دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

گروه‌ها و فراگروه‌ها

غلامرضا مقدسی[۱*]، پروانه ذوالفقاری[۲]، بهناز طلوع حقیقی[۳]

[۱و۳] گروه ریاضی محض، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، مشهد، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۴/۳۰

چکیده

در این مقاله ضمن بیان مفاهیم مقدماتی درباره فراگروه‌ها، که ساختار آن براساس خواص یک تراگرد از زیر گروهی از یک گروه است، رابطه بین گروه و فراگروه را بررسی نموده و نشان می‌دهیم که هر گروه یک فراگروه است ولی عکس آن همواره برقرار نمی‌باشد. بعلاوه، شرایطی را می‌یابیم که تحت آن، نظیر هر زیرفراگروه نرمال از یک فراگروه وابسته به یک گروه، زیر گروه نرمالی از آن گروه حاصل می‌گردد. همچنین، با اثبات این مطلب که تکریختی درگروه‌ها حافظ تراگرد در گروه‌های نظیر است نشان می‌دهیم، متناظر با هر تکریختی در گروه‌ها، یک فراریختی بر روی فراگروه‌های وابسته به آن گروه‌ها وجود دارد. سرانجام، قضایای یکریختی برای فراگروه‌ها ثابت می‌گردد. این قضایا که در مورد ارتباط بین سه مفهوم زیر فراگروه نرمال، فراگروه خارج قسمتی و فراریختی باشد به طور مستقیم، همانند آنچه در نظریه گروه‌ها و مدول‌ها وجود دارد، اثبات می‌شود.

واژه‌های کلیدی: همرده، تراگرد، همریختی، فراگروه.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: r.moghadasi@hsu.ac.ir

۱. مقدمه

زوج مرتب (A,B) از زیرمجموعه‌های یک گروه G یک جفت تراگرد[۱] نامیده می‌شود هرگاه، هر عضو در AB یک نمایش منحصر به فرد داشته باشد. این تعریف توسط کپکا[۲] و نیمنما[۳] در مقاله [۱] در سال ۱۹۹۰مطرح گردید. پس از آن توسط لال[۴] در سال ۱۹۹۶مورد مطالعه قرار گرفت[۲]. با تعمیم این تعریف به زیرگروه‌های یک گروه نتیجه می‌گردد زوج مرتب (H,M) از زیرگروه‌های گروه G یک جفت تراگرد است اگر و تنها اگر $H\cap M=\{e_G\}$. اکنون اگر H و M به ترتیب یک زیرگروه و یک زیرمجموعه از گروه G باشند، آن‌گاه (H,M) یک جفت تراگرد از گروه G است اگر و تنها اگر برای هر $g\in G$ مجموعه $M\cap Hg$ شامل فقط یک عضو از گروه G باشد و $H\cap M = \{e_G\}$. جهت مطالعه بیشتر درباره‌ی مطالب پایه‌ای برای ساختار تراگردها می‌توان به [۲، ۳، ۴، ۵، ۹، ۱۰] مراجعه نمود. در ادامه روند تحقیق درباره‌ی تراگردها، نویسندگان مفهوم فراگروه‌ها وابسته به تراگردها را تعریف کرده و نتایج جالب توجهی در [۶ ، ۷] ارائه داده‌اند. در سراسر این متن از مفاهیمی استفاده خواهیم کرد که از این مراجع انتخاب شدند و به دلیل اهمیت این مطالب، به برخی از تعاریف و قضایای مهم اشاره خواهیم کرد. اگر H زیرگروهی از گروه G باشد زیرمجموعه M از گروه G را یک تراگرد راست می‌نامیم هرگاه برای هر $g\in G$ داشته باشیم $|M \cap Hg| = 1$ و $e_G\in M$. بر این اساس خواهیم داشت $G = HM$. تراگرد چپ را همانند تراگرد راست براساس همرده‌های چپ می‌توان تعریف نمود. لذا اگر H یک زیرگروه از گروه G و M یک تراگرد چپ از H در G باشد، آن‌گاه $G = MH$. با فرض آنکه M یک تراگرد راست باشد نتیجه می‌شود $MH\subseteq HM$. بنابراین برای هر $a,b\in M$ با توجه به آن که $G=HM$ نتیجه می‌گیریم عناصر منحصر بفرد $h\in H$ و $m\in M$ چنان وجود دارند که $ab=hm$. عناصر h و m را به ترتیب با $(a,b)h$ و $[a,b]$ نشان می‌دهیم. در این نوشتار تمام مطالب براساس تراگرد راست می‌باشد.
بنابراین می‌توان عمل دوتایی α را روی مجموعه M به صورت زیر تعریف نمود:

$\alpha: M \times M \longrightarrow M$
$(m_1,m_2)\longmapsto[m_1,m_2]$

هم‌چنین، برای هر عضو $m\in M$ و $h\in H$، عناصر منحصر به فرد $m'\in M$ و $h'\in H$ چنان موجودند که $mh=h'm'$. h' و m' را به ترتیب با ${}^mh$ و m^h نمایش می‌دهیم. از این‌رو می‌توان برای هر $h\in H$ عمل یک تایی β_h را روی مجموعه M به صورت زیر تعریف کرد.
$\beta_h: M\longrightarrow M\quad m\longmapsto m^h$
اکنون آماده‌ایم تا مفهوم فراگروه راست را یادآوری کنیم.
تعریف ۱. ۱. تراگرد راست M از زیرگروه H از گروه G را همراه با یک عمل دوتایی:
$\alpha : M \times M \longrightarrow M\ (m_1, m_2) \longmapsto [m_1, m_2]$
و اعمال یک تایی:
$\beta_h : M\longrightarrow M\ m \longmapsto m^h$
برای هر $h\in H$ یک **فراگروه راست** نامیم و با ${}_HM$ نمایش می‌دهیم.

