دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره ششم، تابستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل مسئله معکوس ماکزیمم جریان در شبکه پویا تحت فاصله همینگ تجمعی وزن‌دار*

هاجر بنی خادمی[۱]، حسن صالحی فتح آبادی[۲]**

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، کرج، ایران
(۲) عضو هیأت علمی، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج، کرج، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۳/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۶/۳۱

چکیده

معکوس ماکزیمم جریان پویا یکی از مهم‌ترین مسائل شبکه‌های جریان می‌باشد که در تحقیقات پیشین، تحت معیار فاصله اقلیدسی مورد بررسی قرار گرفته است. اما اخیراً مطالعات گسترده‌ای در زمینه مسائل معکوس در شبکه‌های ایستا تحت معیار همینگ، که ناشی از کاربردهای عملی آن است، انجام گرفته است. لذا در این مقاله معکوس ماکزیمم جریان را در شبکه پویا تحت معیار همینگ مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای جریان داده شده در شبکه پویا، می‌خواهیم با کمترین تغییرات ممکن در بردار ظرفیت کمان‌ها، جریان داده شده، ماکزیمم جریان در شبکه باشد. بکارگیری فاصله همینگ بدلیل کاربردهای عملی آن در مواقعی که در آن تنها تعداد کمان‌هایی که ظرفیتشان تغییر می‌کند بدون در نظر گرفتن بزرگی تغییرات، برایمان اهمیت دارد. لذا در این مقاله بعد از اثبات نتایج اولیه، یک مسئله کمترین برش پویا برای حل معکوس ماکزیمم جریان ارائه شده است. همچنین الگوریتم بر مبنای بهینه‌سازی ترکیبیاتی برای حل مسئله معکوس در زمان چندجمله‌ای ارائه شده است و در نهایت الگوریتم پیشنهادی روی یک شبکه نمونه پیاده‌سازی شده است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی معکوس، شبکه جریان پویا، فاصله همینگ، نرم اقلیدسی

---

*. The weighted sum-type Hamming distance

**. hsalehi@ut.ac.ir

۱. مقدمه

فرض کنید که $N = (V, A, u, \tau)$ یک شبکه جریان پویا شامل مجموعه n عضوی V از رئوس، مجموعه m عضوی A از کمان‌ها، بردار ظرفیت m بعدی $u: A \to R$ و بردار زمان عبور m بعدی $\tau: A \to R^+$ باشد. برای هر کمان $(i, j) \in A$، u_{ij} ظرفیت کمان (i, j) و τ_{ij} زمان لازم جهت عبور یک واحد جریان از کمان (i, j) محسوب می‌شوند. گره منبع در شبکه را با s و گره مقصد را با t نشان می‌دهیم.

جریان پویای f از گره منبع s به گره مقصد t، با افق زمانی T روی شبکه N، توسط یک مجموعه از توابع اندازه پذیر لبگ $\forall (i, j) \in A, f_{ij}: [0, T] \to R^+$ تعریف می‌شود که در آن $f_{ij}(\theta)$ نرخ جریان ورودی به کمان $(i, j) \in A$ در زمان θ را نشان می‌دهد. با توجه به افق زمانی T، $\forall \theta \in [T - \tau_{ij})\ , f_{ij}(\theta) = 0$. در یک شبکه پویا که در آن ذخیره جریان در گره‌های غیر پایانه‌ای مجاز نیست و زمان بطور گسسته تغییر می‌کند، جریان پویای $f(\theta)$ شدنی است، اگر در محدودیت‌های زیر صدق کند:

$$\text{i)}\ \ \sum_{j \epsilon V} f_{ij}(\theta) - \sum_{k \epsilon V} f_{ki}(\theta - \tau_{ki}) = 0$$
$$\forall \theta \in \{0,1, \dots, T\}, \quad \forall i \notin \{s, t\} \quad (a\ 1-1)$$
$$\text{ii)}\ 0 \le f_{ij}(\theta) \le u_{ij}$$
$$\forall (i, j) \in A \quad , \forall \theta \in \{1,2, \dots, T\} \quad (b\ 1-1)$$

که در آن محدودیت $(a\ 1-1)$، محدودیت‌های تعادل جریان می‌باشد و محدودیت $(b\ 1-1)$، محدودیت‌های ظرفیت می‌باشد. مقدار یک جریان شدنی مانند f برابراست با مجموع واحدهای جریانی که در مدت زمان T (افق زمان) از گره مبدأ (منبع) خارج و به گره مقصد وارد شده است. این مقدار را با $v(f)$ نمایش می‌دهند.

