

روش‌های عددی هم‌تافته و متقارن برای حل عددی برخی مدل‌های ریاضی اجرام سماوی

علی عبدی^{۱*}، سید احمد حسینی^۲

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۳/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۵/۲۰

چکیده

در سال‌های اخیر، تئوری روش‌های عددی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت و غیر سخت به یک کمال خاصی رسیده است. بنابراین، کدهای فوق‌العاده زیادی که بر پایه روش‌های رانگ-کوتا، روش‌های چندگامی خطی، روش‌های ابرشکف، روش‌های پیوندی یا روش‌های خطی عمومی هستند، وجود دارند. اگرچه این روش‌ها دارای دقت خوب و خواص پایداری مطلوب مانند A-پایداری و L-پایداری هستند، ولی برای حل عددی دسته‌های خاصی از مسایل که از زمینه‌های تحقیقاتی مختلفی ناشی می‌شوند، مناسب نیستند. برای مثال، مدل‌های ریاضی حرکت اجرام سماوی که دستگاه هامیلتونی هستند. از آنجایی که جواب چنین مسایلی دارای خواص هندسی خاصی از جمله هم‌تافتگی و عموماً برگشت‌پذیری است، طبیعی است به دنبال روش‌هایی باشیم که دارای این ویژگی‌ها باشند. هدف این مقاله طراحی روش‌های عددی هم‌تافته و متقارن از مراتب بالا است. کارایی و دقت روش‌های معرفی شده با نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی آنها روی مسایل هامیلتونی معروف از حرکت اجرام سماوی، تأیید خواهند شد.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل معمولی، دستگاه‌های هامیلتونی، روش رانگ-کوتا و رانگ-کوتا افزاز شده، هم‌تافتگی و تقارن.

۱. مقدمه

تاکنون روش‌های عددی زیادی برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرط اولیه

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t \in [t_0, T],$$

$$y(t_0) = y_0,$$

ارائه شده است که در آن $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ و m بُعد دستگاه است. بیشتر روش‌های عددی مرسوم و کلاسیک متعلق به دو خانواده بزرگ از روش‌ها هستند: روش‌های رانگ-کوتا و روش‌های چندگامی خطی. روش‌های معروف دیگری که به‌طور همزمان از ویژگی چندمرحله‌ای بودن روش‌های رانگ-کوتا و همچنین از ویژگی چندگامی (یا به بیانی دیگر چندمقداری) بودن روش‌های چندگامی خطی استفاده کنند، نیز معرفی و ساخته شده است که می‌توان به معروف‌ترین این روش‌ها، یعنی روش‌های هیبریدی اشاره کرد [۱-۳]. همه این دسته روش‌ها متعلق به خانواده بزرگی از روش‌های عددی یعنی روش‌های خطی عمومی (GLMs) هستند که بوچر در سال ۱۹۶۶ این روش‌ها را به منظور قالبی واحد برای روش‌های کلاسیک و فرمول‌بندی روش‌های جدید که متعلق به خانواده روش‌های رانگ-کوتا و چندگامی خطی نیستند، معرفی کرد [۴]. برای مطالعه بیشتر این روش‌ها، برای نمونه، به مراجع [۵-۸] رجوع کنید.

مسیری دیگر برای معرفی روش‌های کارا، استفاده از مشتق دوم جواب است که از جمله می‌توان به مقالات کش [۹]، انرایت [۱۰] و حجتی [۱۱] اشاره کرد. اگرچه GLMs شامل اکثر روش‌های کلاسیک هستند، ولی این خانواده بزرگ از روش‌ها شامل روش‌های عددی با مشتق دوم نمی‌شوند. از این‌رو، در سال ۲۰۰۴ بوچر و حجتی روش‌های خطی عمومی با مشتق دوم (SGLMs) را به عنوان توسعه‌ای از GLMs ارائه دادند [۱۲]. ویژگی‌های اساسی این روش‌ها شامل شرایط پیش-سازگاری، سازگاری، صفر-پایداری، همگرایی و ارتباط این مفاهیم با یکدیگر توسط عبدی و حجتی در [۱۳] بررسی شد. در ادامه، ساخت، پیاده‌سازی و برخی موانع مرتبه برای SGLMs توسط عبدی و همکاران، برای نمونه، در مقالات [۱۴-۲۱] مورد بحث و بررسی قرار گرفت. همچنین عبدی و بوچر مسیرهای مرتبه‌دار را