نظیر این تعریف را می‌توان برای **فراگروه‌های چپ** M_H که از تراگردهای چپ حاصل می‌شوند در نظر گرفت. لازم به ذکر است که برای هر $\beta_h, h\in H$ یک تابع یک به یک است. هم‌چنین برای هر $a\in G$، معکوس a عضوی از G است. لذا عناصر $h\in H$ و $m\in M$ چنان وجود دارند که $a^{-1} = hm$. عناصر h و m را به ترتیب با $a^{(-1)}$ و $a^{[-1]}$ نمایش می‌دهیم. برای هر عنصر در فراگروه راست معکوس چپ وجود دارد. به عبارت دیگر برای هر$a\in M$ عنصر $a^{[-1]} \in M$ چنان موجود است که $[a^{[-1]}, a] = e$.
در ادامه به برخی از خواص جبری در ساختار فراگروه‌های راست اشاره می‌کنیم. برای دیدن جزئیات اثبات نتایج زیر می‌توان قضیه ۲. ۱ در [۶] را ملاحظه نمود.
قضیه ۱. ۲. [۶] فرض کنید ${}_HM$ یک فراگروه راست از گروه G باشد. در این صورت

۱. برای هر $a\in M$ و $h,h'\in H$، $(a^h)^{h'}=a^{hh'}$.
۲. برای هر $a,b\in M$ و $h\in H$، $[a,b]^h =[a^{b_h},b^h]$
۳. برای هر $a,b,c\in M$، $[[a,b],c]=[a^{(b;c)_h}, [b,c]]$
۴. برای هر $a\in M$ ، $e^h = e, a^e = a$
۵. برای هر $a\in M$ ، $[a, e] = [e, a] = a$

1. Transversal
2. *Kepka*
3. Nemenmaa
4. Lal

۶. برای هر $a\in M$ ،

$[a^{[-1]}, a] = e, \quad [a^{a(-1)}, a^{[-1]}] = e$

۷. برای هر $a\in M$ ،

$a^{(-1)\,(a[-1]_h,a)}h = e, a(a^{(-1)})(a^{a(-1)}; a^{[-1]})h=e$

۸. برای هر $a\in M$ ،

$(a^{[-1]})^{[-1]} = a^{a(-1)}$

۹. برای هر $a,b,c\in M$ اگر $[a,c] = [b,c]$ آنگاه $a=b$ (قانون حذف از راست)

۱۰. برای هر $a,b\in M$ معادله $[x,a] = b$ دارای جواب یکتا در $_HM$ است.

در فراگروه‌های راست، معکوس چپ هر عضو یکتاست. هم‌چنین با توجه به قانون حذف از راست برای فراگروه‌های راست $_HM$ از گروه G می‌توان تابع یک به یک و پوشای $\alpha_a: {}_HM \mapsto {}_HM$ را برای هر $a\in {}_HM$ با ضابطه $\alpha_a(b)=[b,a]$ تعریف نمود.

به سادگی می‌توان ملاحظه نمود که هر گروه، یک فراگروه است ولی با توجه به این که خاصیت شرکت پذیری عمل دوتایی α برای فراگروه‌ها در حالت کلی برقرار نیست (اتحاد ۳ در قضیه ۱. ۲) لذا عکس این مطلب برقرار نمی‌باشد.

مثال ۱. ۳. فرض کنید $G = C^*$ گروه اعداد مختلط بدون صفر و $H =\{z\in C^*: |z|=1\}$ یک زیر گروه از گروه G باشد. مجموعه C^* با عمل ضرب یک گروه آبلی نامتناهی است. مجموعه خارج قسمتی G/H شامل دایره‌های هم‌مرکز است. در این صورت مجموعه اعداد حقیقی منفی فراگروهی از زیرگروه H از گروه G است که گروه نمی‌باشد.

تعریف ۱. ۴ فرض کنید $_HM$ یک فراگروه وابسته به گروه G باشد. در این صورت $_HM$ را فراگروه جابجایی نامیم هرگاه برای هر $a,b\in M$ داشته باشیم $[a,b] = [b,a]$.

قابل توجه است که در هر فراگروه جابجایی قوانین حذف پذیری چپ و راست برقرار است. اثبات قضیه‌ی زیر با استفاده از روابط بین اعضای یک فراگروه به آسانی نتیجه می‌شود.

قضیه ۱. ۵. هر فراگروه جابجایی که عمل دوتایی آن شرکت‌پذیر باشد، یک گروه است.

ملاحظه ۱. ۶. یک گروه غیرآبلی می‌تواند یک فراگروه جابجایی داشته باشد.

مثال ۱. ۷. فرض کنید $H = \{(1), (12)\}$ یک زیرگروه از گروه ناآبلی جایگشتی $G=S_3$ باشد. در این صورت $M = \{(1), (123), (123)\}$. فراگروه جابجایی از زیرگروه H است.