در ابتدا دانشمندان ژئوفیزیک بودند که مسائل معکوس را مورد مطالعه قرار دادند. تارانتولا در سال ۱۹۸۸ کتاب جامعی را تحت عنوان کاربرد مسائل معکوس در علم ژئوفیزیک را ارائه کرد [2]. بورتون و توینت در سال‌های ۱۹۹۲و ۱۹۹۴ معکوس مسئله کوتاه‌ترین مسیر را که در زمینه پیشگویی زمین لرزه و شبکه‌های ترافیکی کاربرد دارد را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند [3,4].

اگر جریان پویای شدنی $f^0(\theta)$ با افق زمانی T روی شبکه پویای $N = (V, A, u, \tau)$ مفروض باشد، معکوس مسئله ماکزیمم جریان پویا عبارت است از پیدا کردن بردار ظرفیت u^*، بطوری‌که $f^0(\theta)$ روی شبکه $N = (V, A, u^*, \tau)$ ماکزیمم مقدار را داشته و همچنین بردار ظرفیت u^*، تا حد ممکن کمترین فاصله را از بردار ظرفیت u داشته باشد.

با توجه به اینکه ارزیابی هزینه تغییر ظرفیت در بسیاری از موارد امکان‌پذیر نمی‌باشد یا امکان تعیین مقدار دقیق آن وجود ندارد، می‌خواهیم این مسئله معکوس را تحت فاصله دیگری به نام فاصله همینگ مطرح کنیم.

فرض کنید هزینه اصلاح هر کمان (i, j) به صورت $w_{ij} \ge 0$ باشد و w بردار هزینه اصلاح کمان‌ها باشد. همچنین فرض کنید $f^0(\theta)$ جریان پویای شدنی، شبکه $N = (V, A, u, \tau)$ باشد که ماکزیمم جریان نمی‌باشد. در حالت کلی در مسئله معکوس ماکزیمم جریان تحت مجموع وزندار شده همینگ، به دنبال یافتن بردار هزینه u^* هستیم به طوری‌که:

الف) $f^0(\theta)$ ماکزیمم جریان پویای شبکه $N = (V, A, u^*, \tau)$ باشد.

ب) برای هر کمان $(i,j) \in A\ , -\delta_{ij} \le u^*{}_{ij} - u_{ij} \le \rho_{ij}$ که در آن $\delta_{ij}, \rho_{ij} \ge 0$ است و به ترتیب کران‌های افزایشی و کاهشی ظرفیت u_{ij} می‌باشد.

ج) هدف مینیمم کردن هزینه تغییرات تمامی کمان‌ها، یعنی $\sum_{(i,j)\in A} w_{ij} H(u_{ij}, u^*{}_{ij})$ می‌باشد. که در آن $H(u_{ij}, u^*{}_{ij})$ فاصله همینگ بین u_{ij} و $u^*{}_{ij}$ بطوریکه $H(u_{ij}, u^*{}_{ij}) = 0$ اگر $u_{ij} = u^*{}_{ij}$، در غیر اینصورت ۱ می‌باشد.

تحقیقات فراوانی در زمینه مسائل بهینه‌سازی معکوس در شبکه‌های ایستا، زمانی که هزینه اصلاح[1] بوسیله نرم‌های اقلیدسی، اندازه‌گیری شده‌اند، وجود دارد. در حقیقت معیار مجموع وزن‌دار همینگ، تعداد پارامترهای اصلاح شده را نشان می‌دهد و این متناظر با حالتی است که در آن پارامترهایی که ظرفیت شان تغییر پیدا کرده است برایمان اهمیت دارد، بدون در نظر گرفتن بزرگی این تغییرات. البته این تعدیل در بازه خاصی قرار دارد.

