



توسعه مدل آیرودالاستیسیته پره کامپوزیتی و تحلیل اثر چرخش و افزایش طول بر فرکانس‌های طبیعی

رضا اثباتی لواسانی^۱، شاهرخ شمس^{۲*}

۱- دکتری، گروه مهندسی هوافضا دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

۲- دانشیار، گروه مهندسی هوافضا دانشکده علوم و فنون نوین، دانشگاه تهران، تهران، ایران

* تهران، کدپستی ۱۴۳۹۹-۵۷۱۳۱، shahrokh.shams@ut.ac.ir

چکیده

در این پژوهش معادلات آیرودالاستیسیته خطی پره توربین بادی با روش گسسته سازی المان محدود جهت در نظر گرفتن اثر چرخش و افزایش طول بر فرکانس‌های طبیعی استخراج شده است. پره یک تیر یکسر گیردار اوپلر-برنولی کامپوزیتی در نظر گرفته شده و با روش المان محدود مدل شده است. با بکارگیری روش همیلتونین معادلات حرکت را بدست آمده است. ماتریس‌های المان محدود با تعیین جابجایی گره‌ها و فرض رابطه خطی در جابجایی محوری و تابع هرمیشن در جهات عرضی و پیچشی محاسبه می‌شوند. اعتبار سنجی معادلات به صورت عددی بر روی پره با شبیه سازی سیستم معادلات و بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها انجام شده است. همچنین اثر افزایش طول پره و چرخش پره در پره کوتاه و بلند کامپوزیتی بررسی شده است. بررسی فرکانس‌های طبیعی نشان می‌دهد فرکانس‌های اول و دوم پره‌های بلند تحت تاثیر افزایش طول و چرخش هستند. اما در فرکانس‌های بالا و همچنین در پره کوتاه اثر افزایش طول و چرخش کمتر از یک درصد است.

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: ۲۲ آبان ۱۳۹۸

پذیرش: ۱۵ اسفند ۱۳۹۸

ارائه در سایت: ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۹

کلیدواژگان

توربین بادی

آیرودالاستیسیته

المان محدود

فرکانس طبیعی

Developing the Aeroelastic model of a Composite Wind Turbine Blade and Analyzing the Effects of Rotation and Length Increase on Natural Frequencies

Reza Esbati Lavasani¹, Shahrokh shams^{2*}

1- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences & Technologies, **University of Tehran**, Tehran, Iran.

2- Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Sciences & Technologies, **University of Tehran**, Tehran, Iran.

* P.O.B. 14395-1561 Tehran, Iran, shahrokh.shams@ut.ac.ir

Article Information

Original Research Paper

Received 13 November 2019

Accepted 5 March 2020

Available Online 29 April 2020

Keywords

Wind turbine,

Aeroelasticity,

finite element,

natural frequency

ABSTRACT

The linear aeroelastic equation of motion of a wind turbine blade considering the length increase and rotation terms of the blade is derived. The blade is a composite cantilever beam. The Euler-Bernoulli theory is the fundamental theory in developing the equations. Because of the compatibility of the finite element and BEM, the blade is modeled with the finite element method. Applying Hamiltonian leads to the aeroelastic equations of motion. The finite element matrices are derived by considering linear and Hermitian shape function in axial and transverse deflection, respectively. We consider the linear equation of motion with length increase term. Simulation and analyzing the natural frequency and mode shapes validate the equations of motion. Besides, the effects of the length increase of the blade and rotation of blade on both short and long composite blades are investigated. Analysis of natural frequencies implies that the first and second frequencies of long blade are affected by length increase and rotation of the blade. However, higher modes are affected by less than one percent.

Please cite this article using:

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

Reza Esbati Lavasani, Developing the Aeroelastic model of a Composite Wind Turbine Blade and Analyzing the Effects of Rotation and Length Increase on Natural Frequencies, *Journal of Mechanical Engineering and Vibration*, Vol. 11, No. 1, pp. 7-17, 2019-2020 (In Persian)

۱- مقدمه

رفتار دینامیکی سازه با معادلات الاستیسیته قابل بررسی است. معادلات دینامیک سازه یک دسته معادلات دیفرانسیل جزئی به همراه شرایط مرزی هستند. این دسته معادلات برای کاربردهایی همچون پره توربین بادی به روش تحلیلی به تفصیل در مراجع [۱-۵] تشریح شده‌اند. در این روش‌ها تغییرات انرژی جنبشی، پتانسیل و کار مجازی با تعریف سینماتیک مناسب محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم استخراج می‌شود. جهت حل معادلات دیفرانسیل جزئی به طور معمول از روش‌هایی چون روش گالرکین معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند. رضایی و همکاران در [۴] معادلات مرتبه کاهش یافته آیرودالاستیسیته غیرخطی را با فرض نیروی آیرودینامیک شبه پایا همچون نیروهای آیرودینامیک مرجع [۷،۸،۱۳] به عنوان کار خارجی، بدست آورده‌اند. شکل مدهای استفاده شده در تحقیق ایشان از تحلیل المان محدود خطی استخراج شده است. روش تحلیل المان محدود (FEA^۱) کنیکی عددی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم از طریق گسسته سازی است. در این روش امکان تلفیق آیرودینامیک توسعه یافته بر روی هر المان وجود دارد. از اینرو در این پژوهش از روش FEA در حل معادلات الاستیسیته استفاده شده است.