یادآوری می‌کنیم [۸] که یک شبه گروه[۱] عبارت است از یک مجموعه Q همراه با یک عمل دوتایی $*$که برای هر $a,b\in Q$، معادلات $a*x=b$ و $y*a=b$ در Q دارای جواب منحصر به فرد باشند. حال با توجه به اتحاد (۱۰) در قضیه ۱. ۲ و خاصیت جابجایی فراگروه‌ها داریم:

قضیه ۱. ۸. هر فراگروه جابجایی یک شبه گروه است.

۲. فراریختی

برای انتقال اطلاعات جبری بین دو فراگروه، نیازمند ابزار ارتباطی همانند ریخت در جبرها هستیم. برای این منظور مفاهیم اساسی نظیر زیرفراگروه و زیرفراگروه نرمال را یادآوری می‌کنیم [۶].

فرض کنید M یک فراگروه حاصل از زیرگروه H از گروه G با دو عملگر α و β_h باشد. در این صورت یک زیرمجموعه S از فراگروه M را که شامل e می‌باشد یک **زیرفراگروه** از M نامیده می‌شود هرگاه S تحت اعمال α و β_h بسته باشد. به عبارت دیگر S زیرفراگروه از $_HM$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $a,b\in S$ و هر $h\in H$ نتیجه شود$[a,b]^h\in S$.

مثال ۲. ۱. فرض کنید $H =\{e,b\}$ یک زیرگروه از گروه دو وجهی

$G= D_3=\{a^ib^j|\ i = 0,1,2,3 \ \ j = 0,1, a^ib = ba^{-i}\}$.

باشد. در این صورت هشت فراگروه از مجموعه خارج قسمتی

$G/H =\{H,Ha,Ha^2,Ha^3\}$

حاصل می‌گردد. یکی از این فراگروه‌ها عبارت است از

$M = \{e, a, a^2b, a^3\}$

که زیرفراگروه‌های آن عبارتند از:

$N_1= \{e\}, N_2= \{e, a^2b\}, N_3 = M.$

1. Quasigroup

قضیه ۲. ۲. ([۶]) فرض کنید S یک زیرفراگروه از فراگروه $_HM$ از گروه G باشد. در این صورت HS زیرگروهی از G شامل H است.

فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از فراگروه $_HM$ با دو عملگر β_h ، α باشند. دراین صورت

$\alpha(A,B)= [A,B] =\{[a,b] \mid a\in A,b\in B\}$.

اگر $B=\{b\}$ آن‌گاه $[A,B]$ را با $[A,b]$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲. ۳. (لم ۱. ۲ [۶]) فرض کنید S یک زیرفراگروه از فراگروه $_HM$ از یک گروه G باشد. در این صورت

۱. اگر $a\in S$ آن‌گاه $[a,S] \subseteq S$ و $[S,a] = S$.

۲. اگر $a\in M - S$ آن‌گاه $[a,S] \in M - S$.

۳. برای هر $h\in H$ ، $S^h = S$.

دو نتیجه‌ی زیر برای اثبات قضایای یکریختی کاربرد دارند (برای جزئیات بیشتر مرجع[۶] را ببینید.)

قضیه ۲. ۴. فرض کنید R و S زیر فراگروه‌هایی از فراگروه $_HM$ از گروه G باشند. دراین صورت $[S,R]$ زیر فراگروه از فراگروه $_HM$ است اگر و تنها اگر

$[R,S] \subseteq [S,R]$.

نتیجه ۲. ۵. اگر R و S زیرفراگروه‌هایی از فراگروه آبلی $_HM$ باشند، آن‌گاه $[S,R]$ و $[R,S]$ زیر فراگروه‌هایی از فراگروه $_HM$ می‌باشند.

لم ۲. ۶. ([۶]) فرض کنید S یک زیرفراگروه از فراگروه $_HM$ از گروه G باشد و $a,b\in {_HM}$. در این صورت شرایط زیر معادلند.

۱. $a\in [S,b]$،

۲. $[S,a] = [S,b]$،

۳. $a^{b^{(-1)}}, b^{[-1]}\in S$.

فرض کنید $_HM$ یک فراگروه حاصل از زیرگروه H از گروه G باشد. تعداد عناصر $_HM$ را مرتبه آن فراگروه نامند و با $|_HM|$ نمایش می‌دهیم. قبلا ثابت کرده‌ایم که مرتبه هر زیر فراگروه راست با مرتبه هر همرده‌های راست نظیر آن برابر است. یعنی $|S|=|[S,a]|$. هم‌چنین برای یک زیرفراگروه S از M و هر $a,b\in M$ داریم:

$[S,a] \cap [S,b] = \emptyset$ یا $[S,a] = [S,b]$

با استفاده از مطلب بالا می‌توان یک فراگروه مانند $_HM$ را به وسیله هر زیرفراگروه از آن مانند S به رده‌هایی افراز نمود. $_HM =\cup_{a\in {_HM}}[S,a]$

تعداد همرده‌های راست S در $_HM$ را به $[M:S]$ نشان داده و شاخص S در M می‌نامیم. با این مقدمات قضیه لاگرانژ را برای فراگروه‌ها داریم.