برای به‌دست آوردن اثبات‌های ساده‌تر و زیباتر موانع مرتبه روش‌های مشتق دوم استفاده کردند [۲۲-۲۳]. از آنجایی که مدل ریاضی حرکت اجرام سماوی عموماً با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل هامیلتونی قابل بیان است و جواب این دستگاه‌ها دارای خواص هندسی ویژه‌ای هستند، بایستی برای حل این دستگاه‌ها، در بین روش‌های عددی به‌دنبال روشی باشیم که حافظ خواص هندسی مسأله باشد، به عبارتی دیگر جواب روش عددی نیز دارای چنین خواصی باشد. در این مقاله روش‌هایی تا مرتبه هشت که مناسب برای حل چنین مسایلی باشند، معرفی و کارایی آنها با حل چند مسأله از اجرام سماوی تأیید خواهد شد.

بخش‌های بعدی مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲، مفهوم هم‌تافتگی و تقارن برای روش‌های عددی که به‌ترتیب خاصیتی از جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل هامیلتونی و دستگاه‌های برگشت‌پذیر هستند، بحث می‌شود. بخش ۳ به روش‌های ترکیبی بر پایه روش استورم-رولت و ساخت این روش‌ها از مراتب مختلف اختصاص دارد. همچنین در این بخش نشان داده می‌شود که روش‌های ساخته شده دارای خاصیت هم‌تافتگی و تقارن هستند. برای تأیید نتایج تئوری بخش ۳، کارایی و دقت روش‌های ساخته شده، نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی کامپیوتری آنها روی مسایل هامیلتونی معروف از حرکت اجرام سماوی در بخش ۴ ارائه شده و در بخش ۵ نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲. هم‌تافتگی و تقارن روش‌های عددی

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل هامیلتونی به‌صورت

$$\dot{p} = -H_q(p, q),$$

$$\dot{q} = H_p(p, q),$$

است که در آن $q = [q_1, q_2, \dots, q_d] \in \mathbb{R}^d$ مختصات تعمیم یافته، $p = [p_1, p_2, \dots, p_d] \in \mathbb{R}^d$ تکانه تعمیم یافته و $H: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع هامیلتونی دستگاه است. با فرض $y = [p, q]^T$ دستگاه (۱) را می‌توان به‌صورت ماتریسی $y' = J^{-1} \nabla H(y)$ نوشت که در آن

با توجه به مباحث فوق، برای حل عددی مسایل هامیلتونی برگشت‌پذیر، بایستی به دنبال روش‌های عددی باشیم که جواب روش عددی نیز خواص همتافتگی و برگشت‌پذیری را داشته باشد. لازم به ذکر است که روش‌های همتافته نباید در بین روش‌های چندگامی خطی جستجو شود، چرا که ثابت شده است که این روش‌ها به خاطر ماهیت چندمقداری بودنشان نمی‌توانند روش‌هایی همتافته باشند. همچنین GLMs و SGLMs نیز زمانی که بیش از یک ورودی داشته باشند، نمی‌توانند روش‌هایی همتافته باشند. اگرچه، با تعریف مفهوم G -همتافتگی برای GLMs، روش‌هایی کارا برای حل مسایل هامیلتونی، به عنوان نمونه در مقالات [۲۵] و [۲۶] معرفی شده‌اند. همچنین مفهوم G -همتافتگی به روش‌های SGLMs نیز توسیع داده شده و روش‌هایی از این دسته روش‌ها در مقاله [۲۷] ساخته شده است.

تعریف ۳: روش عددی تک-گامی $y_{n+1} = \phi_h(y_n)$ همتافته نامیده می‌شود اگر وقتی که آن به یک دستگاه هامیلتونی هموار اعمال شود، نگاشت ϕ_h همه‌جا یک نگاشت همتافته باشد [۲۴].

اما برای حفظ رفتار برگشت‌پذیری در جواب عددی بایستی روش مورد نظر خاصیت تقارن داشته باشد:

تعریف ۴: روش عددی تک-گامی $y_{n+1} = \phi_h(y_n)$ متقارن نامیده می‌شود هرگاه [۲۴]

$$\phi_h = \phi_{-h}^{-1}.$$

تعریف ۳ بیان می‌کند که اگر در یک روش تک-گامی نقش y_n و y_{n+1} عوض شود و h با $-h$ جایگزین شود و روش تغییر نیابد، روش مورد نظر متقارن است. به-راحتی می‌توان ثابت کرد که یک شرط لازم برای اینکه یک روش رانگ-کوتا متقارن باشد این است که برای هر z مختلط داشته باشیم $R(z)R(-z) = 1$ ، که در آن $R(z)$ تابع پایداری روش رانگ-کوتا است.

