دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

تمامیت در فضاهای متری احتمالاتی

دلاور وارسته تفتی[۱]، مهدی آژینی[۲*]

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی محض (آنالیز)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران.
(۲) استادیار، گروه ریاضی محض (آنالیز)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۲/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۱۷

چکیده

ایده فضاهای متری احتمالاتی اولین بار توسط کارل منجر مطرح شد و اثبات شد که فضاهای متری احتمالاتی تعمیمی از فضاهای متریک می‌باشند. بنابراین در این مقاله بعضی ویژگی‌ها و قضایا و نتایج مهم که در فضاهای متریک برقرار می‌باشند را در فضاهای متری احتمالاتی اثبات می‌کنیم. در ابتدای مقاله، توابع توزیع فاصله از دیدگاه کارل منجر مطرح می‌شود. این دسته توابع در تعریف فضاهای متری احتمالاتی نقش اساسی دارند. سپس تابع دیراک به عنوان یک مثال مهم از توابع توزیع فاصله، مطرح شده است. بعد از آن روی مجموعه‌ی توابع توزیع فاصله ،متر سیبلای یا لوی معرفی شده است و لذا این مجموعه تبدیل به یک فضای متریک می‌شود. در ادامه فضاهای متری احتمالاتی از دیدگاه شرسنف تعریف می‌شود و چند مثال از جمله فضاهای متری احتمالاتی منجر مطرح می‌شود. همچنین توپولوژی قوی القا شده توسط توابع توزیع فاصله معرفی می‌شود و بعد از آن قطر احتمالاتی، مجموعه‌های کراندار، نیم کراندار، بی‌کران و تماماً کراندار احتمالاتی مطرح می‌شوند. در این مقاله اثبات می‌کنیم در هر فضای متری احتمالاتی، هر مجموعه‌ی تماماً کراندار احتمالاتی، کراندار احتمالاتی است. قضیه‌ی اشتراکی کانتور در فضاهای متری احتمالاتی تام، مطرح و اثبات می‌شود و نتایج آن را ارائه می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم در هر فضای متری احتمالاتی خاصیت بولزانو–وایراشتراس و هاینه–بورل هم ارز یکدیگرند.

واژه‌های کلیدی: توپولوژی قوی، تابع مثلثی، قضیه اشتراکی کانتور، قضیه بئر.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.azhini@srbiau.ac.ir

۱. مقدمه

فضای متری احتمالاتی ابتدا توسط منجر معرفی شد [1-3]. ایده‌ی منجر، استفاده از توابع توزیع به جای اعداد حقیقی نامنفی به‌عنوان مقادیر متریک بود. در حقیقت وی در شرایطی که دقیقاً فاصله‌ی بین دو نقطه مشخص نبود احتمال مقادیر ممکن برای این فاصله‌ها را به عنوان مقدار متریک معرفی کرد. این فضاها توسط ریاضی دانان دیگری نیز مورد مطالعه قرار گرفت [4-8]. برای آگاهی از جزئیات تاریخی و انگیزه‌هایی که برای معرفی فضای متری احتمالاتی وجود داشت، می‌توان به کتاب فضاهای متری احتمالاتی شوایزر و اسکلار مراجعه کرد [9].

تعریف ۱،۱. تابع $F:[-\infty,+\infty]\to[0,1]$ یک تابع توزیع فاصله روی $[-\infty,+\infty]$ است هرگاه F روی $[-\infty,+\infty)$ از چپ پیوسته و روی $\mathbb{R}=[-\infty,+\infty]$ غیرکاهشی باشد و $F(-\infty)=0$ و $F(+\infty)=1$.

مثال ۲،۱. تابع توزیع دیراک $H_a:[-\infty,+\infty]\to[0,1]$ است که برای هر $a\in[-\infty,+\infty)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_a(x)=\begin{cases}0 & x\in[-\infty,a]\\ 1 & x\in(a,+\infty]\end{cases},$$

و برای $a=+\infty$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H_\infty(x)=\begin{cases}0 & x\in[-\infty,+\infty)\\ 1 & x=+\infty\end{cases}.$$

تعریف ۳،۱. هرگاه Δ مجموعه تمام توابع توزیع فاصله باشند آنگاه Δ^+ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta^+=\{F\in\Delta: F(0)=0\}$$

تعریف ۴،۱. فرض کنید $F,G\in\Delta$. گوئیم $F\le G$ اگر و تنها اگر به ازای هر $t\in[+\infty,-\infty]$، $F(t)\le G(t)$.

تعریف ۵،۱. فرض کنید F و G دو تابع توزیع فاصله باشند و $h\in(0,1]$. گوئیم F و G دارای خاصیت $(F,G:h)$ است هرگاه به ازای هر $x\in\left(-\frac{1}{h},\frac{1}{h}\right)$ داشته باشیم:

$$F(x-h)-h\le G(x)\le F(x+h)+h$$

مترسیبلی یا لوی را با نماد d_L یا d_S نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_L(F,G)=inf\left\{h\in(0,1]\;\middle|\;\text{برقرار باشند}(G,F;h),(F,G;h)\right\}$$

قضیه ۶،۱ [9]. الف) تابع d_L یک متر روی Δ^+ است.
ب) اگر $F,G\in\Delta^+$ و $F\le G$ آنگاه

$$d_L(G;H_0)\le d_L(F;H_0).$$

تعریف ۷،۱ [9]. دنباله $\{F_n\}$ در Δ را همگرای ضعیف به تابع $F\in\Delta$ گویند و با نماد $F_n\xrightarrow{w}F$ نمایش می‌دهند، هرگاه به ازای هر $x\in(-\infty,+\infty)$ که F در x پیوسته باشد. دنباله $\{F_n(x)\}$ همگرا به $F(x)$ باشد.