1. modification cost

با توجه به اهمیت حل مسائل معکوس تحت این فاصله، تحقیقات فراوانی در شبکه‌های ایستا صورت گرفته است. از جمله آن‌ها، Liu , Zhang در سال ۲۰۰۶ معکوس مسئله جریان ماکزیمم را تحت فاصله همینگ در شبکه ایستا، در چهار حالت مختلف مورد بررسی قرار داده است[8]. و در سال ۲۰۱۰ جیانگ و لیو معکوس مسئله جریان با کمترین هزینه را با استفاده از فاصله همینگ مطرح کردند[9]. Liu and Yua در سال ۲۰۰۷ و ۲۰۰۸ معکوس مسئله مینیمم برش و درخت پوشای مین–ماکس را تحت فاصله همینگ را مورد بررسی قرار دادند و الگوریتم حل در زمان چندجمله ای را برای آن ها ارائه دادند[10,11]. اما در زمینه معکوس شبکه جریان پویا به خصوص تحت این فاصله، کار مهم و قابل توجهی انجام نگرفته است لذا پرداختن به این موضوع در شبکه‌های پویا ضروری به نظر می رسد.
بنابراین هدف ما در این مقاله حل مسئله معکوس جریان پویای ماکزیمم تحت فاصله همینگ تجمعی وزن‌دار توسط یک مسئله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد و سپس الگوریتم حل آن را ارائه خواهیم داد. لذا این مقاله به صورت زیر بخش‌بندی شده است: بخش دوم توضیح مسئله، شامل تعاریف و قضایای و مطالب مورد نیاز و همچنین بیان مسئله معکوس جریان ماکزیمم پویا تحت فاصله همینگ تجمعی وزن‌دار می‌باشد و بخش سوم شامل ارائه مدل خطی و بخش چهارم الگوریتم حل معکوس جریان ماکزیمم پویا و شبکه نمونه ارائه شده است و در نهایت به ارائه نتیجه‌گیری و پیشنهادات خواهیم پرداخت.

۲. تعاریف و مفاهیم اولیه

قبل از مشخص کردن مسئله و الگوریتم حل مسأله به تعاریف و مفاهیم ذیل نیاز داریم:
ماکزیمم جریان پویا با افق زمانی T روی N، یک جریان پویای شدنی است که بین همه جریان‌های شدنی بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد که مدل خطی آن در حالت زمانی گسسته که ذخیره جریان در گره‌های آن مجاز نیست به صورت زیر می‌باشد:

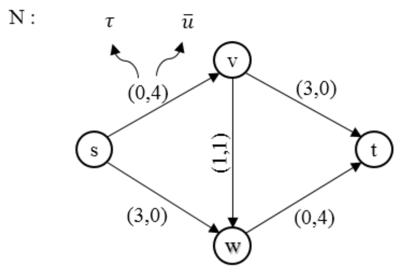
$$\max \quad \mathrm{v(f)}$$
$$\mathrm{s.t.} \sum_{t=0}^{T}\left(\sum_{j\in V} f_{sj}(t) - \sum_{j\in V} f_{js}(t-\tau_{js})\right) = \mathrm{v(f)} \qquad (a\,1-2)$$
$$\sum_{t=0}^{\theta}\left(\sum_{j\in V} f_{ij}(t) - \sum_{k\in V} f_{ki}(t-\tau_{ki})\right) = 0 \quad \forall i \in V-\{s,t\}, \forall\theta \in \{0,1,\dots,T\} \quad (b\,1-2)$$
$$\sum_{t=0}^{T}\left(\sum_{j\in V} f_{ij}(t) - \sum_{k\in V} f_{ki}(t-\tau_{ki})\right) = 0 \quad \forall i \in V-\{s,t\} \qquad (c\,1-2)$$
$$\sum_{k=0}^{T}\left(\sum_{i\in V} f_{ti}(k) - \sum_{i\in V} f_{it}(t-\tau_{it})\right) = -\mathrm{v(f)} \qquad (d\,1-2)$$
$$0 \le f_{ij}(t) \le u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \;, \forall t \in \{1,2,\dots,T\} \quad (e\,1-2)$$

فورد و فولکرسون در سال ۱۹۵۸ نشان دادند [1]، که اگر شبکه زمانی دارای ظرفیت‌ها و زمان‌های انتقال ثابت باشند، آنگاه مسئله ماکزیمم جریان پویا در زمان چند جمله‌ای قابل حل است.