لذا می‌توان نتیجه گرفت که روش رانگ-کوتای صریح متقارن وجود ندارد.

$$J = \begin{pmatrix} \cdot & I_d \\ -I_d & \cdot \end{pmatrix},$$

I_d ماتریس همانی از بُعد d است. چنین دستگاه‌هایی خواص قابل ملاحظه‌ای دارند که یکی از آنها ثابت ماندن تابع H در طول بازه حل است، که برای دستگاه‌های مکانیکی به معنی بقاء انرژی کل است. خاصیت اساسی دیگر این دستگاه‌ها، همتافتگی جریان φ_t معادله دیفرانسیل (جواب در لحظه t با شرط اولیه (p, q)) است. مفهوم همتافتگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱: تابع مشتق‌پذیر $g: \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ در نقطه $(p, q) \in \mathbb{R}^{2d}$ همتافته نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم [۲۴]

$$g'(p, q)^T J g'(p, q) = J.$$

در حالت $d = 1$ ، همتافتگی به معنی حفظ مساحت است، یعنی نگاشت‌های همتافته، حافظ مساحت هستند. برای $d > 1$ ، همتافتگی یک نگاشت بدین معنی است که مجموع مساحت‌های جهت‌دار تصاویر یک منیفلد دو-بُعدی در فضای فازی به صفحات (p_i, q_i) ، $i = 1, 2, \dots, d$ تحت نگاشت مورد نظر بدون تغییر بماند.

همچنین دستگاه‌های مکانیکی پایا خاصیتی دارند که با عکس کردن جهت اولیه بردار سرعت و حفظ موقعیت اولیه، مسیر جواب عوض نمی‌شود، بلکه تنها جهت حرکت عکس می‌شود. چنین دستگاه‌هایی، برگشت‌پذیر هستند.

تعریف ۲: معادله دیفرانسیل $y' = f(y)$ ، ρ - برگشت‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه

$$\forall y: f(\rho(y)) = -\rho(f(y)),$$

که در آن ρ یک نگاشت خطی معکوس‌پذیر در فضای فازی معادله دیفرانسیل است [۲۴].

برای مثال، یک دستگاه هامیلتونی با تابع هامیلتونی H صادق در $H(-p, q) = H(p, q)$ ، یک دستگاه معادله دیفرانسیل ρ - برگشت‌پذیر با $\rho(p, q) = (-p, q)$ است.

می‌شوند. اگرچه روندی که بیان می‌شود، برای به‌دست آوردن روشی از مرتبه دلخواه قابل اجراست، در اینجا روش‌هایی تا مرتبه هشت معرفی می‌شوند. ابتدا گزاره‌ای بیان می‌شود که نتیجه می‌دهد ترکیب روش‌ها، هم‌افتگی را حفظ می‌کند.

گزاره ۱: ترکیب روش‌های هم‌افتنه، هم‌افتنه است.

اثبات: فرض کنید $\phi_{r,h}$ و $\phi_{\lambda,h}$ نگاشت‌های متناظر با دو روش هم‌افتنه باشند. نشان می‌دهیم روش متناظر با نگاشت $\phi_h = \phi_{r,h} \circ \phi_{\lambda,h}$ هم‌افتنه است. با توجه به هم‌افتگی نگاشت‌های $\phi_{r,h}$ و $\phi_{\lambda,h}$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \phi_h'(y)^T J \phi_h'(y) &= \\ \phi_{\lambda,h}'(y)^T \phi_{r,h}'(\phi_{\lambda,h}(y))^T J \phi_{r,h}'(\phi_{\lambda,h}(y)) \phi_{\lambda,h}'(y) &= \\ = \phi_{\lambda,h}'(y)^T J \phi_{\lambda,h}'(y) &= \\ = J, \end{aligned}$$

که هم‌افتگی نگاشت ϕ_h را نتیجه می‌دهد. ■
از آنجایی که روش استورم-ورلت (۳) و (۴) به‌ترتیب ترکیب روش اولی‌ر هم‌افتنه از مرتبه یک

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n - hH_q(p_{n+1}, q_n), \\ q_{n+1} = q_n + hH_p(p_{n+1}, q_n), \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + hH_p(p_n, q_{n+1}), \\ p_{n+1} = p_n - hH_q(p_n, q_{n+1}), \end{cases}$$

با خودش هستند، و روش اولی‌ر هم‌افتنه، روشی هم‌افتنه است [۲۴]، در نتیجه بنا به گزاره ۱، روش استورم-ورلت روشی هم‌افتنه است. لذا با توجه به بحث انجام یافته در بخش ۳ و نظر به اینکه روش تک-گامی متقارن دارای مرتبه زوج است، روش استورم-ورلت روشی هم‌افتنه و متقارن از مرتبه دو است.