هدف اصلی این پژوهش استخراج معادلات حرکت با روش المان محدود متناسب با نیروهای آیرودینامیکی حاصل از روش BEM پیشنهادی در [۸] است. این معادلات در تحلیل دینامیکی آیرودالاستیسیته پره قابل استفاده است. همچنین عبارات حاصل از چرخش و افزایش طول پره در معادلات حرکت در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب اثر پذیری پره کوتاه و پره بلند از چرخش و همچنین ازدیاد طول با لحاظ اختلاف درصد و انحراف معیار نسبت به تیر بررسی شده است. در این پژوهش ابتدا انرژی جنبشی با تعریف بردار مکان و سرعت در سیستم مختصات تعریف شده بر هاب بدست می‌آید. در بخش بعدی انرژی پتانسیل سیستم با تانسور کرنش گرین-لاگرانژ بدست می‌آید. کار ناپایستار حاصل از نیروهای آیرودینامیکی است. اعمال اصل همپلتونین معادلات حرکت را بدست می‌دهد. در بخش بعدی ماتریس‌های المان محدود با در نظر گرفتن توابع وزنی بدست می‌آید. در آخر صحت سنجی معادلات بر روی پره بلند و کوتاه انجام شده و اثرات چرخش و افزایش طول پره بررسی می‌شود.

۲- شکل‌ها، معادله حرکت پره

سیستم مختصات در شکل ۱ نمایش داده شده است. طول پره برابر L است که در شعاع r به مرکز هاب O متصل شده است. دو سری دستگاه مختصات تعریف شده است. سیستم مختصات XYZ در مرکز هاب و سیستم مختصات xyz در محل اتصال پره به هاب در نظر گرفته شده است. هاب و پره با سرعت Ω حول محور تقارن می‌چرخند. انعطاف پذیری پره موجب تغییر شکل‌های بزرگی می‌شود. بنابراین بردار مکان هر نقطه تغییر شکل یافته پره عبارت است از:

$$\vec{op} = [r + x + u_x \quad y + u_y \quad z + u_z]^T \quad (1)$$

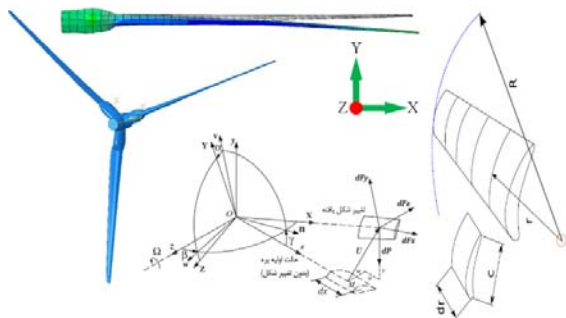
$$\vec{u} = \vec{op} - \vec{op}_0 = [u_x \quad u_y \quad u_z]^T \quad (2)$$

با استفاده از نظریه مشتقات نسبی، بردار سرعت مطلق \vec{V}_p بدست می‌آید:

$$\vec{V}_p|_{oXYZ} = \frac{d\vec{op}}{dt}|_{oXYZ} = \frac{d\vec{op}}{dt}|_{oxyz} + \vec{\Omega}_{xyz} \times \vec{op} \quad (3)$$

که بردار چرخش به صورت $\vec{\Omega}_{xyz} = [\dot{\beta} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} + \Omega]^T$ تعریف می‌شود. جابجایی در راستای x, y, z با u, v, w و چرخش حول x, y, z با β, θ, ψ و نشان داده خواهد شد. با جاگذاری (۲) در (۳) بردار میدان سرعت حاصل می‌شود:

$$\vec{V}_p|_{oXYZ} = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\dot{\psi} + \Omega)(y + v) + \dot{\theta}(z + w + y\beta) \\ (\Omega + \dot{\psi})(r + x + u + z\theta - y\psi) - \dot{\beta}(z + w + y\beta) \\ \dot{\beta}(y + v) - \dot{\theta}(r + x + u + z\theta - y\psi) \end{bmatrix} \quad (4)$$



شکل ۱ سیستم مختصات

¹ Finite Element Method

منظور چرخش سطح مقطع تیر در هر صفحه بر حسب جابجایی عمود بر صفحه تعیین می‌شود. در حالت پارامتری، چرخش θ در صفحه xz بر حسب جابجایی w در صفحه xy و چرخش ψ در صفحه xy بر حسب جابجایی v در صفحه xz نشان داده می‌شود.

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (9)$$

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (10)$$

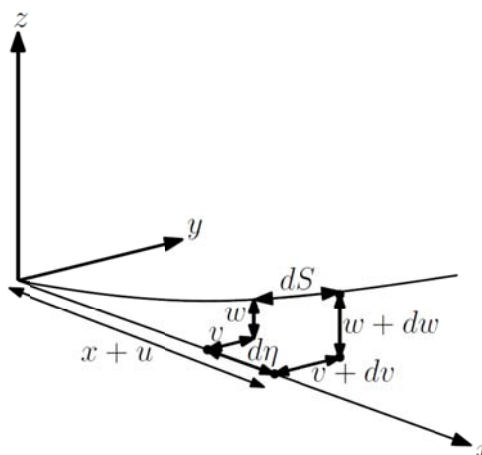
این فرض به معنای عمود ماندن سطح مقطع تیر بر تار خنثی است. همچنین فرض می‌شود اینرسی چرخشی ناچیز است و بنابراین انرژی پتانسیل ساده‌تر می‌شود. با این فرضیات انرژی جنبشی پره عبارت است از:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\left(\dot{s}(x,t) - \dot{h}_v - \dot{h}_w - z \frac{\partial \dot{w}(x,t)}{\partial x} - y \frac{\partial \dot{v}(x,t)}{\partial x} - \Omega y - \Omega v(x,t) - 0.5 \Omega y \beta^2(x,t) \right)^2 + \left(\dot{v}(x,t) + \Omega \left(r + x + s(x,t) - z \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - y \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - h_v - h_w - z \dot{\beta}(x,t) - \dot{\beta}(x,t) w(x,t) + \frac{1}{6} y \beta^3(x,t) \dot{\beta}(x,t) \right) + \left(\dot{w}(x,t) + 2y \dot{\beta}(x,t) + \dot{\beta}(x,t) v(x,t) \right)^2 \right) dx \quad (11)$$

۲-۲- انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل از رابطه تنش-کرنش بدست می‌آید:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon^T \sigma) dV = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon^T Q \epsilon) dV \quad (12)$$



شکل ۲ مختصات کارتزین تعریف شده بر هاب و پره، [۱۴].