قضیه ۸،۱ [9]. فرض کنید $\{F_n\}$ دنباله ای از اعضای Δ^+ باشد. در این صورت $\{F_n\}$ به طور ضعیف همگرا به F است اگر و تنها اگر وقتی n به سمت ∞ میل می‌کند، $d_L(F_n,F)$ به صفر همگرا باشد.

قضیه ۹،۱[9]. (Δ^+,d_L) یک فضای متری فشرده و لذا تام می‌باشد.

قضیه ۱۰،۱[9]. الف)فرض کنید $h\in(0,1]$ باشد، برای هر $F\in\Delta^+$ داریم:

$$d_L(F,G)=inf\{h\in(0,1]\,|\,\text{برقرار باشند}(G,H_0;h)\}$$

ب) برای هر $t>0$ داریم:

$$F(t)>1-t\iff d_L(F,H_0)<t.$$

تعریف ۱۱،۱. عمل دوتایی $\tau: \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ را یک تابع مثلثی گویند هرگاه τ دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱) جابه جایی باشد، بدین معنی که به ازای هر $F, G \in \Delta^+$: $\tau(F,G) = \tau(G,F)$

۲) شرکت پذیر باشد،
بدین معنی که به ازای هر $F,G,H \in \Delta^+$:
$\tau(F,\tau(G,H)) = \tau(\tau(F,G),H)$.

۳) غیرکاهشی باشد، بدین معنی که به ازای هر $F,G,H,K \in \Delta^+$ اگر $F \le G$, $H \le K$ انگاه
$\tau(F,H) \le \tau(G,K)$.

۴) دارای عضو همانی H_0 باشد، بدین معنی که به ازای هر $F \in \Delta^+$: $\tau(F,H_0) = F$.

تعریف ۱۲،۱. هرگاه τ_1, τ_2 توابع مثلثی باشند، گوئیم τ_1 ضعیف‌تر از τ_2 (یا τ_2 قوی‌تر از τ_1) است و می‌نویسیم $\tau_1 \le \tau_2$، اگر برای $F,G \in \Delta^+$ و هر $x \in \mathbb{R}^+$ داشته باشیم.

$\tau_1(F,G)(x) \le \tau_2(F,G)(x)$

تعریف ۱۳،۱. عمل دوتایی $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ را یک t – نرم گویند هرگاه دارای چهار ویژگی زیر باشد:

الف) جابه جایی باشد؛ یعنی به ازای هر $x,y \in [0,1]$ داشته باشیم:. $T(x,y) = T(x,y)$

ب) شرکت‌پذیر باشد؛ یعنی به ازای هر $x,y,z \in [0,1]$ داشته باشیم: $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

ج) کراندار باشد؛ یعنی، به ازای هر $x \in [0,1]$ داشته باشیم: $T(x,1) = x$

د) یکنواخت باشد؛ یعنی به ازای هر $x,y,z \in [0,1]$ که $y \le z$ داشته باشیم $T(x,y) \le T(x,z)$.

۲- فضاهای متری احتمالاتی

تعریف ۲-۱. یک فضای متری احتمالاتی از دیدگاه شرسنف سه تایی $(S,\mathcal{F},\tau)$ می‌باشد که S یک مجموعه ناتهی و τ یک تابع مثلثی و $\mathcal{F}$ تابعی از $S \times S$ به توی Δ^+ که برای هر $r,p,q \in S$ دارای شرایط زیر می‌باشد.

1) $\mathcal{F}(p,p) = H_0$

2) اگر $p \ne q$ آنگاه $\mathcal{F}(p,q) \ne H_0$

3) $\mathcal{F}(p,q) = \mathcal{F}(q,p)$

4) $\mathcal{F}(p,r) \ge \tau(\mathcal{F}(p,q),\mathcal{F}(q,r))$.

مثال۲-۲. هرگاه $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی شرسنف باشد و $\tau = \tau_T$ که

$$\tau_T(F,G)(x) = sup\{T(F(u),G(v)) | u+v=x\}$$

(برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $F\,,G \in \Delta^+$ و t- نرم T)

می‌باشد. آنگاه $(S,\mathcal{F},\tau)$ را فضای منجر و با نماد $(S,\mathcal{F},T)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۲-۳[10]. هرگاه M یک مجموعه ناتهی باشد سه تایی $(M,\mathcal{F},\tau_T)$ که برای هر $p\,,q \in M$: $\mathcal{F}(p,q) = H_{d(p,q)}$ یک فضای منجر است اگر و تنها اگر (M,d) که $d: M \times M \to [0\,,+\infty)$ یک متر روی M است، فضای متری باشد.

روی فضاهای متری احتمالاتی شرسنف توپولوژی‌های متنوعی تعریف می‌شود [9]. یکی از این توپولوژی‌ها که در این مقاله از ان استفاده می‌شود توپولوژی قوی می‌باشد.

تعریف۲-۴. فرض کنید $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی باشد. برای $p \in S$ و $\varepsilon > 0$ یک ε-همسایگی قوی p به صورت $N_p(\varepsilon) = \{q \in S | F_{p,q}(\varepsilon) > 1-\varepsilon\}$ تعریف می‌شود. در حالتی که $\varepsilon = 1$ آنگاه $N_p(\varepsilon) = S$.

تعریف۲-۵. فرض کنید $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی باشد. یک سیستم همسایگی قوی در p به صورت $N_p = \{N_p(\varepsilon) | \varepsilon > 0\}$ تعریف می‌شود. در نتیجه یک سیستم قوی برای S به‌صورت $\aleph = \cup_{p \in S} N_p$ تعریف می‌شود.