قضیه زیر از [۲۴] برای ساخت روش‌های متقارن از مرتبه دلخواه می‌تواند بسیار مفید باشد:

قضیه ۱: فرض کنید ϕ_h نگاشت متناظر با یک روش تک-گامی متقارن از مرتبه $p = 2k$ باشد. اگر داشته باشیم

اما در بین روش‌های رانگ-کوتای افزاز شده، برای دستگاه هامیلتونی تفکیک‌پذیر، یعنی دستگاه

$$\begin{cases} \dot{p} = f(q), \\ \dot{q} = g(p), \end{cases} \quad (۲)$$

می‌توان روش صریح پیدا کرد. یکی از این روش‌ها، روش استورم-ورلت است که برای دستگاه (۱) به‌صورت

$$\begin{cases} p_{n+1/2} = p_n - \frac{h}{\gamma} H_q(p_{n+1/2}, q_n), \\ q_{n+1} = q_n + \frac{h}{\gamma} (H_p(p_{n+1/2}, q_n) \\ + H_p(p_{n+1/2}, q_{n+1})), \\ p_{n+1} = p_{n+1/2} - \frac{h}{\gamma} H_q(p_{n+1/2}, q_{n+1}), \end{cases} \quad (۳)$$

یا

$$\begin{cases} q_{n+1/2} = q_n + \frac{h}{\gamma} H_p(p_n, q_{n+1/2}), \\ p_{n+1} = p_n - \frac{h}{\gamma} (H_q(p_n, q_{n+1/2}) \\ + H_q(p_{n+1}, q_{n+1/2})), \\ q_{n+1} = q_{n+1/2} + \frac{h}{\gamma} H_p(p_{n+1}, q_{n+1/2}), \end{cases} \quad (۴)$$

نوشته می‌شود. ملاحظه می‌شود که این روش (در هر دو صورت (۳) و (۴)) وقتی برای دستگاه هامیلتونی تفکیک‌پذیر (۲) اعمال شود، روشی صریح است که از نظر هزینه محاسباتی مزیتی قابل توجه در مقایسه با دیگر روش‌ها است.

در بخش بعدی نشان داده می‌شود که این روش هم‌افتنه نیز است و با استفاده از مفهوم ترکیب روش‌ها، ترکیب‌هایی از این روش از مراتب بالا به نحوی که خاصیت تقارن و هم‌افتگی نیز حفظ شود، ساخته خواهند شد.

۳. ساخت روش‌های ترکیبی بر پایه روش استورم-ورلت

در این بخش، با استفاده از مفهوم ترکیب روش‌ها، روش‌های ترکیبی بر پایه روش استورم-ورلت ساخته

روش‌های ساخته شده در این بخش را در بخش بعدی روی مسایل هامیلتونی از اجرام سماوی اعمال کرده و کارایی آنها تأیید می‌شوند.

۴. نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی روش‌های ساخته شده در بخش ۳ حاصل از بکارگیری آنها روی چند مساله هامیلتونی از اجرام سماوی ارائه می‌شود. این نتایج، توانایی حل این مسایل و حفظ تابع هامیلتونی مربوط به هر مساله در طول بازه حل را نشان می‌دهند.

به عنوان اولین مساله، مساله سیارات بیرونی منظومه شمسی را در نظر می‌گیریم. این مساله حرکت پنج سیاره (مشتری، زحل، اورانوس، نپتون و پلوتون) نسبت به خورشید را توصیف می‌کند. دستگاه معادله دیفرانسیل این مساله را می‌توان با تابع هامیلتونی نظیر، یعنی

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \frac{1}{m_i} p_i^T p_i - G \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|},$$

به‌دست آورد. در اینجا (p, q) از زیربردارهای $p_i, q_i \in \mathbb{R}^3$ تشکیل شده‌اند. واحدهای اندازه‌گیری به این صورت در نظر گرفته شده‌اند که: جرم‌های m_i نسبت به خورشید است به طوری که خورشید جرم واحد دارد، فاصله‌ها در واحد نجومی $[AU.] = 149597870.7 [km]$ هستند، زمان روز زمینی است و ثابت گرانشی برابر $G = 2/95912208286 \times 10^{-4}$ است. محاسبات بر اساس مقادیر اولیه داده شده در [۲۴] است که متناظر با پنجم سپتامبر ۱۹۹۴ ساعت ۰۰:۰۰ است.