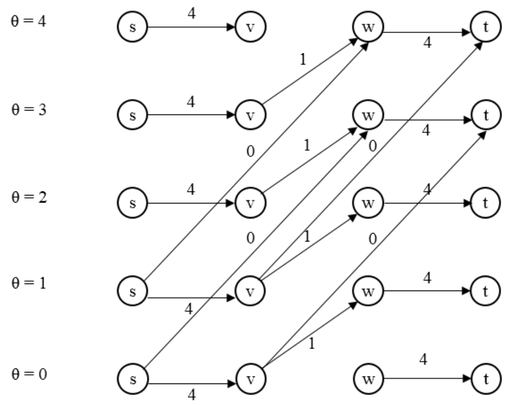
تعریف۲–۱: شبکه گسترش یافته زمانی

فرض کنید شبکه پویای $N=(V,A,u,\tau)$ و افق زمانی T داده شده‌اند. شبکه گسترش یاقته زمانی[1] N که آن‌را با $N(T)=(V(T),A(T),u^T,\tau^T)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود.
به ازای هر $\theta = 0,1,2,\dots,T$ یک نمونه از شبکه N داریم. گره v در نمونه θ ام را با v_θ و به ازای هر کمان $(x,y)\in A$ با ظرفیت u_{xy} و زمان عبور τ_{xy}، x_θ را با کمانی با ظرفیت u_{xy} به $x_{\theta+\tau_{xy}}$ وصل می‌کنیم. به این ترتیب شبکه ایستایی را بدست می‌آوریم که ارسال جریان روی آن معادل است با ارسال جریان روی شبکه پویای N. شکل ۱–۱ نمونه‌ای از یک شبکه پویا می‌باشد که اعداد روی کمان‌ها نشان‌دهنده زمان عبور کمان‌ها و ظرفیت کمان–ها به ترتیب می‌باشند. شبکه گسترش یافته زمانی شکل ۱–۱، به ازای $T=5$ در شکل ۱–۲ رسم شده است.

1. Time-expanded Network



شکل ۱-۱: نمونه ای از یک شبکه جریان پویا



شکل ۱-۲: شبکه گسترش یافته زمانی

تعریف ۲-۲: برش ایستا: اگر $\emptyset \neq S \subset V$ و $\bar{S} = V - S$ باشند، آنگاه مجموعه‌ای از کمان‌ها که یک سر آنها در S و سر دیگر آنها در $\bar{S}$ قرار دارد، یک برش[1] نامیده می‌شود و آن را با $[S,\bar{S}]$ نمایش می‌دهیم. برش $[S,\bar{S}]$ یک (s,t)- برش است هر گاه $s \in S$ و $t \in \bar{S}$. مجموعه $(S,\bar{S}) = \{(i,j) \in A : i \in S, j \in \bar{S}\}$ را مجموعه کمان‌های پیشرو[2] برش $[S,\bar{S}]$ و مجموعه $(\bar{S},S) = \{(i,j) \in A : i \in \bar{S}, j \in S\}$ را مجموعه کمان‌های پسرو[3] برش $[S,\bar{S}]$ نامیده می‌شود[8].

تعریف ۲-۳: برش پویا: در شبکه پویای $N = (V,A,u,\tau)$، برش پویای s-t $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in V}$ توسط مقادیر کرانه‌ای $\alpha_i \geq 0$ برای هر $i \in V$ تعریف می‌شود، به طوری‌که $\alpha_s = 0$ و $\alpha_t \geq T$. گره $i \in V$ در بازه زمانی $[0,\alpha_i)$ به سمت راست برش تعلق دارد و پس از آن به سمت چپ برش منتقل می‌شود. با توجه به این که کمان $(i,j) \in A$ در بازه زمانی $[\alpha_i, \alpha_j - \tau_{ij})$ روی برش α قرار دارد، ظرفیت برش α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(\alpha) = \sum_{(i,j)\in A} \max\{0, \alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij}\} u_{ij} \quad (۲-۲)$$

همچنین توجه شود که هر s-t برش پویای در شبکه پویای N یک برش معادل $s_0 - t_{T-1}$ در N(T) دارد (N(T) شبکه توسعه یافته N است). لذا ظرفیت برش α در رابطه فوق برابر است با مجموع ظرفیت تمام کمان‌هایی که روی برش α در N(T) قرار دارندکه معادل کمان‌های پیشرو در برش s-t شبکه N می‌باشند.