بر اساس مرجع [۵] و شکل ۲ تغییر شکل طولی عبارت است:

$$s = \int_0^{x+u} \sqrt{(d\eta)^2 + (dv)^2 + (dw)^2} \quad (5)$$

این تابع نشان‌دهنده رابطه بین تغییر شکل محوری و کشیدگی^۱ تیر است. دیفرانسیل زمانی رابطه بین تغییر طول محوری و کشیدگی پره را بدست می‌دهد، [۱۴]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} - \int_0^x \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) d\varphi - \int_0^x \frac{\partial w}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) d\varphi \quad (6)$$

با در نظر گرفتن نظریه اساسی حساب و دیفرانسیل گیری از معادله (۶) نسبت به x داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (7)$$

در مراجع [۵، ۱۴] درجه آزادی حول محور طولی در نظر گرفته نشده است. در این پژوهش این درجه آزادی در معادلات انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل لحاظ شده است.

۲-۱- انرژی جنبشی

انرژی جنبشی پره عبارت خواهد شد:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \bar{V}_p \cdot \bar{V}_p dx \quad (8)$$

که ρ چگالی جرمی و A سطح مقطع پره است. در این پژوهش تیر مورد بررسی تیر اوپلر-برنولی در نظر گرفته شده است. بنابراین از کرنش و تنش برشی صرف‌نظر می‌کنیم. به این

¹ stretch

که Q ماتریس انطباق^۱ سختی است. تانسور کرنش گرین-لاگرانژ عبارت است از:

$$L_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right) \quad (13)$$

که $u_1, u_2, u_3 = u_x, u_y, u_z$ و $X_1, X_2, X_3 = x, y, z$ با جاگذاری (۷) در (۱۳) می‌توان میدان کرنش پره چرخشی را ساده کرد:

$$P.E = \frac{1}{2} \int_0^L E \left[A \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + I_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (14)$$

با فرض تیر اویلر-برنولی مابقی کرنش‌های برشی برابر صفر خواهند بود رابطه تنش-کرنش را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \times \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \rightarrow \{\varepsilon\} = [Q]^{-1}\{\sigma\} \quad (15)$$

که $[Q]$ ماتریس سختی و $[S] = [Q]^{-1}$ ماتریس انطباق است:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_{E_2} & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \quad (16)$$

پارامترهای E_2, E_1 و E_3 مدول الاستیسیته در امتداد مختصات اصلی ماده کامپوزیتی، G_{23}, G_{12}, G_{13} مدول برشی، و

۲-۳- کار نیروی ناپایستار

کار نیروهای ناپایستار ناشی از نیروهای آبرودینامیکی است:

$$W = f_u(x, t)u + f_v(x, t)v + f_w(x, t)w \quad (17)$$

نیروهای آبرودینامیک را با فرض نظریه نواری با روش ارائه شده در مراجع [۷، ۱۳] برای ایرفویل قابل اعمال است. بدین ترتیب هر المان را یک ایرفویل فرض کرده و نیروهای آبرودینامیکی را بر روی المان بدست می‌آوریم. در این روش سرعت نسبی بر روی هر المان بدست می‌آید. سپس در یک حلقه مقدار ضریب محوری و چرخشی القایی^۲ استخراج می‌شود. کوپل آبرودینامیک خارجی (BEM) و آبرودینامیک داخلی (تئودورسن یا وگنر) زاویه گام الاستیک و در نتیجه زاویه حمله الاستیک را بدست می‌دهد. این فرآیند سرعت نسبی نهایی و ماتریس‌های آبروالاستیک هر المان را بدست می‌دهد، [۷].

۲-۴- اصل همیلتونین

اعمال اصل همیلتونین بسط داده شده، معادلات حرکت را بدست می‌دهد:

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} (L + W) dt = 0 \quad (18)$$

که $L = T - \pi$ تابع چگالی لاگرانژین و W کار نیروهای ناپایستار است. ابتدا معادلات (۱۱)، (۱۴)، و (۱۷) را در (۱۸) جایگزین کرده، سپس تغییرات را بر حسب $\delta w, \delta s, \delta v$ محاسبه می‌کنیم. در ادامه به روش جز به جز انتگرال گرفته و تمام عبارات زیر انتگرال را بر حسب پارامترهای $\delta w, \delta s, \delta v$ جدا جدا می‌کنیم.

۳- المان محدود

در توسعه و بکارگیری روش المان محدود از روش تشریح شده در مرجع [۶] استفاده شده است. پره توربین بادی را در امتداد محور طولی به چند المان تقسیم می‌کنیم، شکل ۳. فرض می‌کنیم هر المان وتر ثابت دارد. در اینصورت می‌توانیم نیروهای آبرودینامیکی دوبعدی توسعه داده شده برای هر ایرفویل را برای

² axial and rotational induction factors

¹ Compliance

هر المان استفاده کنیم. با استفاده از روش المان محدود و توابع شکل، دسته معادلات حرکت به فرم ماتریسی زیر بدست می‌آید:

$$[M_{st}] \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + [C_{st}] \frac{dU(t)}{dt} + [K_{st}] U(t) = F(t) \quad (19)$$

(۲) خمش در صفحه xy:

$$u_z(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ -x + 2\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_9 \\ u_{11} \end{bmatrix} = [H_3 \quad H_4 \quad H_5 \quad H_6] \begin{bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_9 \\ u_{11} \end{bmatrix} \quad (21)$$

(۳) خمش در صفحه xz:

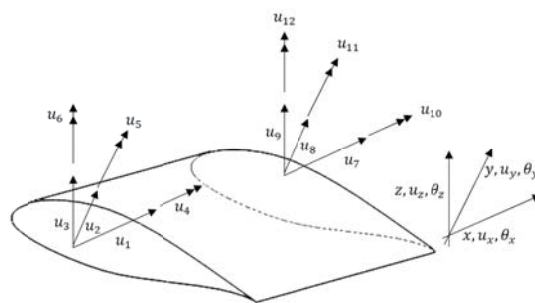
$$u_y(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{bmatrix} = [H_3 \quad -H_4 \quad H_5 \quad -H_6] \begin{bmatrix} u_2 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_{12} \end{bmatrix} \quad (22)$$