قضیه ۲. ۷. ([۶]) فرض کنید S یک زیرفراگروه از فراگروه متناهی $_HM$ ازگروه G باشد. دراین صورت مرتبه S، مرتبه M را عاد می‌کند و داریم:

$|M| = [M:S]|S|$

حال شرایطی را که زیرفراگروهی از یک فراگروه نیاز دارد تا مجموعه همرده‌های نظیر آن تشکیل یک فراگروه جدید بدهند را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۲. ۸. فرض کنید $_HM$ یک فراگروه از گروه G باشد. زیرفراگروه N از فراگروه $_HM$ را، **زیرفراگروه نرمال** از $_HM$ نامیم هرگاه به ازای هر $a,b\in M$،

$[a, [N,b]] = [N, [a, b]]$.

با توجه به تعریف فوق هر فراگروه مانند $_HM$، دارای زیرفراگروه نرمال $\{e\}$ است. در نظریه گروه‌ها هر گروه زیر گروه نرمال خود می‌باشد ولی در فراگروه، $_HM$ یک زیرفراگروه نرمال است هرگاه قانون حذف از چپ برای $_HM$ برقرار باشد.

لم۲. ۹. ([۶]) فرض کنید N یک زیرفراگروه نرمال از فراگروه $_HM$ از گروه G باشد. دراین صورت خواص زیر برقرار است.

۱. برای هر $a\in M$ ، $[N, a] = [a, N]$.

۲. برای هر $a,b\in M$ ، $[[N,a], [N,b]] = [N,[a,b]]$

۳. اگر $[N,b] = N$ آن‌گاه $b\in N$.

۴. اگر S یک زیرفراگروه از فراگروه $_HM$ باشد، آن‌گاه $[N,S]$ یک زیرفراگروه از $_HM$ است بالاخص اگر S نرمال باشد، آن‌گاه $[N,S]$ نیز نرمال است.

در ادامه از یک زیرفراگروه نرمال یک زیر گروه نرمال حاصل می‌گردد.

قضیه ۲. ۱۰. فرض کنید N زیرفراگروهی نرمال از فراگروه M از زیرگروه H از گروه G چنان باشد که $|N|=\frac{1}{2}|M|$. در این صورت HN زیرگروهی نرمال از گروه G است.

اثبات. فرض کنید N زیرفراگروه نرمال از فراگروه M و $|N|=\frac{1}{2}|M|$ در این صورت با توجه به آن که در فراگروه‌های راست عمل دوتایی α دارای خاصیت حذف از سمت راست است و برای هر $a\in M$ داریم $[N,a]=[a,N]$. از این‌رو $[a,b]\in N$ اگر و تنها اگر $a,b\in N$ و یا $a,b\in M-N$. حال با توجه به این نکته ثابت می‌کنیم HN در G یک زیرگروه نرمال است. بنابه قضیه ۲. ۲، HN زیرگروهی از گروه G است. اکنون نشان می‌دهیم HN در G نرمال است.

فرض کنید $g\in G$ و $k\in g^{-1}HNg$ با توجه به اینکه $_HM$ فراگروهی از گروه G است عناصر $h, h', h''\in H$، $n\in N$ و $a\in M$ چنان وجود دارند که $g = ha$ و نیز با محاسباتی ساده نتیجه می‌شود

$$k=g^{-1}h'ng=a^{-1}h^{-1}h'nha=a^{(-1)}a^{[-1]}h''na$$

اکنون با توجه به بند اول ۳ .۲حکم برقرار است.

در این قسمت این سوال طرح می‌شود که آیا نظیر یک زیرگروه نرمال N از گروه G که شامل زیرگروه H از گروه G است. آیا زیر فراگروه نرمالی مانند S از فراگروه $_HM$ می‌توان یافت به قسمی که $N = HS$ به عبارت دیگر آیا تناظر یک به یک بین زیر گروه‌های نرمال شامل زیرگروه H از گروه G و زیرفراگروه‌های نرمال از فراگروه $_HM$ ازگروه G وجود دارد؟

یکی از روش‌های بسیار مهم ساختن دستگاه‌های ریاضی جدید جبری یا غیرجبریی از یک دستگاه ریاضی داده شده، تشکیل خارج قسمت آن دستگاه است. در این بخش نشان می‌دهیم که اگر زیرفراگروهی از یک فراگروه، نرمال باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی هم رده‌های راست آن تشکیل یک فراگروه جدید می‌دهند.

فرض کنید S یک زیرفراگروه نرمال از فراگروه $_HM$ از گروه G باشد در این صورت مجموعه تراگرد راست $\{[S, a]| a\in M\}$ از زیرگروه $H' =\{hS| h\in H\}$ از گروه $G' =\{h[S, a]| h\in H, a\in M\}$ با اعمال زیر

$$\alpha([S, a], [S, b]) = [S, [a, b]]$$

$$\beta_{h'}([S, a]) = [S, a^h], \quad h' = hS$$

تشکیل فراگروهی می‌دهد که آن را **فراگروه خارج قسمتی** می‌نامیم.

تعریف ۲ .۱۱. فرض کنید $_{H_i}M_i$ فراگروه ازگروه G_i برای $i= 1,2$ باشد. بعلاوه φ یک همریختی بین زیرگروه‌های H_1 و H_2 باشد. دراین صورت تابع

$$f : {}_{H_1}M_1 \longrightarrow {}_{H_2}M_2$$

یک **همریختی فراگروهی** (فراریختی) است هرگاه داشته باشیم:

۱. برای هر $m، m'\in M$:

$f([m, m']) = [f(m), f(m')]$.