قضیه ۲-۶[9]. فرض کنید $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی باشد. اگر τ پیوسته باشد سیستم همسایگی قوی $\aleph$ یک توپولوژی هاسدورف روی S تعریف می‌کند.

تعریف ۲-۷. فرض کنید $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی باشد.
$p\in S$ و $\varepsilon>0$ و $0<\lambda<1$ یک (ε,λ) – همسایگی با نماد $N_p(\varepsilon,\lambda)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود $N_p(\varepsilon,\lambda)=\{q\in S|F_{p,q}(\varepsilon)>1-\lambda\}$.

تعریف ۲-۸. فرض کنید $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی باشد. یک (ε,λ)- توپولوژی روی$(S,\mathcal{F},\tau)$، توپولوژی است که پایه آن گردایه (ε,λ)- همسایگی‌های نقاط S به صورت $\{N_p(\varepsilon,\lambda)\}_{\substack{p\in S\\ \varepsilon>0\\ 0<\lambda<1}}$ می‌باشد.

قضیه ۲-۹[10]. هرگاه $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی باشد سیستم همسایگی قوی و سیستم (ε,λ)- همسایگی هم ارزند و لذا هر دو سیستم همسایگی یک توپولوژی القا می‌کنند. بنابراین

۱) دنباله‌ی $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$ نسبت به (ε,λ)- توپولوژی همگرا به $p\in S$ نامند هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ و هر $\lambda\in(0,1)$ وجود داشته باشد $n_\circ(\varepsilon,\lambda)\in\mathbb{N}$ به قسمی که برای هر $n\geq n_\circ(\varepsilon,\lambda)$ داشته باشیم $F_{p_n,p}(\varepsilon)>1-\lambda$.

۲) دنباله‌ی $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$ کشی نامند هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$ و هر $\lambda\in(0,1)$ وجود داشته باشد $n_\circ(\varepsilon,\lambda)\in\mathbb{N}$ به قسمی که برای هر $m,n\geq n_\circ(\varepsilon,\lambda)$ داشته باشیم $F_{p_n,p_m}(\varepsilon)>1-\lambda$.

قضیه ۲-۱۰[9]. هرگاه $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی باشد. دنباله‌ی $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$ به یک عضو $p\in S$ همگراست اگر و تنها اگر $d_L(F_{p_n,p},H_\circ)\to 0$ وقتی $n\to\infty$.

به طور مشابه دنباله‌ی $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq S$ کشی است اگر و تنها اگر $d_L(F_{p_n,p_m},H_\circ)\to 0$ وقتی $m,n\to\infty$.

۳- تمامیت در فضاهای متری احتمالاتی

تعریف ۱،۳. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی از فضای متری احتمالاتی $(S,\mathcal{F},\tau)$ باشد. قطر احتمالاتی A که با نماد D_A نمایانده می‌شود تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D:[0,+\infty]\to\mathbb{R}$$
$$D_A(x)=\begin{cases} sup_{t<x}\left(inf_{p,q\in A}F_{p,q}(t)\right) & x\geq 0\\ 1 & x=+\infty\end{cases}$$

تعریف ۲،۳. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی از فضای متری احتمالاتی $(S,\mathcal{F},\tau)$باشد.

۱) اگر $sup_{x\geq 0}D_A(x)=1$ آنگاه A را کراندار احتمالاتی گویند.

۲) اگر $0<sup_{x\geq 0}D_A(x)<1$ آنگاه A را نیم کراندار احتمالاتی گویند.

۳) اگر $D_A(x)=0$ آنگاه A را بی کران احتمالاتی گویند.

تعریف ۳،۳. فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای متری احتمالاتی $(S,\mathcal{F},\tau)$ باشد و $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌ها باشد به‌طوری که $A\subset\bigcup_{\alpha\in I}V_\alpha$ را یک پوشش A نامیده می‌شود و گفته می‌شود A توسط V_αها پوشیده می‌شود. A تماماً کراندار احتمالاتی نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon>0$، A را بتوان توسط تعداد متناهی از همسایگی‌های قوی $N_p(\varepsilon)$ که $p\in A$ پوشاند یا به ازای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشند نقاط $p_1,\dots,p_n\in A$ به طوریکه برای هر $i\in\{1,2,\dots,n\}$ داشته باشیم $F_{p_i,p}(\varepsilon)=1$ (مراجعه شود به[12],[11]).

قضیه ۴،۳ [9]. فرض کنید A یک زیرمجموعه ناتهی از فضای متری احتمالاتی $(S,\mathcal{F},\tau)$ باشد. τ تابع مثلثی

پیوسته می‌باشد. قطر احتمالاتی D_A دارای ویژگی‌های زیر است.

۱) تابع D_A یک تابع توزیع فاصله می‌باشد.

۲) A یک مجموعه تک عضوی می‌باشد اگر و تنها اگر $D_A = H_0$.

۳) اگر $A \subseteq B \subseteq S$ باشد آنگاه $D_A \geq D_B$ می‌باشد.

۴) به ازای هر $p, q \in A$ داریم $F_{p,q} \geq D_A$.

۵) اگر $A = \{p, q\}$ باشد آنگاه $D_A = F_{p,q}$ می‌باشد.

۶) اگر $A \cap B \neq \emptyset$ باشد آنگاه $D_{A\cup B} \geq \tau(D_A, D_B)$ می‌باشد.

۷) هرگاه $\bar{A}$ بستار A در $(\varepsilon,\lambda)-$ توپولوژی روی S باشد آنگاه $D_A = D_{\bar{A}}$.