بنابراین جابجایی کلی برای یک تیر سه بعدی عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \end{bmatrix} =$$

که M_{st} ماتریس جرم سازه؛ C_{st} ماتریس میرایی سازه؛ K_{st} ماتریس سختی سازه؛ بردار $U(t) = (u_x, u_y, u_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z)$ شامل تمام جابجایی گره‌ها در زمان؛ و $F(t)$ نیروهای وارده بر سیستم سازه است. جهت یافتن این ماتریس‌ها می‌توان معادلات را در دستگاه مختصات اینرسی محاسبه و سپس اثر چرخش را به آنها اضافه کرد. در این پژوهش درجات آزادی شامل جابجایی و چرخش اجزا در مختصات کارتزین هستند. پره را به صورت تیر یک سر گیردار در نظر می‌گیریم. در یک تیر سه بعدی هر گره شامل ۶ درجه آزادی است. در شکل ۳ در هر گره سه درجه آزادی جابجایی و سه درجه آزادی چرخش نشان داده شده است. فرضیات این روش بر اساس [۶] عبارت است از:

- تغییر شکل‌ها کوچک هستند.
- در نظر گرفتن نظریه تیر اوایلر-برنولی برای خمش.
- پیچش آزاد فرض می‌شود. (سن ونان^۱)



شکل ۳ درجات آزادی هر المان پره.

بر اساس [۶] معادلات و توابع شکل هر درجه آزادی به شرح زیر قابل تعریف است.

(۱) تغییر شکل محوری؛ فرض می‌کنیم طول هر المان بر

روی پره $L = x_j - x_i$ است.

¹ Saint-Venant torsion

$$m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_y \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega^2 \rho A \left(r(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right] = f_w \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & -H & 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & -H_6 \\ 0 & 0 & H_3 & 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 & H_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix}$$

$$GJ \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial x^2} - mK_m^2 \frac{\partial^2 \beta(x, t)}{\partial t^2} - m\beta(x, t)(K_{m2}^2 - K_{m1}^2) = 0 \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du_z}{dx} \\ \frac{du_y}{dx} \end{bmatrix}$$

در این بخش معادلات ضعیف شده خطی تیر برنولی با لحاظ افزایش طول خطی بدست می‌آید. بدین منظور معادلات خطی را به ترتیب در توابع وزنی \bar{v} و \bar{w} ضرب کرده و آنها را با یکدیگر جمع می‌کنیم. با انتگرالگیری جز به جز از این معادله بر طول پره دسته معادلات حرکت در راستای طولی-وتر حاصل می‌شود.

$$\ddot{d}^T \int_0^l -mH_u^T H_u dx + \dot{d}^T \int_0^l 2\Omega mH_u^T H_v dx + d^T \int_0^l \Omega mH_u^T H_u dx + d^T \int_0^l EAB_u^T B_u dx = -d^T \int_0^l \Omega m x H_u^T dx \quad (28)$$

$$\ddot{d}^T \int_0^l mH_v^T H_v dx + \dot{d}^T \int_0^l 2\Omega mH_v^T H_u dx - d^T \int_0^l \Omega^2 mH_v^T H_v dx + d^T \int_0^l EI_z N_v^T N_v dx - d^T \int_0^l 0.5m\Omega^2(L^2 - x^2) B_v^T B_v dx - d^T \int_0^l m\Omega^2(L-x)H_v^T B_v dx = 0 \quad (29)$$

حال با فرض $N = \frac{dB}{dx}$ و $B = \frac{dH}{dx}$ و تعریف تغییر شکل محوری $u_x = u$ ، تغییر شکل عمود بر صفحه چرخش $u_y = v$ تغییر شکل در جهت فلپ $u_z = w$ و پیچش $\theta_x = \beta$ ماتریس‌های سازه برای دسته معادلات (۲۳) بدست می‌آید.

۴- مدل آبرو الاستیسیته خطی پره با لحاظ عبارت افزایش طول

بدین منظور معادلات حرکت را ساده کرده و فقط عبارات خطی را در نظر می‌گیریم:

$$m \left(\frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \Omega s(x, t) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \right) = \rho A \Omega^2 (r+x) + f_s \quad (24)$$

$$m \left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} - \Omega^2 v(x, t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega^2 \rho A \left(r(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right] = f_v \quad (25)$$

¹ Lead-lag

² Flap-wise

مرجع [۱۰] و مقادیر استخراج شده از روش مودال بسیار نزدیک است، شکل ۴ و جدول ۲.

جدول ۲ چهار فرکانس طبیعی اول پره [۱۰]

Rotating speed (rad/s)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\Omega = 0$	8.67066	54.3381	152.148	298.152
$\Omega = 0$ (226)	8.672	54.35	152.2	298.2
$\Omega = 30$ (No length increase)	45.306	149.162	296.639	491.957
$\Omega = 30$ (length increase)	23.5176	120.596	235.906	389.064
$\Omega = 30$ (10)	34.03	95.84	200.5	351.5

مقایسه فرکانس طبیعی در سرعت چرخشی 30 rad/s نشان می‌دهد که سیستم در دو حالت لحاظ افزایش طول، و عدم افزایش طول مقادیر فرکانس طبیعی‌های مختلفی را نشان می‌دهد. در مد اول، در حالت بدون افزایش طول، اختلاف با مقدار ذکر شده در مرجع $33\%+$ و در حالت با افزایش طول، اختلاف با مقدار مرجع $31\%-$ است. در مدهای دیگر نیز اختلاف بین مقادیر فرکانس طبیعی وجود دارد.