۲. برای هر $h\in H_1$ و $m\in M_1$:

$f(m^h) = (f(m))^{\varphi(h)}$.

اینک بعضی از خواص همریختی در فراگروه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۲. ۱۲. ([۶]) فرض کنید

$$f : {}_{H_1}M_1 \longrightarrow {}_{H_2}M_2$$

یک فرا ریختی و φ یک همریختی از زیرگروه H_1 به زیرگروه H_1 باشد. در این صورت

۱. فراریختی‌ها حافظ عضو همانی، معکوس چپ هستند.

۲. اگر همریختی φ برو باشد آن‌گاه، نقش همریخت هر زیرفراگروه از $_{H_1}M_1$ زیر فراگروهی از $_{H_2}M_2$ خواهد بود.

۳. تصویر معکوس یک زیرفراگروه $_{H_2}M_2$ یک زیرفراگروه از $_{H_1}M_1$ است.

برای ادامه‌ی کار، نیاز به معرفی مفهوم هسته‌ی همریختی‌های بین فراگروه‌ها را داریم.

تعریف ۲ .۱۳. فرض کنید

$$f : {}_{H_1}M_1 \longrightarrow {}_{H_2}M_2$$

یک فراریختی باشد. مجموعه‌ی

$$K= \{m\in {}_{H_1}M_1: f(m)=e_{{}_{H_2}M_2} \}$$

را **هسته‌ی فراریختی** f می‌نامیم و آن را با $Kerf$ نمایش می‌دهیم. به سادگی نتیجه می‌گردد فراریختی f یک به یک است اگر و تنها اگر $Kerf=\{e\}$.

در [۷] با استفاده از مفهوم همنهشتی قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیه ۲ .۱۴. هسته‌ی هر فراریختی یک زیرفراگروه نرمال است.

در این قسمت ابتدا نشان می‌دهیم تکریختی در گروه‌ها حافظ تراگرد است و سپس با استفاده از آن قضایای یکریختی در فراگروه‌ها بررسی می‌شود و ارتباط بین فراریختی‌ها و فراگروه خارج قسمتی نشان داده می‌شود.

لم ۲ .۱۵. اگر $f:G_1 \longrightarrow G_2$ یک تکریختی گروهی و (H, M) یک تراگرد راست از گروه G_1 باشد، آن‌گاه $(f(H),f(M))$ یک تراگرد راست از گروه G_2 است.

اثبات. اگر H زیرگروه G_1 و f همریختی باشد، آن‌گاه $f(H)$ زیرگروهی از G_2 است. اکنون ثابت می‌کنیم $(f(H), f(M))$ تراگرد است. چون

$f(M)\neq \emptyset$ ،$e_2 = f(e_1)\in f(M)$

بعلاوه اگر $a\in f(M)\cap f(H)$، آن‌گاه $a=f(h)= f(m)$ به ازای $h\in H$ و $m\in M$. لذا

$f^{-1}(a) = m,\ f^{-1}(a) = h.$

حال از یک به یک بودن f نتیجه می‌شود $h=m$. از طرفی $H\cap M = \{e_1\}$ داریم، $a= f(h)=f(m)=e_2$.

از این‌رو $a = f(e_1) = e_2$.

به آسانی می‌توان بررسی نمود برای هر

$f(H)g\cap f(M)$ ،$g\in f(G_1)$

ناتهی است. اکنون فرض کنید برای هر

$a, b\in f(H)g\cap f(M)$ ،$g\in f(G_1)$

در این صورت h_1h_2 و $m1\ ,\ m_2 \in M$ موجودند به‌طوری که

$a = f(h_1)g,\ b= f(h_2)g$

و

$a = f(m_1),\ b= f(m_2)$

بنابراین

$g = (f(h_2))^{-1} b,\ g = (f(h_1))^{-1}a$

در نتیجه

$(f(h_1))^{-1}a = (f(h_2))^{-1}b$

پس

$f(h_1^{-1})a = f(h_2^{-1})b$

این نتیجه می‌دهد

$f(h_1^{-1})f(m_1) = f(h_2^{-1})f(m_2)$

از این‌رو

$f(h_1^{-1}m_1) = f(h_2^{-1}m_2)$

چون f یک به یک است

$H_1^{-1}m_1 = h_2^{-1}m_2$

از آن‌جا که (H,M) تراگرد است، داریم

$h_1^{-1}= h_2^{-1},\ m_1= m_2$

پس $a = b$ و

$|f(H)g\cap f(M)|= 1$

بنابراین $(f(H), f(M))$ یک تراگرد راست است.

حال قبل از بیان قضایای یکریختی فراگروه‌ها، به بیان حکم مهم زیر می‌پردازیم.

قضیه ۲ . ۱۶. متناظر با هر تکریختی در گروه‌ها، یک فراریختی روی فراگروه‌های وابسته به آن گروه‌ها وجود دارد.