قضیه ۵،۳. در هر فضای متری احتمالاتی، هر مجموعه تماماً کراندار احتمالاتی، کراندار احتمالاتی است.

اثبات: فرض کنید A یک زیرمجموعه تماماً کراندار از فضای متری احتمالاتی $(S, \mathcal{F}, \tau)$ باشد. بنابراین طبق تعریف تماماً کرانداری، برای هر $p \in A$ و هر $\varepsilon > 0$ وجود دارند $p_1, \dots, p_n \in A$ به قسمی که $F_{p_i,p}(\varepsilon) = 1$ که $i \in \{1,2, \dots, n\}$.

طبق تعریف برای هر $\varepsilon > 0$ و $p, q \in A$ داریم:

$1 = \tau(F_{p,p_i}(\varepsilon), F_{p_i,q}(\varepsilon)) \leq F_{p,q}(\varepsilon) \leq 1$.

بنابراین $F_{p,q}(\varepsilon) = 1$ لذا $sup_{\varepsilon>0}\left(inf_{p,q\in A}F_{p,q}(\varepsilon)\right) = 1$ برقرار می‌باشد پس A کراندار احتمالاتی می‌باشد.

قضیه ۶،۳ [13]. اگر $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله‌ی قویا کشی در فضای متری احتمالاتی $(S, \mathcal{F}, \tau)$ که τ یک تابع مثلثی پیوسته است، باشد و زیردنباله‌ای از آن مانند $\{p_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ به نقطه $p_0 \in S$ قویا همگرا باشد آن گاه دنباله $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ قویا همگرا به p_0 خواهد بود.

قضیه ۷،۳ (قضیه اشتراکی کانتور). فضای متری احتمالاتی $(S, \mathcal{F}, \tau)$ که τ یک تابع مثلثی پیوسته است، مفروض می‌باشد در این صورت S قویا تام است اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله‌ی نزولی از زیرمجموعه‌های قویا بسته S مانند $\{\mathrm{S_n}\}_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ به طوری که $\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{D_{S_n}} = \mathrm{H_0}$، مجموعه‌ی $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ دقیقا از یک نقطه تشکیل شده باشد.

اثبات: ابتدا فرض کنیم S قویا تام و $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله نزولی دلخواه از زیر مجموعه‌های قویا بسته S باشدکه $\lim_{n\to\infty} D_{S_n} = H_0$. در این برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $0 < \lambda < 1$ وجود دارد یک عدد طبیعی $n_\circ(\varepsilon,\lambda)$ به قسمی که برای هر $n \geq n_\circ(\varepsilon,\lambda)$ داریم $D_{S_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda$. حال دنباله $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را به گونه‌ای تشکیل می‌دهیم که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $p_n \in S_n$. بنابراین اگر $m > n > n_\circ(\varepsilon,\lambda)$ باشد آنگاه $p_m \in S_m \subseteq S_n$ و طبق قضیه ۴،۳ (۴) داریم $F_{p_n,p_m}(\varepsilon) \geq D_{S_n}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ و چون ε و λ دلخواه بودند لذا دنباله $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله قویا کشی در فضای متری احتمالاتی $(S, \mathcal{F}, \tau)$ می‌باشد و چون $(S, \mathcal{F}, \tau)$ یک فضای متری احتمالاتی قویا تام است لذا دنباله $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به $p_0 \in S$ قویا همگرا می‌باشد. از طرفی چون S_n قویا بسته است لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $p_0 \in \mathrm{S}_n$. حال فرض کنیم p_0 یکتا نباشد پس وجود دارد $q_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. اگر قضیه۴،۳ (۴) را به کار ببریم داریم $F_{p_0,q_0} \geq D_{S_n}$ و چون $\lim_{n\to\infty} D_{S_n} = H_0$ لذا به ازای هر $\varepsilon > 0$ داریم $F_{p_0,q_0}(\varepsilon) = 1$ و لذا $p_0 = q_0$. برعکس فرض کنیم به ازای هر دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های قویا بسته S مانند $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به طوری که $\lim_{n\to\infty} D_{S_n} = H_0$ و مجموعه $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ دقیقا از یک نقطه تشکیل شده باشد و فرض کنیم $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله‌ی قویا کشی دلخواه در فضای متری احتمالاتی $(S, \mathcal{F}, \tau)$ باشد. فرض کنیم $S_n = \overline{\{p_n, p_{n+1}, \dots\}}$ که $n \in \mathbb{N}$. در این صورت هر S_n یک زیرمجموعه ناتهی و کراندار احتمالاتی از S می‌باشند. همچنین $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های S می‌باشد. بنابراین طبق قضیه‌ی ۴،۳ (۳) دنباله $\{D_{S_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک دنباله‌ی نزولی است که $\lim_{n\to\infty} D_{S_n} = H_0$ و لذا طبق فرض وجود دارد نقطه یکتای $p_0 \in S$ به قسمی که $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{p_0\}$. بنابراین وجود دارد یک زیردنباله‌ی $\{p_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ به قسمی که به p_0 قویا همگرا است. پس طبق قضیه ۶،۳

حکم برقرار می‌باشد.

قضیه ۸،۳ (قضیه رسته بئر). فرض کنیم $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی تام و τ یک تابع مثلثی پیوسته باشد و $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های قویا باز و چگال در S باشند. در این صورت $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ تهی نیست و در واقع این مجموعه در S چگال است.