برای این مساله، روش‌های ساخته شده در بخش ۳ در یک دوره زمانی ۳۰۰۰۰۰ روز زمینی با طول گام $h = 300$ روز پیاده‌سازی می‌شوند. نتایج عددی در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده‌اند. مدارهای به‌دست آمده سیارات با روش‌های عددی در شکل ۱ رسم شده‌اند. همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود، هم‌تافتگی فضای فازی توسط روش‌ها حفظ می‌شود. همچنین با نتایج عددی به‌دست آمده، انحراف تابع هامیلتونی H از

$$2\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad 2\gamma_1^{2k+1} + \gamma_2^{2k+1} = 0, \quad (5)$$

آن‌گاه روش ترکیبی با نگاشت $\Psi_h = \phi_{\gamma,h} \circ \phi_{\gamma,h} \circ \phi_{\gamma,h}$ روشی متقارن و از مرتبه $p = 2k + 2$ است.

با استفاده از قضیه ۱ و در نظر گرفتن روش استورمر-ورلت به عنوان روش پایه‌ای، که روشی هم‌تافته و متقارن از مرتبه دو است، می‌توان روش‌های هم‌تافته و متقارن از مرتبه دلخواه ساخت. برای این منظور، فرض کنید $\phi_h^{[2]}$ نگاشت متناظر با روش استورمر-ورلت باشد. بنابراین روش متناظر با نگاشت $\phi_h^{[4]} = \phi_{a,h}^{[2]} \circ \phi_{a,h}^{[2]} \circ \phi_{a,h}^{[2]}$ روشی هم‌تافته و متقارن از مرتبه چهار است که در آن اعداد حقیقی a و a_1 از حل دستگاه

$$2a_1 + a = 1, \quad 2a_1^2 + a^2 = 0,$$

به‌دست می‌آیند که با حل این دستگاه داریم

$$a_1 = (2 - 2^{\frac{1}{2}})^{-1}, \quad a = 1 - 2a_1.$$

همچنین روش متناظر با نگاشت $\phi_h^{[6]} = \phi_{b,h}^{[4]} \circ \phi_{b,h}^{[4]} \circ \phi_{b,h}^{[4]}$ روشی هم‌تافته و متقارن از مرتبه شش است که در آن اعداد حقیقی b و b_1 از حل دستگاه

$$2b_1 + b = 1, \quad 2b_1^5 + b^5 = 0,$$

به‌دست می‌آیند که با حل این دستگاه داریم

$$b_1 = (2 - 2^{\frac{1}{5}})^{-1}, \quad b = 1 - 2b_1.$$

با ادامه این روند، روشی هم‌تافته و متقارن از مرتبه هشت با نگاشت $\phi_h^{[8]} = \phi_{c,h}^{[6]} \circ \phi_{c,h}^{[6]} \circ \phi_{c,h}^{[6]}$ را می‌توان ساخت که در آن اعداد حقیقی c و c_1 از حل دستگاه

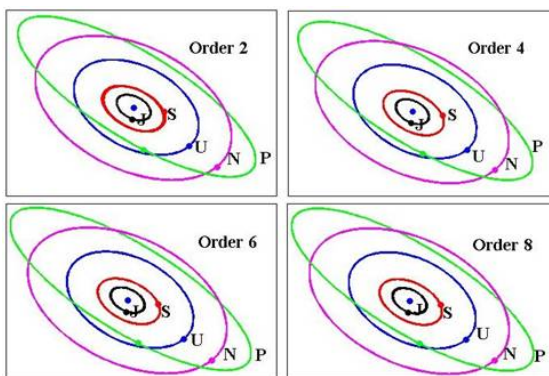
$$2c_1 + c = 1, \quad 2c_1^7 + c^7 = 0,$$