به‌طور کلی قضیه زیر برای هر جریان پویای شدنی f(θ) در شبکه پویایی که ذخیره جریان در گره‌های آن‌ها مجاز نیست، برقرار می‌باشد که شرایط بهینگی یک جریان پویای شدنی را نشان می‌دهد.

قضیه ۲-۱: جریان پویای شدنی f(θ) روی شبکه $N = (V,A,u,\tau)$، جریان ماکزیمم پویاست اگر و تنها اگر V(f) با ظرفیت s-t برش پویا مانند α برابر باشد بطوری‌که $V(f) = u(\alpha)$ که در این حالت شرایط زیر نیز برقرار خواهد بود: اگر $[\alpha_i, \alpha_j - \tau_{ij}) \neq \emptyset$ آنگاه $\forall\theta \in [\alpha_i, \alpha_j - \tau_{ij});\ f_{ij}(\theta) = u_{ij}$ و اگر $[\alpha_j - \tau_{ij}, \alpha_i) \neq \emptyset$ آنگاه $\forall\theta \in [\alpha_j - \tau_{ij}, \delta_i);\ f_{ij}(\theta) = 0$.

فرض کنیم برای جریان پویای شدنی f(θ) داده شده، معکوس جریان ماکزیمم پویا به صورت زیر باشد[6].

$$\min \ \|u^* - u\| \quad (۳-۲)$$

$s.t.$ $N = (V,A,u^*,\tau)$ باشد

$f(\theta)$ ماکزیمم جریان پویا روی شبکه

$$u_{ij} - \delta_{ij} \leq u^*_{ij} \leq u_{ij} + \rho_{ij}$$

1. Cut
2. Forward Arcs
3. Reverse Arcs

توجه: برای جریان پویای شدنی $f(\theta)$، فرض کنیم $f_{ij} = \max_{\theta=0,1,2,\dots,T} f_{ij}(\theta)$ مجموعه c را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c = \left\{ \alpha \middle| \begin{matrix} \forall\theta \in [\alpha_j - \tau_{ij}, \alpha_i);\ f_{ij}(\theta) = 0\ , \\ \forall\theta \in [\alpha_i, \alpha_j - \tau_{ij});\ f_{ij}(\theta) = f_{ij} \end{matrix} \right\}$$

برای بدست آوردن شرط لازم و کافی برای وجود جواب بهینه برای مسئله (۲-۳) برای هر $\alpha \in c$ بردار ظرفیت جدید $u^{*\alpha}$ را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^{*\alpha} = \begin{cases} f_{ij} & \alpha_i < \alpha_j - \tau_{ij} \\ u_{ij} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین برای هر $\alpha \in c$، $f(\theta)$ جریان ماکزیمم شبکه پویا $N = (V, A, u^{*\alpha}, \tau)$ خواهد بود. حال اگر مجموعه L را بدین صورت تعریف کنیم: $L = \{\alpha \epsilon c: u^{*\alpha} \geq u_{ij} - \delta_{ij}\}$ باشد در این صورت قضیه زیر مطرح می‌شود:

قضیه ۲-۲: برای جریان پویای شدنی $f(\theta)$، مسئله معکوس (۲-۳) دارای جواب بهینه است اگر و تنها اگر L ناتهی باشد.

این قضیه در مقاله باقریان اثبات شده است.

اکنون مسأله معکوس جریان ماکزیمم پویا تحت فاصله همینگ تجمعی وزن‌دار به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\min \quad \textstyle\sum_{(i,j)\in A} w_{ij} H(u_{ij}, u^*_{ij}) \qquad (۲\text{-}۴)$$

جریان پویای شدنی $f(\theta)$ یک جریان ماکزیمم پویا برای شبکه $N(V, A, u^*, \tau)$ باشد

$$\text{s.t} \quad -\delta_{ij} \leq u^*_{ij} - u_{ij} \leq \rho_{ij} \quad \forall(i,j) \in A$$

۳. قضایا و نتایج اصلی

قضیه ۳-۱: اگر u^* جواب بهینه مسئله (۲-۴) باشد آنگاه

الف) $\forall(i,j) \in A\ ;\ u_{ij}^* \leq u_{ij}$

ب) $u_{ij}^* = u_{ij} \quad \forall(i,j) \in A:\ \alpha_i^* > \alpha_j^* - \tau_{ij}$