اثبات. فرض کنید $\varphi:G\longrightarrow G'$ یک تکریختی گروه‌ها و $_HM$ یک فراگروه از گروه G باشد. در این صورت، $_{\varphi(H)}\varphi(M)$ بنابه قضیه ۲. ۱۵ یک فراگروه از گروه $\varphi(G)$ است. اگر $a,b\in {}_HM$، آن‌گاه

$\varphi(ab) = \varphi({}^{(a,b)}h[a, b])=\varphi({}^{(a,b)}h)\varphi([a, b]).$

از طرفی داریم

$\varphi(a)\varphi(b) = {}^{(\varphi(a),\varphi(b))}\varphi(h')[\varphi(a), \varphi(b)].$

از برابری روابط فوق و خاصیت تراگرد نتیجه می‌شود:

$\varphi({}^{(a,b)}h) = {}^{(\varphi(a),\varphi(b))}\varphi(h')$

و

$\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]).$

حال فرض کنید $m\in {}_HM$ و $h\in H$. در این صورت $\varphi(mh)= \varphi(m)\varphi(h)$. با محاسبات مشابه آنچه در بالا بیان شد، نتیجه می‌شود $\varphi(m^h)=\varphi(m)^{\varphi(h)}$ و $\varphi({}^mh)={}^{\varphi(m)}\varphi(h)$.

اکنون ثابت می‌کنیم تحت شرایطی، عکس قضیه ۲. ۱۶ نیز برقرار است.

قضیه ۲ .۱۷. فرض کنید $_{H_i}M_i$ فراگروهی از گروه G_i برای $i=1,2$ و

$f:\ {}_{H1}M_1 \longrightarrow {}_{H2}M_2$

یک فراریختی و

$\varphi:H_1\longrightarrow H_2$

یک همریختی گروه‌ها باشد به قسمی که

$\varphi({}^{(a^h,b)}h) ={}^{(f(a)^{\varphi(h)},f(b))}h$.

در این صورت نگاشت

$\psi:G_1\longrightarrow G_2$

$\psi(g) = \psi(ha) = \varphi(h)\, f(a)$

یک همریختی از گروه G_1 به گروه G_2 است.

اثبات. خوش تعریفی ψ بدیهی است. حال فرض کنید $g_1, g_2\in G$.

در این صورت وجود دارند $h_i\in H_i$ و $a_i\in M_i$ به‌طوری که $g_i=h_ia_i$ برای $i=1,2$. تساوی‌های زیر با استفاده از روابط قضیه ۱. ۲ در فراگروه‌ها و این واقعیت که f و φ

به ترتیب همریختی در گروه‌ها و فراریختی هستند حاصل می‌گردد.

$\psi(g_1g_2)=\psi(h_1{}^{a1}h_2{}^{(a_1^{h2},a_2)}h[a_1^{h2},a_2])$
$=\varphi(h_1{}^{a_1}h_2{}^{(a_1^{h2},a_2)}h)f([a_1^{h2},a_2])$
$=\varphi(h_1)\varphi({}^{a_1}h_2)\varphi({}^{(a_1^{h2},a_2)}h)f([(a_1^{h2},a_2)])$

هم‌چنین داریم

$\psi(g_1)\ \psi(g_2)=$
$\varphi(h_1)f(a_1)\varphi(h_2)f(a_2)=$
$\varphi(h_1)({}^{f(a_1)}\varphi(h_2))({}^{(f(a_1)^{\varphi(h2)},f(a2))}$
$h[f(a_1)^{\varphi(h2)},f(a_2)]$

حال کافیست در تعریف همریختی φ قرار دهید $h=e$ و $b=e$ در این صورت $\varphi({}^{a}h)={}^{f(a_1)}h$، φ لذا با توجه به فراریختی f، نتیجه حاصل می‌گردد.

در قضیه ۲. ۱۷ اگر φ و f برو باشند آن‌گاه ψ بروریختی است.

در ادامه قضایای همریختی و یکریختی برای فراگروه‌ها بررسی می‌گردد. این قضیه‌ها در مورد ارتباط بین سه مفهوم زیرفراگروه نرمال (که در تناظر با همنهشتی‌ها هستند)، فراگروه خارج قسمتی و فراریختی می‌باشد. قضایای یکریختی برای فراگروه‌ها از دیدگاه جبر جامع در مرجع[۶] بررسی شده است. در این پژوهش این قضایا را به‌طور مستقیم، مشابه آن چه در نظریه گروه‌ها، حلقه‌ها و مدول‌ها وجود دارد، اثبات نمودیم.

قضیه ۲. ۱۸. (قضیه‌ی اول یکریختی) فرض کنید $f:{}_HM\longrightarrow{}_{H'}M'$ یک فراریختی چنان باشد که همریختی $\varphi:H\longrightarrow H'$ مفروض در تعریف فراریختی برو باشد. در این صورت

${}_HM/Kerf\cong f({}_HM).$

اثبات. بنابه قسمت دوم قضیه ۲. ۱۲، $f({}_HM)$ زیرفراگروهی از ${}_{H'}M'$ است. فرض کنید $N=Kerf$. بنابه قضیه‌ی ۲. ۱۴، N زیرفراگروه نرمال است. لذا به ازای هر $[N,m]\in{}_HM/N$، تابع $g:{}_HM/N\longrightarrow f({}_HM)$ را به صورت $g([N,a])=f(a)$ می‌توان تعریف نمود. حال ثابت می‌کنیم g خوش تعریف و یک به یک است.