به‌دست می‌آیند که با حل این دستگاه داریم

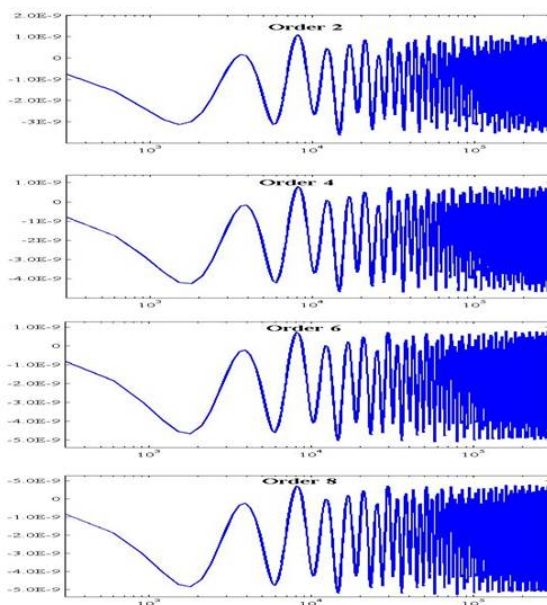
$$c_1 = (2 - 2^{\frac{1}{7}})^{-1}, \quad c = 1 - 2c_1.$$

بدین ترتیب قادر خواهیم بود روش‌های هم‌تافته و متقارن از مرتبه دلخواه با ویژگی برجسته‌ای که برای مسایل هامیلتونی تفکیک‌پذیر روش‌هایی صریح و در نتیجه دارای هزینه محاسباتی بسیار پایین هستند، بسازیم.

مقدار اولیه‌اش در شکل ۲ رسم شده است که نشان می‌دهد روش‌های معرفی شده، تابع هامیلتونی H را در طول بازه حل حفظ می‌کنند.



شکل ۱: مدارهای به‌دست آمده سیارات بیرونی منظومه شمسی با روش استومر-ورلت و ترکیب‌های آن با $h = ۳۰۰$.



شکل ۲: انحراف تابع هامیلتونی مسأله سیارات بیرونی منظومه شمسی با روش استومر-ورلت و ترکیب‌های آن با $h = ۳۰۰$.

$$f(z) = f(x, y) = [f^{(1)}(x, y), f^{(v)}(x, y)]^T$$

$f^{(1)}, f^{(v)} : \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^v$ ، با مولفه‌های

$$f_i^{(1)}(x, y) = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (x_j - x_i)}{\left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_i^{(v)}(x, y) = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (y_j - y_i)}{\left((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}$$

دومین مسأله‌ای که در نظر می‌گیریم مسأله *Pleiades* (یک مسأله مکانیک سماوی از هفت ستاره در صفحه با مختصات x_i و y_i و اجرام $m_i = i$ ، $i = 1, 2, \dots, 7$) است. معادله دیفرانسیل نظیر به این مسأله، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو 14 بُعدی به صورت

$$\ddot{q} = f(q), \quad z(\cdot) = z \in \mathbb{R}^{14}, \quad z'(\cdot) = z' \in \mathbb{R}^{14}, \quad 0 \leq t \leq 3,$$

است که در آن $x, y \in \mathbb{R}^7$ ، $q = [x, y]^T$

$$x(0) = (3, 3, -1, -3, 2, -2, 2)^T, \quad y(0) = (3, -3, 2, 3, -4, 4)^T,$$

$$x'(0) = (3, 3, 3, 3, 1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})^T, \quad y'(0) = (3, 3, 3, -1/\sqrt{5}, 1, 3, 0)^T,$$

بوده و جواب مرجع در $t = 3$ در جدول ۱ داده شده است [۲۸].

$i = 1, \dots, 7$ با در نظر گرفتن $p = \dot{q}$ ، دستگاه معادله دیفرانسیل هامیلتونی تفکیک‌پذیر ۲۸ بعدی