مقادیر فرکانس مود اول و دوم ارتعاش محوری به روش جداسازی متغیر عبارت است از:

$$\omega_{nA} = \frac{(2n-1)\pi c}{2L}, n = 1, 2, \dots \quad (33)$$

که در این معادله $C = \sqrt{E/\rho}$. بنابراین مقادیر دو فرکانس طبیعی اول تیر بدون چرخش به ترتیب برابر 823 rad/s و 2471 rad/s است. این دو مقدار با مقادیر گزارش شده در مرجع [۱۱] مطابقت دارد. در صحت سنجی دیگر، کوپل مدهای عرضی و طولی با استفاده از پارامترهای مرجع [۱۱] به شرح جدول ۳ بررسی شده‌اند.

$$\begin{aligned} \ddot{d}^T \int_0^l m H_w^T H_w dx + d^T \int_0^l EI_y N_w^T N_w dx \\ - d^T \int_0^l 0.5m(L^2 \\ - x^2) B_w^T B_w dx \\ - d^T \int_0^l m(L-x) H_w^T B_w dx \\ = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \ddot{d}^T \int_0^l -m(K_{m2}^2 - K_{m1}^2) H_\beta^T H_\beta dx \\ - d^T \int_0^l m(K_{m2}^2 \\ - K_{m1}^2) H_u^T H_v dx \\ + d^T \int_0^l GJB_\beta^T B_\beta dx = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

با اعمال آبرودینامیک مورد استفاده بر روی پره بر اساس آبرودینامیک ناپایای تلفیق شده با BEM، مرجع [۸]، معادلات آبروالاستیسیته حاصل می‌شود.

۵- اعتبار سنجی و حل عددی معادلات الاستیسیته

مشخصات پره مورد بررسی از مرجع [۱۰] در نظر گرفته شده است. در این بخش ابتدا فرکانس و شکل مدهای عرضی به کمک روش المان محدود بدست می‌آیند. مشخصات پره در جدول ۱ آورده شده است.

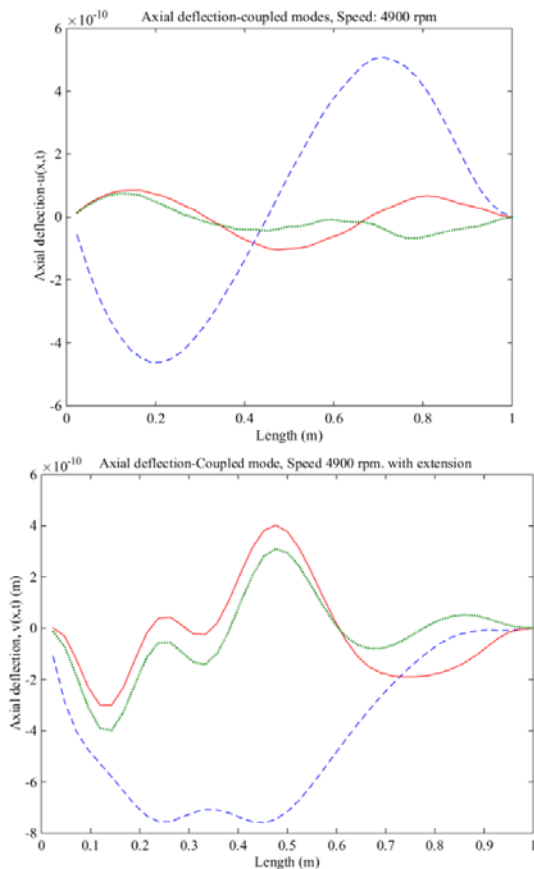
جدول ۱ مشخصات ایرفویل چرخان [۱۰]

$EI = 3.99 \times 10^5 \text{ Nm}^2$	$M = 10 \text{ kg/m}$
$EA = 2.23 \times 10^8 \text{ N}$	$L = 9 \text{ m}$
$\Omega = 30 \text{ rad/s}$	$A = 0.146 \times 0.146 \text{ m}^2$

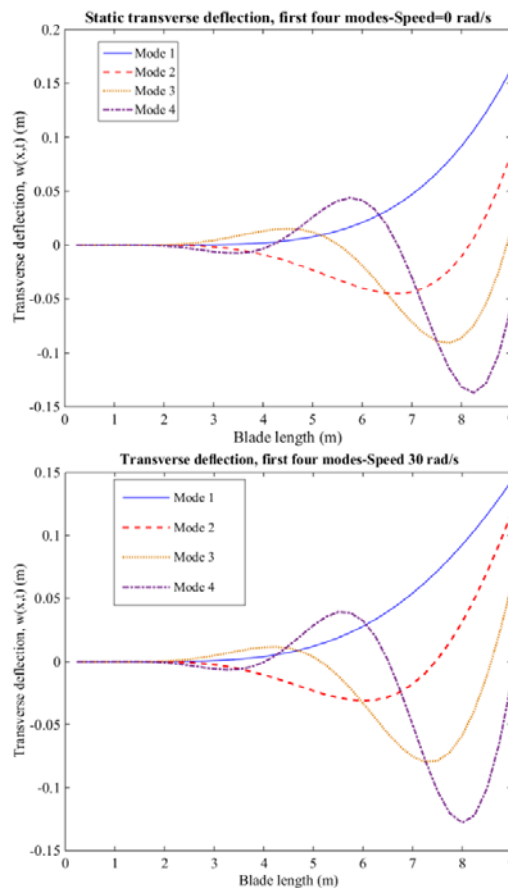
فرکانس طبیعی ارتعاش عرضی تیر از تابع مشخصه حاصل از جداسازی متغیرها به شرح زیر قابل استخراج است.

$$\omega_{nT} = (\lambda_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, n = 1, 2, \dots \quad (32)$$

در این معادله λ از شرایط مرزی حاصل می‌شود. برای تیر یکسر گیردار $\lambda_n L \approx \frac{(2n-1)\pi}{2}$ است. بنابراین فرکانس ارتعاش عرضی برای سرعت چرخشی صفر به ترتیب برابر: $\omega_{1T} = 8.67 \text{ rad/s}$ ، $\omega_{2T} = 54.337 \text{ rad/s}$ ، $\omega_{3T} = 152.143 \text{ rad/s}$ ، $\omega_{4T} = 298.147 \text{ rad/s}$ است. حل معادلات برای سرعت چرخشی صفر نشان می‌دهد فرکانس طبیعی با در نظر گرفتن ۳۶ المان به مقدار بدست آمده در