اثبات: G_1 در S قویا چگال است لذا G_1 ناتهی می‌باشد و لذا $p_1 \in G_1$. چون G_1 قویا باز است پس وجود دارد $r > 0$ به قسمی که $\mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r}) \subseteq G_1$. ابتدا ثابت می‌کنیم $\overline{N_{p_1}}(r_1) \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r})$ که $0 < r_1 < \frac{r}{2}$.
فرض کنیم p عضو دلخواهی از $\overline{N_{p_1}}(r_1)$ باشد. در این صورت وجود دارد دنباله‌ی $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $\mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(r_1)$ به قسمی که به p قویا همگراست. بنابراین

$$\forall\alpha > 0 \quad \exists n_0(\alpha) \ \ \forall \mathrm{n} > n_0(\alpha) \ : \ d_L(F_{p_n,p}, H_0) < \alpha$$

از طرفی طبق قضیه ۹،۱ فضای متریک (Δ^+, d_L) قویا فشرده است و چون τ روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ به طور یکنواخت پیوسته می‌باشد و $\tau(H_0, F_{p_n,p_1}) = F_{p_n,p_1}$ برقرار می‌باشد داریم

$$\forall\alpha > 0 \quad \exists\delta > 0 \ ; \ d_L(F_{p_n,p}, H_0) < \delta \Longrightarrow d_L(\tau(F_{p_n,p}, F_{p_n,p_1}), F_{p_n,p_1}) < \varepsilon$$

طبق قضیه ۶،۱ (ب) داریم:

$$d_L(F_{p_n,p}, H_0) \le d_L(\tau(F_{p_n,p}, F_{p_n,p_1}), H_0)$$

حال اگر در بحث بالا $\alpha = \delta$ فرض کنیم چون طبق قضیه ۶،۱ (الف) d_L یک متر روی Δ^+ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
d_L(F_{p_n,p}, H_0) &\le d_L(\tau(F_{p_n,p}, F_{p_n,p_1}), H_0)\\
&\le d_L(\tau(F_{p_n,p}, F_{p_n,p_1}), F_{p_n,p_1}) + d_L(F_{p_n,p_1}, H_0)\\
&\le \varepsilon + d_L(F_{p_n,p_1}, H_0)
\end{aligned}$$

از طرفی چون $p_n \in \mathrm{N}_{\mathrm{p}}(r_1)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ لذا $d_L(F_{p_n,p_1}, H_0) < r_1$. حال اگر $d_L(F_{p_n,p_1}, H_0)$ $\varepsilon = r_1 -$ در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned}
d_L(F_{p,p_1}, H_0) &\le \varepsilon + d_L(F_{p_n,p_1}, H_0)\\
d_L(F_{p_n,p_1}, H_0) &+ d_L(F_{p_n,p_1}, H_0) = r_1 -\\
&= r_1 < r.
\end{aligned}$$

بنابراین $p \in \mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r})$ پس $\overline{N_{p_1}}(r_1) \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r})$.
از طرفی $\mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r})$ یک مجموعه قویا باز در S است. زیرا به ازای هر $q \in \mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r})$ داریم $d_L(F_{p_1,q}, H_0) <$ r پس $r - d_L(F_{p_1,q}, H_0) > 0$. τ روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ پیوسته است و چون فضای متریک (Δ^+, d_L) قویا فشرده می‌باشد لذا τ روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ پیوسته یکنواخت است پس

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\acute{r} > 0 \, , \forall \mathrm{G} \in \Delta^+; d_L(G, H_0) < \acute{r} \Longrightarrow d_L(\tau(F_{p_1,q}, G), \tau(F_{p_1,q}, H_0)) < \varepsilon$$

و چون $\tau(F_{p,q}, H_0) = F_{p,q}$ برقرار است داریم

$$d_L(\tau(F_{p_1,q}, G), F_{p_1,q}) < \varepsilon \ .$$

حال اگر عضو دلخواه S را در $\mathrm{N}_q(\acute{r})$ اختیار کنیم آن گاه $d_L(F_{q,s}, H_0) < \acute{r}$. از آنجا که $(S,\mathcal{F},\tau)$ یک فضای متری احتمالاتی است بنا به قضیه ۶،۱ (الف) داریم

$$\begin{aligned}
d_L(F_{p_1,s}, H_0) &\le d_L(\tau(F_{p_1,q}, F_{q,s}), H_0)\\
&\le d_L(\tau(F_{p_1,q}, F_{q,s}), F_{p_1,q}) + d_L(F_{p_1,q}, H_0).
\end{aligned}$$

حال اگر $\varepsilon = r - d_L(F_{p_1,q}, H_0)$ فرض کنیم آنگاه خواهیم داشت

$$d_L(F_{p_1,s}, H_0) \le r - d_L(F_{p_1,q}, H_0) + d_L(F_{p_1,q}, H_0) = r.$$

بنابراین $s \in \mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r})$ برقرار است یعنی ثابت کردیم به ازای هر $q \in \mathrm{N}_q(\mathrm{r})$ وجود دارد $\acute{r}$ به قسمی که $\mathrm{N}_p(\acute{r}\,) \subset \mathrm{N}_p(\mathrm{r})$ لذا هر نقطه $\mathrm{N}_p(\mathrm{r})$ یک نقطه درونی‌اش است پس $\mathrm{N}_p(\mathrm{r})$ قویا باز است. چون G_1 در S قویاً چگال است و $\mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r}_1)$ نیز S قویا باز است لذا $G_2 \cap \mathrm{N}_{\mathrm{p}_1}(\mathrm{r}_1)$ در S ناتهی می‌باشد و لذا می‌توان

p_2 در $G_2 \cap N_{p_1}(r_1)$ نظر گرفت. طبق قضیه، اشتراک دو مجموعه قویا باز، قویا باز است بنابراین وجود دارد $0 < r_2 < \frac{r_1}{2}$ به طوری که $\overline{N_{p_2}}(r_2) \subseteq N_{p_2}(r_1)$. با استقراء اگر $n \geq 2$ و r_{n-1}, p_{n-1} را اختیار می‌کنیم. چون G_n در S قویاً چگال است لذا $G_n \cap N_{p_{n-1}}(r_{n-1})$ ناتهی و قویاً باز در S است لذا می‌توان r_n, p_n را به گونه‌ای اختیار کرد که
$$\overline{N_{p_n}}(r_n) \subseteq G_n \cap N_{p_{n-1}}(r_{n-1}), 0 < r_n < \frac{r}{2^n}$$