$[N,a]=[N,b]$
$\Leftrightarrow [a^{b(-1)},b^{[-1]}]\in N$
$\Leftrightarrow f(a^{b(-1)},b^{[-1]})=e$
$\Leftrightarrow [(f(a))^{(f(b))^{(-1)}},(f(b))^{[-1]}]=e$
$\Leftrightarrow ((f(a))^{(f(b))^{(-1)}}=(f(b))^{(f(b))^{(-1)}}$
$\Leftrightarrow f(a)=f(b).$

فرض کنید $a'\in f(M)$. در این صورت وجود دارد $a\in M$ به‌طوری که $a'=f(a)$. بنابراین $g([N,a])=f(a)$ یا $g([N,a])=a'$

این نشان می‌دهد g پوشاست. سرانجام به ازای هر $[N,a],[N,b]\in{}_HM/N$ داریم

$g([[N,a],[N,b]])=g([N,[a,b]])=f([a,b])$
$=[f(a),f(b)]=[g([N,a]),g([N,b])]$

این نشان می‌دهد که g در شرط اول تعریف فراریختی صدق می‌کند. اگر $[N,a]\in{}_HM/N$ و $h\in H$، آن‌گاه $h'=hN$ و

$g([N,a])^{h'}=g([N,a^h])=f(a^h)=(f(a))^{\varphi(h)}=(g([N,a]))^{\varphi(h)}$

که φ همریختی از گروه H و H' است. بنابراین:

${}_HM/N\cong f({}_HM).$

ملاحظه می‌شود که به ازای هر فراگروه نرمال N از فراگروه ${}_HM$، فراگروه خارج قسمت ${}_HM/N$ تصویر هم‌ریخت ${}_HM$ است و به ازای هر تصویر هم‌ریخت ${}_{H'}M'$ زیرفراگروه N از ${}_HM$ به قسمتی وجود دارد که ${}_HM/N\cong{}_{H'}M'$.

مثال ۲. ۱۹. فرض کنید

$G=\{a^ib^j|\ i=0,1,2\ j=0,1\ a^ib=ab^{-i}\}$

و $H=\{e,b\}$ در این صورت از مجموعه‌ی خارج قسمتی $G/H=\{H,Ha,Ha^2\}$ فراگروه‌های زیر حاصل می‌شود.

$M_1=\{e,a,a^2\}\qquad M_2=\{e,a,ab\}$
$M_3=\{e,a^2b,a^2\}\qquad M_4=\{e,a^2b,ab\}$

تنها زیرفراگروه نرمال از فراگروه‌های M_3، M_4 و M_2 زیرفراگروه $\{e\}$ است. لذا تا حد یکریختی هر کدام از این فراگروه‌ها شامل یک تصویر هم ریخت $M_i/\{e\}$ هستند $(i=2,3,4)$. اما فراگروه M_1 دارای دو زیرفراگروه نرمال، یعنی خودش و $\{e\}$ است. بنابراین تا حد یکریختی این فراگروه شامل دو تصویر هم ریخت

$M_i/\{e\}\cong M_1\ ,\ M_1/M_1\cong\{e\}$

می‌باشد.

لم ۲. ۲۰ . فرض کنید N و N' دو زیرفراگروه نرمال از فراگروه ${}_HM$ باشند به‌طوری که $N\subseteq N'$ در این صورت N'/N زیرفراگروه نرمالی در ${}_HM/N$ است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم N'/N زیرفراگروهی از ${}_HM/N$ است.

$[N, e'] \in N'/N \Rightarrow N'/N \neq \emptyset,\ N'/N \subseteq {}_HM/N$

به ازای هر $n'_1, n'_2 \in N$ داریم

$[N, n'_1], [N, n'_2] \in N'/N$.

بنابراین

$[[N,n'_1], [N,n'_2]] = [N, [n'_1, n'_2]] = [N,n'_3] \in N'=N$

که

$[n'_1, n'_2] = n'_3 \in N'$

بنابراین N'/N نسبت به عمل α بسته است.

حال به ازای هر $[N,n'] \in N'/N$ و $h \in H$ داریم:

$[N, n']^{hN} = [N, n'^h] = [N, n'_1] \in N'/N$

که $n'_1 = n'^h \in N$ (چون N' زیرفراگروهی از ${}_HM$ است.) بنابراین N'/N نسبت به عمل β بسته است. در نتیجه N'/N زیرفراگروهی از ${}_HM/N$ است.

اکنون ثابت می‌کنیم N'/N زیرفراگروه نرمالی از فراگروه ${}_HM/N$ است. به ازای هر $a,b \in {}_HM$ خواهیم داشت $[N, a], [N, b] \in {}_HM/N$. بنابراین با استفاده مکرر از اتحادهای لم ۲. ۹ داریم:

$$
\begin{aligned}
&[[N, a], [N'/N], [N, b]] \\
&= [[N,a],[[N,N'], [N, b]]] \\
&= [[N, a], [N, [N', b]]] \\
&= [N, [a, [N', b]]] \\
&= [N, [N', [a, b]]] \\
&= [[N, N'], [N, [a, b]]] \\
&= [N'/N, [N, [a, b]]] \\
&= [N'/N, [[N, a], [N, b]]]
\end{aligned}
$$