$$\dot{p} = f(q),$$

$$\dot{q} = p,$$

حاصل می‌شود. شرایط اولیه در $t = 0$ به صورت

جدول ۱: جواب مرجع در $t = 3$ برای مسأله Pleiades

$x_1 = 0.3706139143970502,$	$y_1 = -0.3943437585517392 \times 10.$
$x_2 = 0.3237284092057233 \times 10,$	$y_2 = -0.3271380973972550 \times 10.$
$x_3 = -0.3222559032418324 \times 10,$	$y_3 = 0.5225081843456543 \times 10.$
$x_4 = 0.6597091455775310,$	$y_4 = -0.2590612434977470 \times 10.$
$x_5 = 0.3425581707156584,$	$y_5 = 0.1198213693392275 \times 10.$
$x_6 = 0.1562172101400631 \times 10,$	$y_6 = -0.2429682344935824$
$x_7 = -0.7003092922212495,$	$y_7 = 0.1091449240428980 \times 10.$
$x'_1 = 0.3417003806314313 \times 10,$	$y'_1 = -0.3741244961234010 \times 10.$
$x'_2 = 0.1354581450162550 \times 10,$	$y'_2 = 0.3773459685750630.$
$x'_3 = -0.2590065597810775 \times 10,$	$y'_3 = 0.9386858869551073$
$x'_4 = 0.2025053734714242 \times 10,$	$y'_4 = 0.3667922227200571$
$x'_5 = -0.1155815100160448 \times 10,$	$y'_5 = -0.3474046353808490.$
$x'_6 = -0.8072988170223021,$	$y'_6 = 0.2344915441810937 \times 10.$
$x'_7 = 0.5952396354208710,$	$y'_7 = -0.1947020434263292 \times 10.$

محاسبه می‌شود $\|e_h(T)\|$ نشان‌دهنده نرم بردار خطا در انتهای بازه حل با طول گام h است، گزارش شده است. این ستون‌ها مرتبه همگرایی روش را به صورت عددی تأیید می‌کنند.

۵. نتیجه‌گیری

با توجه به ویژگی‌های برجسته روش استورم-ورلت به عنوان یک روش مرتبه دو از خانواده روش‌های رانگ-کوتا افزاز شده، ترکیب‌هایی خاص از این روش تا مرتبه هشت ساخته شد (اگرچه روند ارائه شده می‌تواند برای به‌دست آوردن روش از مرتبه زوج دلخواه نیز به کار برده شود). نشان داده شد که روش‌های حاصل دارای خاصیت

است [۲۸].

با توجه به اینکه این مسأله یک مسأله هامیلتونی تفکیک‌پذیر است، روش‌های عددی ساخته شده در بخش ۳ برای حل این مسأله روش‌هایی صریح خواهند بود که این امر به میزان قابل توجهی هزینه محاسباتی روش‌ها را (در مقایسه با روش‌های ضمنی) کاهش می‌دهد. نتایج عددی برای این مسأله در جداول ۲ و ۳ گزارش شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش مرتبه در روش‌های عددی ساخته شده در بخش ۳، دقت روش نیز افزایش می‌یابد. همچنین در ستون‌های سوم و پنجم این جداول، تخمینی از مرتبه روش که با فرمول

$$\tilde{p} = \log_p \left(\|e_h(T)\| / e_{h/2}(T) \right),$$

به‌صورت قابل توجهی پایین می‌آورد. نتایج عددی حاصل از روش‌ها روی مسایل هامیلتونی از اجرام سماوی، نشان از توانایی و قدرت آنها در حل چنین مسایلی روی بازه بزرگ دارد.

همتافتگی و تقارن هستند و در نتیجه برای حل مسایل هامیلتونی مناسب هستند. همچنین برخلاف روش‌های رانگ-کوتا متقارن که نمی‌توانند صریح باشند، روش‌های ساخته شده برای مسایل هامیلتونی تفکیک‌پذیر روش‌هایی صریح هستند که این امر هزینه محاسبات را

جدول ۲: خطای سراسری روش‌های مرتبه دو و چهار برای مسأله Pleiades در انتهای بازه حل.

h	روش مرتبه دو		روش مرتبه چهار	
	$\ e_h(\tau)\ $	\tilde{p}	$\ e_h(\tau)\ $	\tilde{p}
10^{-3}	$3/43 \times 10^{-1}$		$3/73 \times 10^{-2}$	
$\frac{1}{2} \times 10^{-3}$	$8/88 \times 10^{-2}$	1/95	$3/27 \times 10^{-3}$	3/51
$\frac{1}{4} \times 10^{-3}$	$2/24 \times 10^{-2}$	1/99	$2/24 \times 10^{-4}$	3/87
$\frac{1}{8} \times 10^{-3}$	$5/62 \times 10^{-3}$	1/99	$1/44 \times 10^{-5}$	3/96

جدول ۳: خطای سراسری روش‌های مرتبه شش و هشت برای مسأله Pleiades در انتهای بازه حل.

h	روش مرتبه شش		روش مرتبه هشت	
	$\ e_h(\tau)\ $	\tilde{p}	$\ e_h(\tau)\ $	\tilde{p}
10^{-3}	$2/23 \times 10^{-2}$		$1/50 \times 10^{-2}$	
$\frac{1}{2} \times 10^{-3}$	$7/06 \times 10^{-4}$	4/98	$1/90 \times 10^{-4}$	6/30
$\frac{1}{4} \times 10^{-3}$	$1/35 \times 10^{-5}$	5/71	$1/05 \times 10^{-6}$	7/50
$\frac{1}{8} \times 10^{-3}$	$2/22 \times 10^{-7}$	5/93	$4/51 \times 10^{-9}$	7/86