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه ی $\overline{N_{p_n}}(r_n)$ ناتهی و قویاً بسته در S می‌باشند بنابراین $\{\overline{N_{p_n}}(r_n)\}$ یک دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های S می‌باشد. از طرفی
$$N_{p_n}(r_n) = \{q \in S | d_L(F_{p_n,q}, H_0) < r_n\}$$

می‌باشد و چون به ازای هر $n \geq 1$ نامساوی $r_n < \frac{r}{2^n}$ برقرار می‌باشد بنابراین $\lim_{n\to\infty} d_L(F_{p_n,q}, H_0) = 0$ بنابراین به ازای هر $n \geq 1$ داریم $\lim_{n\to\infty}(F_{p_n,q}(x)) = 0$ و لذا برای هر $n \geq 1$ داریم $p_n = q$. بنابراین $N_{p_n}(r_n)$ یک مجموعه تک عضوی می‌باشد. با عنایت به قضیه ۴،۳ (۷) داریم $D_{\overline{N_{p_n}}(r_n)} = D_{N_{p_n}(r_n)}$ و لذا طبق قضیه داریم $\lim_{n\to\infty}\left(D_{\overline{N_{p_n}}(r_n)}\right) = H_0$. حال به کار بردن قضیه ۷،۳ (قضیه اشتراکی کانتور) مجموعه $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N_{p_n}}(r_n)$ ناتهی می‌باشد و چون برای هر $n \geq 1$ داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{N_{p_n}}(r_n) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ پس $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ناتهی می‌باشد. حال ثابت می‌کنیم $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ در S قویاً چگال است. چون G_1 در S قویاً چگال است پس $G_1 \cap N_p(r)$ ناتهی می‌باشد. برای هر $p \in S$ و $r > 0$ قرار می‌دهیم $A_1 = G_1 \cap N_p(r)$ لذا A_1 در S قویا باز است بنابراین به ازای هر $p_1 \in A_1$ شامل همسایگی $N_{p_1}(r)$ می‌باشد. طبق بحث قبل وجود دارد $r_1 > 0$ به قسمی که $\overline{N_{p_1}}(r_1) \subseteq N_{p_1}(r) \subseteq A$. حال اگر قرار دهیم $A_n = G_n$ برای $n = 2,3,\ldots$ و $E_n = \overline{N_{p_n}}(r_n)$ خواهیم داشت $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. بنابراین $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ناتهی می‌باشد. از طرف دیگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap (\bigcap_{n=2}^{\infty} A_n)$ پس $(G_1 \cap N_p(r)) \cap (\bigcap_{n=2}^{\infty} G_n) \neq \emptyset$ بنابراین $N_p(r) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \neq \emptyset$ و چون $N_p(r)$ یک مجموعه قویاً باز در S بود لذا $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ در S قویاً چگال است و حکم برقرار می‌باشد.

نتیجه ۹،۳. فرض کنید $(S, \mathcal{F}, \tau)$ یک فضای متری احتمالاتی قویاً تام و τ یک تابع مثلثی پیوسته باشد آن گاه احکام زیر هم ارزند.

الف) اگر $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های قویاً بسته S باشد به قسمی که $intF_n = \emptyset$ برای هر $n \geq 0$ آنگاه $int \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \emptyset$.

ب) اگر $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از زیرمجموعه های قویاً باز S باشد به قسمی که $\overline{G_n} = V$ برای هر $n \geq 0$ آنگاه $\overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n} = V$.

نتیجه ۱۰،۳. فرض کنید $(S, \mathcal{F}, \tau)$ یک فضای متری احتمالاتی و τ یک تابع مثلثی پیوسته باشد. فرض کنید برای هر $n \geq 0$، F_n زیرمجموعه‌های قویاً بسته S باشند به قسمی که $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = S$.

الف) اگر $intF_n = \emptyset$ برای هر $n \geq 0$ آنگاه S قویاً تام نیست.

ب) اگر S قویا تام باشد آنگاه وجود دارد $n_0 \geq 0$ به قسمی که $intF_{n_0} \neq \emptyset$.

قضیه ۱۱،۳. فرض کنید $(S, \mathcal{F}, \tau)$ یک فضای متری احتمالاتی و τ یک تابع مثلثی پیوسته باشد. اگر E یک زیرمجموعه S باشد احکام زیر هم ارزند:

الف) E قویاً تام و تماماً کراندار احتمالاتی است.

ب) (خاصیت بولزانو – ویراشتراس) هر دنباله در E دارای زیر دنباله‌ی قویاً همگرا به یک نقطه در E است.

ج) (خاصیت هاینه – بورل) اگر $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پوشش E از مجموعه‌های قویاً باز باشد زیرمجموعه متناهی $F \subset A$ وجود دارد که $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ یک پوشش E است.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که (الف) و (ب) هم ارزند و سپس (الف) و (ب) باهم (ج) را نتیجه می‌دهند و بالاخره اینکه (ج)، حکم (ب) را نتیجه می‌دهد.