قضیه ۲. ۲۱. (دومین قضیه‌ی یکریختی در فراگروه‌ها) اگر N و N' زیرفراگروه‌هایی نرمال از فراگروه ${}_HM$ بر روی گروه G باشند به‌طوری که $N \subseteq N'$، آن‌گاه

$$\frac{\frac{{}_HM}{N}}{\frac{N'}{N}} \cong \frac{{}_HM}{N'}$$

اثبات. نگاشت $f: \frac{{}_HM}{N} \longrightarrow \frac{{}_HM}{N'}$ با ضابطه‌ی $f([N,a]) = [N',a]$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم f یک فراریختی است. برای هر $[N,a],[N,b] \in {}_HM/N$

$$
\begin{aligned}
&[N, a] = [N, b] \Leftrightarrow [a^{b(-1)}, b^{[-1]}] \in N \\
&\Leftrightarrow a \in [N, b] \subseteq [N', b] \\
&\Leftrightarrow a \in [N', b] \\
&\Leftrightarrow [N', a] = [N', b] \\
&\Leftrightarrow f([N, a]) = f([N, b])
\end{aligned}
$$

بنابراین f خوش تعریف و یک به یک است. اگر $[N,a],[N,b] \in {}_HM/N$ که $a,b \in {}_HM$ آن‌گاه با توجه به اتحادهای لم ۲. ۹ داریم:

$$
\begin{aligned}
f([[N, a], [N, b]]) &= f([N, [a, b]]) \\
&= [N', [a, b]] \\
&= [[N', a], [N', b]] \\
&= [f([N,a]), f([N,b])]
\end{aligned}
$$

همچنین به ازای $h \in H$ و $[N,a] \in {}_HM/N$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&f([N,a]^{hN}) = f([N, a^h]]) \\
&= [N', a]^h \\
&= (f([N, a]))^h
\end{aligned}
$$

از این‌رو شرایط تعریف فراریختی بودن برقرار است. اکنون ثابت می‌کنیم N'/N هسته‌ی فراریختی f است. فرض کنید $[N,a] \in N'/N$ لذا داریم

۱. اگر $a \in N$، آن‌گاه $[N,a]=N$ در این صورت

$f([N,a]) = f(N) = e_{{}_HM/N} \Leftrightarrow [N, a] \in Kerf$

۲. اگر $a \in M - N$، آن‌گاه

$f([N,a]) = [f(N), f(a)] = f(N) = e_{{}_HM/N} \Rightarrow [N, a] \in Kerf$

بنابراین N'/N زیرمجموعه‌ی هسته‌ی فراریختی است شمول عکس نیز سر راست است و بنابراین $Kerf = N'/N$ با توجه به لم ۲. ۲۰ $N'/N \trianglelefteq {}_HM/N$.

لذا با توجه به قضیه‌ی اول یکریختی در فراگروه‌ها داریم:

$$\frac{\frac{{}_HM}{N}}{\frac{N'}{N}} \cong \frac{{}_HM}{N'}$$

قضیه ۲. ۲۲. (سومین قضیه‌ی یکریختی در فراگروه‌ها) فرض کنید N زیرفراگروهی نرمال و S زیرفراگروهی از فراگروه M از گروه G باشند. در این صورت

$$\frac{S}{S \cap N} \cong \frac{[N, S]}{N}$$

اثبات. با توجه به آنکه عنصر خنثی فراگروه $[N, S]$ فراگروه N است و مجموعه شامل عنصر خنثی از هر فراگروه تشکیل زیر فراگروه نرمال از آن را می‌دهد داریم $N \trianglelefteq [N,S]$. بنابراین می‌توان تابع $\varphi: S \longrightarrow \frac{[N,S]}{N}$ با ضابطه $a \mapsto [N,a]$ را برای هر $a \in S$ تعریف نمود. به آسانی می‌توان نشان داد که تابع φ در هر دو شرط فراریختی صدق می‌کند.

فرض کنید $[N, [N, a]] \in [N, S]/N$ عضوی دلخواه باشد. در این صورت، وجود دارد $a\in S$ به‌طوری که $\varphi(a)=[N,a]=[N,[N,a]]$ بنابراین φ یک فراریختی برو است. هم‌چنین:

$$Ker(\varphi)= \{a\in S|\ [N,a] \in N\} = S\cap N.$$

حال با توجه به ۲. ۱۸ نتیجه حاصل می‌گردد.

□

فهرست منابع

[1] Kepka, T. and Niemenmaa, M. On Multiplication Group of Loops. J. Algebra, 135. (1990), 112-122.

[2] Lal, R. Transversals in Groups, J. Algebra, 181. (1996), 70–81.

[3] Baer, R. Nets and groups, Trans. Amer. Math. Soc. 46, (1939), 110-141.

[4] Kilp, M. Knauer, U. and Mikhalev, A. Monoids, Acts and Categories, Walter de Gruyter, Berlin, New York (2000).

[5] Milne, J. S. Algebraic Groups, Cambridge University, (2015).

[6] Moghaddasi, Gh. Tolue, B. and Zolfaghari, P. On the structure of the ultra-groups over a finite group, U.P.B. Sei. Bull., Series A. Vol .78, no. 2, (2016), 173-184.

[7] Moghaddasi, Gh. and Zolfaghari, P. The quotient Ultra-group. Italian journal of pure and applied mathematics -no. 36-(2016),211-218.

[8] Pflugfelder, H. Quasigroups and loops Introduction, Sigma Series in Pure Mathematics, Volume. 7, Berlin, Heldermann Verlag, (1990).

[9] Roman, S. Fundamentals of Group Theory An Advanced Approach, Birkhauser, (2012).

[10] Smith, J. D. H. Introduction to Abstract Algebra Second Edition, CRC Press, (2016).