شکل ۵ نمودار شکل مد محوری در سرعت صفر و 30 rad/s



شکل ۴ نمودار شکل مد عرضی در سرعت صفر و 30 rad/s

۶- بررسی اثر چرخش و افزایش طول بر فرکانس‌های طبیعی

در این بخش اثر سرعت چرخشی و همچنین تاثیر افزایش طول پره بر فرکانس‌های طبیعی بررسی می‌شود. ابتدا پره با طول یک متر و سپس پره با طول ۶۳ متر بررسی می‌شود. در بررسی اول، پره‌ای با طول یک متر با مشخصات جدول ۵ تا جدول ۷ در نظر گرفته شده است. جنس این پره از فیبر شیشه‌ای است.

جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی مد اول و دوم پره [۱۱]

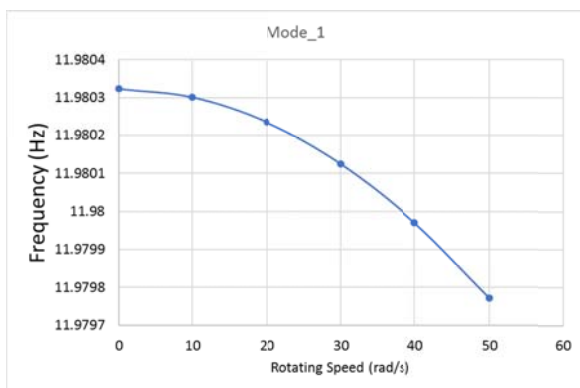
Rotating speed (rad/s)	ω_{1A}	ω_{2A}
$\Omega = 0$	22212	66643.244
$\Omega = 0$ ([227])	22212	66643.244
$\Omega = 4900$ (No length increase)	22567.156	68372.317
$\Omega = 4900$ (length increase)	22567.156	68372.317
$\Omega = 4900$ ([226])	22212	66643.244

مدهای اول در راستای محوری در سرعت چرخش 4900 rpm با و بدون در نظر گرفتن افزایش طول محوری در شکل ۵ نشان داده شده است.

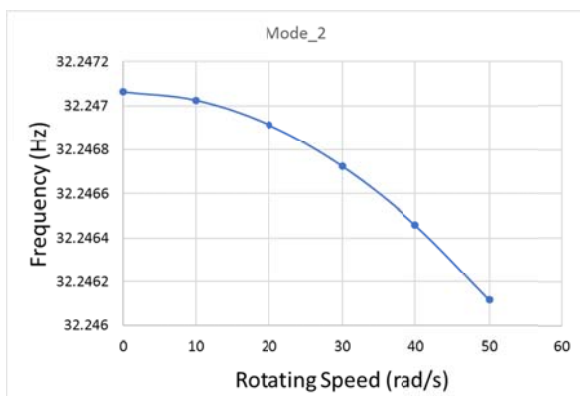
جدول ۳ مشخصات پره [۱۱]

$EI = 2 \times 10^6 \text{ Nm}^2$	$M = 10 \text{ kg/m}$
$EA = 2.4 \times 10^9 \text{ N}$	$L = 1 \text{ m}$
$\Omega = 4900 \text{ rad/s}$	$A = 0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$

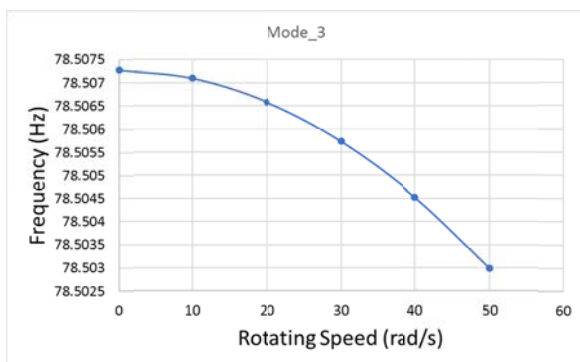
در جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی عرضی و محوری مرجع و روش توسعه یافته ارائه شده است. ملاحظه می‌شود در سرعت صفر، مقادیر حاصل از حل به روش المان محدود نزدیک به مقادیر مرجع [۱۱] است. مقادیر فرکانس‌های طبیعی به روش توسعه داده شده در این پژوهش در مد اول برابر 2.8%، در مد دوم برابر 4%، در مد سوم برابر 2.38% با مرجع اختلاف دارند. این اختلاف نشان دهنده صحت معادلات توسعه یافته و روش حل المان محدود است.



شکل ۶ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی مد اول با تغییر سرعت چرخشی پره



شکل ۷ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی مد دوم با تغییر سرعت چرخشی پره



شکل ۸ نمودار تغییرات فرکانس طبیعی مد سوم با تغییر سرعت چرخشی پره

در شکل ۱۰ درصد اختلاف ده فرکانس اول در دو سرعت صفر و 25rpm نمایش داده شده است. همانطور که در شکل نشان داده شده است، افزایش سرعت در فرکانس‌های بالاتر تاثیری ناچیز دارد. بنابراین چشم‌پوشی از اثر چرخش در پره‌های بلند نیز امکان‌پذیر است.