(الف) حکم (ب) را نتیجه می‌دهد: فرض کنید (الف) برقرار و $\{x_n\}$یک دنباله در E باشد. چون E تماماً کراندار احتمالاتی است لذا آن را می‌توان توسط تعدادی متناهیاز همسایگی‌های $N_{p_i}(2^{-1})$ که $p_i \in E$ و $i \in \{1,2,\dots,n\}$ پوشاند و حداقل یکی از این همسایگی‌ها $N_{p_1}(2^{-1})$ باید برای بی‌نهایت مقدار n، عناصر x_n را دارا باشد. فرض کنید برای هر n در مجموعه نامتناهی N_1، $x_n \in N_{p_1}(2^{-1})$. مجموعه‌ی $E \cap N_{p_1}(2^{-1})$ را می‌توان با تعداد متناهی از همسایگی‌های $N_{p_i}(2^{-2})$ که $p_i \in E$ و $i \in \{1,2,\dots,n\}$ پوشاند و حداقل یکی از همسایگی‌ها مثلاً $N_{p_2}(2^{-2})$ باید برای بی‌نهایت مقدار n، عناصر x_n را دارا باشد. فرض کنید برای هر n در مجموعه‌ی نامتناهی N_2، $x_n \in N_{p_2}(2^{-2})$ با استقراء دنباله‌ای از همسایگی‌های $N_{p_j}(2^{-j})$ که $p_j \in E$ و یک دنباله نزولی از زیرمجموعه‌های N_j از $\mathbb{N}$ را به دست می‌آوریم به طوری که برای هر $n \in N_j$، $x_n \in N_{p_j}(2^{-j})$. عناصر $n_1 \in N_1$ و $n_2 \in N_2$ و ... را اختیار می‌کنیم که $n_1 < n_2 < \cdots$ در این صورت دنباله $\{x_{n_j}\}$ قویاً کشی می‌باشد زیرا طبق قضیه ۶،۱ (۲) داریم:

$$d_L\left(F_{x_{n_j},x_{n_k}},H_0\right) \leq d_L\left(\tau(F_{x_{n_j},p_j},F_{p_j,x_{n_k}}\right),H_0).$$

چون d_L یک متر روی Δ^+ می‌باشد لذا طبق قضیه ۶،۱(۱) داریم:

$$\begin{aligned} d_L\left(F_{x_{n_j},x_{n_k}},H_0\right) &\leq d_L\left(\tau(F_{x_{n_j},p_j},F_{p_j,x_{n_k}}\right),H_0) \\ &\leq d_L\left(\tau(F_{x_{n_j},p_j},F_{p_j,x_{n_k}}\right),F_{p_j,x_{n_k}}) + d_L\left(F_{p_j,x_{n_k}},H_0\right). \end{aligned}$$

طبق قضیه ۹،۱ (Δ^+,d_L)، قویاً فشرده است بنابراین τ روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ به طور یکنواخت پیوسته است و چون $\tau(F_{x_{n_j},p_j},H_0) = F_{x_{n_j},p_j}$ برقرار است لذا:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0\,; d_L\left(F_{p_j,x_{n_k}},H_0\right) < \delta \Longrightarrow d_L\left(\tau(F_{x_{n_j},p_j},F_{p_j,x_{n_k}}\right),F_{x_{n_j},p_j}) < \varepsilon.$$

چون E تماماً کراندار احتمالاتی است لذا به ازای هر $\acute{\varepsilon}$ داریم: $d_L\left(F_{p_j,x_{n_k}},H_0\right) < \acute{\varepsilon}$. حال اگر قرار دهیم $\acute{\varepsilon} = \delta$، اگر $k > j$ باشد آنگاه $d_L\left(F_{x_{n_j},x_{n_k}},H_0\right) \leq 2^{1-j}$ برقرار می‌باشد یعنی $\{x_{n_j}\}$ یک دنباله‌ی قویاً کشی می‌باشد و چون E قویاً تام است لذا این دنباله در E دارای حد است.

(ب) حکم (الف) را نتیجه می‌دهد: نشان می‌دهیم که اگر (الف) نادرست باشد آنگاه (ب) نیز نادرست است. اگر E قویاً تام نباشد دنباله قویاً کشی در E وجود دارد که در E حد ندارد. در این صورت هیچ زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ در E همگرا نیست. چون دنباله $\{x_n\}$ در E قویاً کشی است پس:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1, \forall n \geq N_1; \quad d_L\left(F_{x_m,x_n},H_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

حال اگر دنباله‌ی $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای چون $\{x_{i_n}\}$ داشته باشد که به x_0 همگرا باشد آنگاه:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2, \forall n \geq N_2; \quad d_L\left(F_{x_{i_n},x_n},H_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

از آنجا که τ روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ به طور یکنواخت پیوسته است پس داریم:

$$\begin{aligned} & d_L\left(F_{x_n,x_0},H_0\right) \\ & \leq d_L\left(\tau(F_{x_n,x_{i_n}},F_{x_{i_n},x_0})\right),H_0) \\ & \leq d_L\left(\tau(F_{x_n,x_{i_n}},F_{x_{i_n},x_0}\right),F_{x_n,x_{i_n}}) \\ & \qquad + d_L\left(F_{x_n,x_{i_n}},H_0\right) \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

بنابراین $\{x_n\}$ به x_0 همگراست که یک تناقض است. از طرف دیگر اگر E تماماً کراندار احتمالاتی نباشد. فرض کنید$0 < \varepsilon$ به گونه‌ای باشد که E را نتوان توسط تعداد متناهی همسایگی‌های $N_{x_i}(\varepsilon)$ که $x_i \in E$ و $i \in \{1,2,\dots,n\}$ پوشاند. با استقراء $x_n \in E$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم. با عنصر دلخواه $x_1 \in E$ شروع می‌کنیم و با فرض انتخاب شدن

$x_1, x_2, \dots, x_n$ عنصر $x_{n+1} \in E -$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_{x_i}(\varepsilon)$ برای $n \in \mathbb{N}$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ و $m \neq n$ داریم $d_L(F_{x_m, x_n}, H_0) \geq \varepsilon$. لذا $\{x_n\}$ هیچ زیردنباله همگرا ندارد که با خاصیت بولزانو – ویراشتراس در تناقض است.