فهرست مراجع

- [10] W. H. Enright, Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 11 (1974) 321–331.
- [11] G. Hojjati, M. Y. Rahimi Ardabili, S. M. Hosseini, New second derivative multistep methods for stiff systems, *Appl. Math. Model.* 30 (2006) 466–476.
- [12] J. C. Butcher, G. Hojjati, Second derivative methods with RK stability, *Numer. Algor.* 40 (2005) 415–429.
- [13] A. Abdi, G. Hojjati, An extension of general linear methods, *Numer. Algor.* 57 (2011) 149–167.
- [14] A. Abdi, Construction of high-order quadratically stable second-derivative general linear methods for the numerical integration of stiff ODEs, *J. Comput. Appl. Math.* 303 (2016) 218–228.
- [15] A. Abdi, M. Braś, G. Hojjati, On the construction of second derivative diagonally implicit multistage integration methods, *Appl. Numer. Math.* 76 (2014) 1–18.
- [16] A. Abdi, G. Hojjati, Implementation of Nordsieck second derivative methods for stiff ODEs, *Appl. Numer. Math.* 94 (2015) 241–253.
- [17] A. Abdi, G. Hojjati, Maximal order for second derivative general linear methods with Runge–Kutta stability, *Appl. Numer. Math.* 61 (2011) 1046–1058.
- [18] A. K. Ezzeddine, G. Hojjati, A. Abdi, Sequential second derivative general linear methods for stiff systems, *Bull. Iranian Math. Soc.* 40 (2014) 83–100.
- [1] J. C. Butcher, A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations, *J. Assoc. Comput. Mach.* 12 (1965) 124–135.
- [2] C. W. Gear, Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 2 (1965) 69–86.
- [3] W. B. Gragg, H. J. Stetter, Generalized multistep predictor corrector methods, *J. Assoc. Comput. Mach.* 11 (1964) 188–209.
- [4] J. C. Butcher, On the convergence of numerical solutions to ordinary differential equations, *Math. Comp.* 20 (1966) 1–10.
- [5] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, Chichester 2016.
- [6] J. C. Butcher, Z. Jackiewicz, Implementation of diagonally implicit multistage integration methods for ordinary differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.* 34 (1997) 2119–2141.
- [7] J. C. Butcher, W. N. Wright, The construction of practical general linear methods, *BIT* 43 (2003) 695–721.
- [8] Z. Jackiewicz, *General Linear Methods for Ordinary Differential Equations*, Wiley, New Jersey 2009.
- [9] J. R. Cash, Second derivative extended backward differentiation formulas for the numerical integration of stiff systems, *SIAM J. Numer. Anal.* 18 (1981) 21–36.

Problem Solvers, University of Bari, Italy 2006.

[19] A. K. Ezzeddine, G. Hojjati, A. Abdi, Perturbed second derivative multistep methods, *J. Numer. Math.* 23 (2015) 235–245.

[20] A. Movahedinejad, G. Hojjati, A. Abdi, Second derivative general linear methods with inherent Runge–Kutta stability, *Numer. Algor.* 73 (2016) 371–389.

[21] A. Movahedinejad, G. Hojjati, A. Abdi, Construction of Nordsieck Second Derivative General Linear Methods with Inherent Quadratic Stability, *Math. Model. Anal.* 22 (2017) 60–77.

[22] A. Abdi, J. C. Butcher, Order bounds for second derivative approximations, *BIT* 52 (2012) 273–281.

[23] A. Abdi, J. C. Butcher, Applications of order arrows, *Appl. Numer. Math.* 62 (2012) 556–566.

[24] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin 2006.

[25] J. C. Butcher, The cohesiveness of G-symplectic methods, *Numer. Algor.* 70 (2015) 607–624.

[26] J. C. Butcher, Y. Habib, A. T. Hill, T. J. Norton, The control of parasitism in G-symplectic methods, *SIAM J. Numer. Anal.* 52 (2014) 2440–2465.

[27] M. Hosseini Nasab, G. Hojjati, A. Abdi, G-symplectic second derivative general linear methods for Hamiltonian problems, *J. Comput. Appl. Math.* 313 (2017) 486–498.

[28] F. Mazzia, C. Magherini, F. Iavernaro, Test Set for Initial Value