جدول ۵ مشخصات پره فیبر شیشه‌ای تقویت شده با

پلاستیک [۱۲]

مدول الاستیسیته	نسبت پواسون	چگالی
6 GPa	0.18	1400 kg/m ³

در شکل ۶ تا شکل ۸ تغییر فرکانس مدهای اول تا سوم ناشی از سرعت چرخشی نشان داده شده است. بطور کلی افزایش سرعت چرخشی پره موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

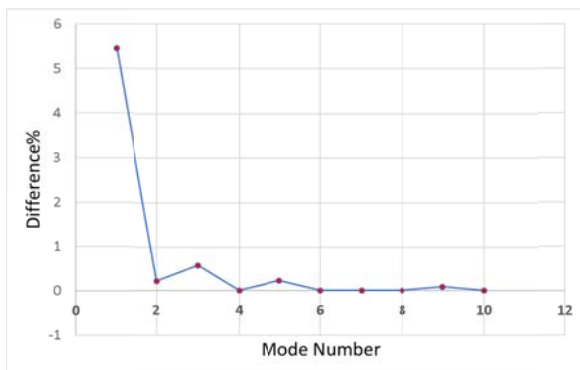
جدول ۶ مشخصات هندسی پره [۱۲]

شماره المان	طول هر المان (m)	مساحت هر المان (cm ²)	زاویه پیچش (درجه)	ممان اینرسی، I _{xx} (cm ⁴)
۱	0.12	8.365	0	11.137
۲	0.1	42.394	29.825	934.172
۳	0.1	30.701	15.891	504.374
۴	0.1	20.193	10.671	217.006
۵	0.1	13.745	7.379	99.700
۶	0.1	9.815	5.145	50.477
۷	0.1	7.311	3.539	27.863
۸	0.1	5.637	2.332	16.501
۹	0.1	4.470	1.393	10.349
۱۰	0.1	3.627	0.643	6.800

جدول ۷ مشخصات هندسی پره [۱۲]

شماره المان	ممان اینرسی، I _{yy} (cm ⁴)	ممان اینرسی، I _{zz} (cm ⁴)	ممان اینرسی، I _{yz} (cm ⁴)
۱	5.568	5.568	0
۲	196.041	738.131	339.058
۳	53.747	450.626	130.524
۴	13.286	203.719	38.015
۵	4.206	95.493	11.849
۶	1.944	48.533	5.248
۷	1.071	26.792	2.661
۸	0.457	16.044	0.519
۹	0.278	10.071	0.159
۱۰	0.181	6.619	0.0178

از شکل ۶ تا شکل ۸ مشاهده می‌شود که اختلاف مقدار فرکانس طبیعی بین سرعت صفر تا 50 rad/sec کمتر از 0.33% است. در شکل ۹ انحراف از معیار فرکانس‌های طبیعی اول تا ششم برای سرعت چرخشی تا 50 rad/sec نمایش داده شده است. ملاحظه می‌شود انحراف معیار این فرکانس‌ها کمتر از 0.01 است. از اینرو در پره با طول کم، تاثیر چرخش پره قابل چشم‌پوشی است.



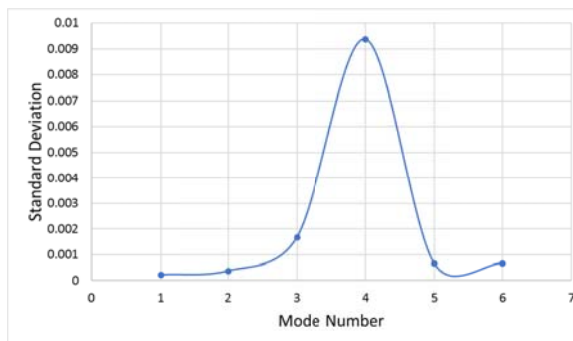
شکل ۱۲ نمودار درصد اختلاف فرکانس طبیعی با و بدون لحاظ افزایش طول، توربین باد 5MW-NREL.

در شکل ۱۲ تاثیر در نظر گرفتن افزایش طول پره بر فرکانس‌های طبیعی سیستم در توربین 5MW NREL نشان داده شده است. شکل ۱۲ نشان می‌دهد تاثیر لحاظ افزایش طول بر فرکانس طبیعی پره بسیار ناچیز، حداکثر برابر 0.016% است. در نتیجه در روند حل دینامیکی معادلات اثر افزایش طول قابل صرفنظر است.

در پره بلند اثر افزایش طول بر فرکانس‌های طبیعی بیشتر از پره کوتاه است. بیشترین تاثیر افزایش طول بر مد اول دارای اختلاف 5% است. در مدهای دوم به بعد اثر افزایش طول به کمتر از یک درصد می‌رسد. بنابراین در حل دینامیکی سیستم پره، صرفنظر از اثر افزایش طول پره با در نظر گرفتن اثر مد اول امکان‌پذیر است.

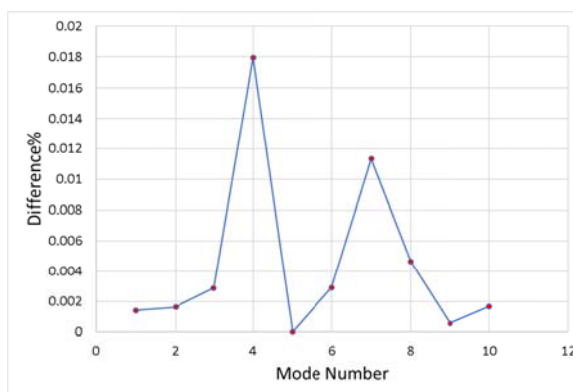
۷- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این پژوهش معادلات آیرودالاستیسیته پره به روش المان محدود استخراج شده است. تناسب این دسته معادلات با نیروهای آیرودینامیکی حاصل از روش BEM دلیل اصلی رویکرد المان محدود بوده است. به منظور استخراج معادلات، ابتدا انرژی جنبشی با تعیین بردار جابجایی نقطه‌ای دلخواه از پره محاسبه شد. در این دسته معادلات درجه آزادی چرخش حول محور طولی هم در نظر گرفته شده است. سپس انرژی پتانسیل با روش تانسور گرین-لاگرانژ بدست آمد. با در نظر گرفتن نیروهای آیرودینامیکی به عنوان نیروهای ناپایستار و اعمال همیلتونین معادلات حرکت بدست می‌آید. در این پژوهش معادلات حرکت خطی به همراه عبارات چرخش پره و همچنین افزایش طول پره در نظر گرفته شده‌اند. شبیه سازی دو مدل پره نشان می‌دهد معادلات حرکت المان محدود بدست آمده به خوبی مدهای پره را پیش بینی می‌کند. شبیه سازی پره کوتاه و بلند کامپوزیتی و