(الف) و (ب) حکم (ج) را نتیجه می‌دهند: کافی است نشان دهیم اگر (ب) برقرار باشد و $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پوشش باز E باشد، $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که هر همسایگی $N_p(\varepsilon)$ که $p \in E$ و E را قطع کند مشمول یک $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ است زیرا بنا به (الف) E را می‌توان توسط تعداد متناهی از همسایگی‌ها پوشاند. فرض کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد $x_n \in E$ به قسمی که همسایگی $N_{x_n}(2^{-n})$ مشمول هیچ یک از V_αها که $\alpha \in A$ نباشد. طبق خاصیت بولزانو – ویراشتراس زیردنباله $\{x_{i_n}\}$ وجود دارد که به $x \in E$ همگرا می‌باشد و چون $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پوشش E می‌باشد بنابراین وجود دارد $\alpha \in A$ به قسمی که $x \in V_\alpha$. همچنین V_α قویاً باز است لذا وجود دارد $\varepsilon > 0$ به قسمی که $N_x(\varepsilon) \subset V_\alpha$. حال ثابت می‌کنیم $N_{x_{i_n}}(2^{-n}) \subset V_\alpha$. اگر y عضو دلخواهی از $N_{x_{i_n}}(2^{-n})$ باشد آنگاه $d_L\left(F_{x_{i_n}, y}, H_0\right) < 2^{-n}$ و چون τ روی $\Delta^+ \times \Delta^+$ به طور یکنواخت پیوسته است لذا:

$$
\begin{aligned}
&\forall \alpha > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad ; \\
&d_L\left(F_{x_{i_n}, y}, H_0\right) < \delta \\
&\Longrightarrow d_L\left(\tau(F_{x, x_{i_n}}, F_{x_{i_n}, y}), F_{x_{i_n}, y}\right) < \varepsilon \ .
\end{aligned}
$$

حال اگر $n \in \mathbb{N}$ اختیار شود به قسمی که $d_L\left(F_{x_{i_n}, y}, H_0\right) < \delta$ و $2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
&d_L(F_{x,y}, H_0) \leq d_L(\tau\left(F_{x, x_{i_n}}, F_{x_{i_n}, y}\right), H_0) \\
&\leq d_L\left(\tau\left(F_{x, x_{i_n}}, F_{q,s}\right), F_{x_{i_n}, y}\right) + \\
&d_L\left(F_{x_{i_n}, y}, H_0\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-n} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

لذا $N_{x_{i_n}}(2^{-n}) \subset V_\alpha$. که با فرض ما روی $N_{x_{i_n}}(2^{-n})$ در تناقض است.

(ج) حکم (ب) را نتیجه می‌دهد: اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در E باشد که هیچ زیردنباله همگرا نداشته باشد برای هر $x \in E$ وجود دارد $\varepsilon(x) > 0$ به قسمی که $N_x(\varepsilon(x))$ شامل تنها تعداد متناهی از xها است. در غیر این صورت یک زیردنباله $\{x_n\}$ می‌بایست به x همگرا باشد. در این صورت گردایه‌ی $\{N_x(\varepsilon(x))\}_{x \in E}$ یک پوشش باز E است که زیر پوشش متناهی ندارد.

فهرست منابع

[1] K. Menger, Statistical metrics, Proc, Nat, Acad, of sci. U.S.A. 28 (1942), 535-537.

[2] K. Menger, Probabilitstic geometry, Pro, Nat, Acad, of sci, U.S.A. 37(1951), 226-229.

[3] K. Menger, Gemetric generale (chap.VII), Memorial des Sciences Mathematiques, No, 124, Paris 1954.

[4] V. Istratescu and I. Vaduva, Products of statistical metric spaces, (Romanian) Acad.R.P.Romine Stud. Cere. Mat. 12(1961), 567-574.

[5] A. N. Serstnev, On the concept of random normed spaces, (Russian), Dokl. Akad, Nauk SSSR 149(1963) 280-283.

[6] E. Thorp, Generalized topologies for statistical metric spaces, Fundamenta Mathematicae 51 (1962), 9-21.

[7] A. Wald, On a statistical generalization of metric spaces, Proc, Nat. Acad. of Sci U. S. A.29 (1943), 196-197.

[8] B. Schweizer and A. Sklar, Statistical metric spaces, Pacific J. Math. 10 (1960), 314-334.

[9] B. Schweizer and A. Sklar, Probabilistic metric spaces, North-Holland, New York (1983).

[10] O. Hadzic and E. Pap, Fixed point theory in probabilistic metric spaces, Institue of Mathematics, University of Novi Sad, Yugoslavia (2001).

[11] Engelking, R; General Topology, Warszawa (1977).

[12] Zhang Shi-Sheng, Basic theory and application of probabilistic metric space (I), Applied Mathematics and Mechanics, 9,2 (1988); 123-133.

[13] S. M. Vaezpour and M. Shams, Topological properties of probabilistic metric space Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1, no. 20,(2007), 957-964.