی سیال در مقاله حاضر به تحلیل سرعت بحرانی و فرکانس برای لوله حاوی سیال در شرایط مرزی غیرکلاسیک و یک درجه آزادی پرداخته شد. ابتدا معادله حاکم بر لوله بر اساس تئوری تیر اویلر- برنولی ارائه شد، سپس روش حل و استخراج معادله فرکانسی بیان و نهایتاً تاثیر پارامترهای مختلف شرایط مرزی غیرکلاسیک بر سرعت بحرانی و فرکانس لوله ارائه شد. نمودارهای مقایسه ای در سختی های مختلف فنر ها و جرم متمرکز برای سرعت بحرانی و فرکانس رسم شد. نتایج پژوهش حاضر نشان میدهد که افزودن شرط مرزی غیرکلاسیک به لوله تاثیر قابل قبولی بر ارتعاشات و سرعت بحرانی لوله حاوی سیال دارد. در خروجی های مربوط به سرعت بحرانی نتیجه گیری میشود که استفاده از فنر خطی در دو سمت



شکل ۱۰- سرعت بحرانی لوله با ثابت نگه داشتن سختی فنر و تغییر وزن جرم متمرکز

در نمودار (۱۰) مشهود است که افزایش جرم در سختی فنر یکسان موجب کاهش سرعت بحرانی و البته کاهش در فرکانس لوله است. همچنین در بخش های قبل مشاهده شد که افزایش سختی فنر موجب افزایش فرکانس در لوله میشود که مطلوب نیست، البته این نکته قابل ذکر است که افزایش بیش از حد توان تحمل سازه موجب خمش شدید در انتهای سازه میشود و ممکن است سازه دچار شکست ناگهانی شود.

۵-۵ مقایسه نمودار فرکانس مربوط به شرایط مرزی مختلف

در این قسمت مقایسه فرکانس های شرایط مرزی مختلف در سرعت یکسان که در این پژوهش در نظر گرفته شده پرداخته میشود.

۸- مراجع

- [1] Ashley H, Haviland G, "Bending Vibration of a Pipeline containing flowing fluid", *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Sept 1950, pp 229-232
- [2] G.W. Housner, "Bending vibration of a pipe line containing flowing fluid", *J. Appl. Mech.*, 19, 6(1952), pp205-208
- [3] Long, R. H. (March 1955), *Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid*, *Transactions of the ASME-Journal of the Applied Mechanics*, pp 65-68.
- [4] Gregory, R.W., Paidoussis, M.P. (1966), *Unstable oscillations of tubular cantilevers conveying fluid Parts I & II*, *Proceedings of the Royal Society (London) A* 293, 512542
- [5] CHEN, S. S. (1971), *Flow-induced instability of an elastic tube*, *American Society of Mechanical Engineers, Paper* 71-Vibr39.
- [6] Weaver D.S and Unny T.E., "On the Dynamic Stability of Fluid conveying Pipes", *Transactions of ASME*, March 1973, 48-52
- [7] Paidoussis, M. P., & Issid, N. T. (1974). *Dynamic stability of pipes conveying fluid*. *Journal of sound and vibration*, 33(3), 267-294.
- [8] Paidoussis, M. P., & Li, G. X. (1993). *Pipes conveying fluid: a model dynamical problem*. *Journal of Fluids and Structures*, 7(2), 137-204.
- [9] Sundararajan, C. (1974), *Influence of end support on the stability of nonconservative elastic systems*, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics Vol* 41, pp 313-315.
- [10] S. Rinaldi, M.P. Paidoussis, *Dynamics of a cantilevered pipe discharging fluid fitted with a stabilizing end-piece*, *Journal of Fluids and Structures*, 26(3) (2010) 517-525.
- [11] Sutar, Shankarachar & Madabhushi, Radhakrishna & Babu, P. (2015). *Fluid Induced Piping Vibration with Elastically Restrained Different End Supports**. *International Journal of Engineering Research and. V4*. 10.17577/IJERTV4IS100408.
- [12] Fernandes da Silva, João & Allende Dias do Nascimento, Lucas & dos Santos, Simone. (2015). *Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams under non-classical boundary conditions*. 10.20906/CPS/CON-2016-1053.
- [13] Rezaee M, Arab Maleki V. *Vibration Characteristics of Fluid-Conveying Pipes in presence of a Dynamic Vibration Absorber*. *Modares Mechanical Engineering*. 2017; 17 (7) :31-38

لوله دارای بالاترین سرعت بحرانی در مقایسه شرایط مرزی مختلف است. میزان سرعت بحرانی به ترتیب: فنرخطی- فنر خطی، فنر خطی- فنر پیچشی و جرم متمرکز- فنر پیچشی. افزایش میزان سختی فنرها موجب افزایش فرکانس در لوله میشود، پس بهتر است تا حد ممکن تلاش به دستیابی به کمترین سختی فنرها برای طراحی مطلوب شود. استفاده از جرم متمرکز در یکسر لوله دارای فرکانس بالاتری نسبت به شرایط مرزی دیگر در سرعت یکسان است که در مقاله معرفی شد، بالا بردن وزن جرم متمرکز در شرط مرزی جرم متمرکز- فنر پیچشی سرعت بحرانی و فرکانس لوله را کاهش میدهد. با مقایسه نمودارهای خروجی مربوط به سرعت بحرانی و فرکانس در شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک، این نتیجه قابل استحصال است که استفاده از شرایط مرزی غیرکلاسیک دارای فرکانس کمتری نسبت به شرایط مرزی کلاسیک است و در صورت طراحی مناسب لوله و اتصال مطلوب به لوله میتوان از نتایج ممکنه در اثر خستگی و شکست لوله جلوگیری نمود.

۷- فهرست اصطلاحات

سختی خمشی لوله EI

سختی فنر خطی k

سختی فنر پیچشی $k-t$

وزن جرم متمرکز m

جرم سیال m_f

جرم لوله m_p

زمان t

سرعت سیال U

سرعت بی بعد V

مختصات عرضی x

جابجایی عرضی لوله y

ضرایب مثلثاتی توابع α, β

نسبت جرم γ

پارامتری بعد λ

شرط مرزی طبیعی ζ