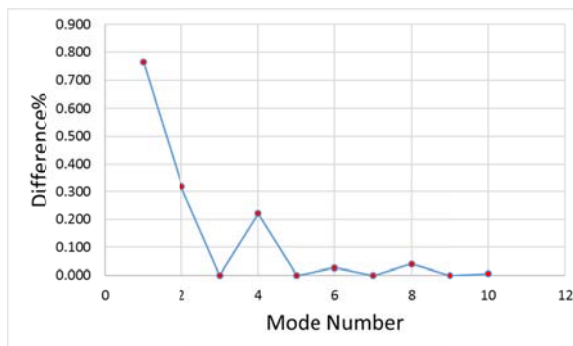


شکل ۹ نمودار انحراف معیار فرکانس‌های طبیعی اول تا ششم برای سرعت صفر تا 10rad/sec.

جهت بررسی اثر چرخش بر پره با طول زیاد، پره پیشنهادی در توربین انتزاعی 5MW NREL در نظر گرفته شده است. از شکل ۱۱ مشاهده می‌شود حداکثر اختلاف لحاظ و عدم لحاظ چرخش برابر 0.8% است. این مقدار اختلاف در فرکانس اول ایجاد شده است. این مقدار در فرکانس‌های بعدی بسیار کمتر است.



شکل ۱۰ نمودار درصد اختلاف فرکانس طبیعی با و بدون لحاظ افزایش طول، توربین باد با پره کوتاه.



شکل ۱۱ نمودار درصد اختلاف فرکانس طبیعی در سرعت چرخش پره صفر و 25rpm.

۹- مراجع و منابع

- [1] Hodges DH, Dowell EH. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. (NASA technical note D7818). 1974.
- [2] Da Silva MRMC. Non-linear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams. Formulation. Int J Solids Struct 1988;24:1225e34.
- [3] Rezaei, M. M., Behzad, M., Haddadpour, H., & Moradi, H. (2015). Development of a reduced order model for nonlinear analysis of the wind turbine blade dynamics. Renewable Energy, 76, 264-282. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2014.11.021>.
- [4] Rezaei, M. M., Zohoor, H., & Haddadpour, H. (2018). Aeroelastic modeling and dynamic analysis of a wind turbine rotor by considering geometric nonlinearities. Journal of Sound and Vibration, 432, 653-679. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.06.063>.
- [5] J. Chung and H. H. Yoo. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. Journal of Sound and Vibration, 249(1):147-164, 2002.
- [6] Cook R.D., Malkus D. S., (2002). Concepts and Applications of Finite Element Analysis. ISBN 978-0-471-35605-9. JOHN WILEY & SONS, INC.
- [7] Shams, S., Esbati Lavasani, R. Aeroelastic stability analysis of a wind turbine blade section with trailing edge flap using a flexible unsteady blade elements momentum theory. J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 41, 324 (2019). <https://doi.org/10.1007/s40430-019-1789-5>.
- [8] Shams S, Esbati Lavasani R. Derivation and Aeroelastic Analysis of a Rotating Airfoil Using Unsteady Loewy Aerodynamic and Flutter Suppression by PID Controller. Modares Mechanical Engineering. 2019; 19 (6) :1347-1354.
- [9] Shaw, S. W. (2002). Modal Reduction of a Nonlinear Rotating Beam Through Nonlinear, 124(April). <http://doi.org/10.1115/1.1426071>.
- [10] <https://wwindea.org/blog/2019/02/25/wind-power-capacity-worldwide-reaches-600-gw-539-gw-added-in-2018>.
- [11] Petrovi, V. (2015). Advanced control algorithms for reduction of wind turbine structural loads, 76, 418-431.
- [12] Habali, S. M., & Saleh, I. A. (2000). Local design, testing and manufacturing of small mixed airfoil wind turbine blades of glass fiber reinforced plastics Part I: Design of the blade and root, 41.
- [13] Esbati Lavasani R., Shams S., A New Dynamic Stall Approach for Investigating Bifurcation and Chaos in Aeroelastic Response of a Blade Section with Flap Free-Play Section.(2020). IJBC.
- [14] Marco António Costa Fonseca Lima. (2012). Rotating Cantilever Beams: Finite Element Modeling and Vibration Analysis. URI: <https://hdl.handle.net/10216/68449>

استفاده از درصد اختلاف و انحراف از معیار فرکانس‌های طبیعی نشان می‌دهد که تاثیر چرخش و افزایش طول در مدهای اول و دوم پره بلند حداکثر پنج درصد است. اما در پره کوتاه اثر چرخش و افزایش طول بسیار ناچیز و قابل صرفنظر است.

۸- فهرست علائم

سطح مقطع پره	A
ماتریس میرایی	$[C_{st}]$
مدول الاستیسیته	E_1, E_2, E_3
نیروهای آبرودینامیکی	f_β, f_v, f_w
مدول برشی	G_{12}, G_{13}, G_{23}
ماتریس سختی	$[Q]$
طول پره	L
ماتریس جرم	$[M_{st}]$
انرژی پتانسیل	P.E
ماتریس سختی	$[Q]$
کار نیروهای ناپایستار	W
جابجایی گره‌ها	$U(t)$
محل قرار گیری المان	r
انرژی جنبشی	T.E
زمان	t
بردار سرعت مطلق	\vec{V}_p
بردار جابجایی	x, y, z
طول هر المان	x_j و x_i
علائم یونانی	
زاویه چرخش حول محور x	β
چگالی، kg/m^3	ρ
زاویه چرخش حول محور y	θ
بردار چرخش	$\vec{\Omega}_{xyz}$
لاگرانژین	\mathcal{L}
فرکانس طبیعی	ω
زیرنویس	
پلانچ	h
زاویه گام	θ