برهان الف: فرض کنید u^* جواب بهینه مسئله (۲-۴) باشد پس $f(\theta)$ یک جریان پویای ماکزیمم از شبکه $N = (V, A, u^*, \tau)$ می‌باشد. با توجه به قضیه (۲-۱) می‌دانیم که یک برش s-t پویای مینیمم مانند α^* از شبکه $N = (V, A, u^*, \tau)$ وجود دارد بطوری‌که $\forall\theta \in [\alpha_i^*, \alpha_j^* - \tau_{ij});\ f_{ij}(\theta) = u_{ij}^*$. حال اگر وجود داشته باشد کمانی مانند $(x,y) \in A$ بطوری‌که $\alpha_x^* > \alpha_y^* - \tau_{xy}$ آنگاه باید داشته باشیم $u_{xy}^* > u_{xy}$. چون در غیر این صورت برای $\forall\theta \in [\alpha_x^*, \alpha_y^* - \tau_{xy})$ خواهیم داشت $f_{xy}(\theta) > u_{xy}$ که این رابطه، شدنی بودن $f(\theta)$ را نقض می‌کند. حال بردار ظرفیت جدید $\bar{u}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{u}_{ij} = \begin{cases} u_{ij} & \text{if} \quad (i,j) = (x,y) \\ u_{ij}^* & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

با توجه به این که کمان $(x,y) \in A$ در بازه زمانی $[\alpha_x^*, \alpha_y^* - \tau_{xy})$ روی برش α^* قرار ندارد و بنا به قضیه(۲-۱) و تعریف ظرفیت برش، $f(\theta)$ در شبکه $N = (V, A, \bar{u}, \tau)$ نیز جریان ماکزیمم پویا خواهد بود. بدین معنی که در شبکه $N = (V, A, \bar{u}, \tau)$، α^* هنوز برش پویای مینیمم است و $f(\theta)$ نیز ماکزیمم جریان پویا شبکه است. از طرفی با توجه به این که داریم $\forall(i,j) \in A\ ;\ -\delta_{ij} \leq u_{ij}^* - u_{ij} \leq \rho_{ij}$ و بنا به تعریف $\bar{u}$، می‌توان نتیجه گرفت که؛ $\forall(i,j) \in A$ $-\delta_{ij} \leq \bar{u}_{ij} - u_{ij} \leq \rho_{ij}$ پس $\bar{u}$ نیز یک جواب شدنی مسئله (۲-۴) می‌باشد. بنابراین می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\sum_{(i,j)\in A} w_{ij} H(u_{ij}, \bar{u}_{ij}) \leq \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} H(u_{ij}, u_{ij}^*)$$

که اگر نامساوی فوق به صورت اکید برقرار باشد در نتیجه بهینگی u^* را نقض می‌شود پس حکم برقرار است. در غیر این صورت گوییم $\bar{u}$ نیز جواب بهینه دیگری از مسئله (۲-۴) می‌باشد که $\bar{u}_{xy} = u_{xy}$. لذا با تکرار این روند، در می‌یابیم که u^* جواب بهینه‌ای از مسئله (۲-۴) است در نتیجه $u_{ij}^* \leq u_{ij} \quad \forall(i,j) \in A$ یعنی $u^* \leq u$.

برهان ب: اگر بردار جدید ظرفیت $\bar{u}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{u}_{ij}=\begin{cases} u_{ij}^{*} & \text{if} \quad \alpha_i^{*} \le \alpha_j^{*}-\tau_{ij} \\ u_{ij} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$v(f)=\sum_{(i,j)\in A} u_{ij}^{*}\ \max\{0,\alpha_j^{*}-\alpha_i^{*}-\tau_{ij}\} = \sum_{(i,j)\in A} \bar{u}_{ij}\ \max\{0,\alpha_j^{*}-\alpha_i^{*}-\tau_{ij}\}$$

با توجه به قضیه (۲-۱۴) $f(\theta)$ روی شبکه $N=(V,A,\bar{u},\tau)$ نیز جریان ماکزیمم پویا می‌باشد و $\bar{u}$ در شرط $-\delta_{ij}\le \bar{u}_{ij}-u_{ij}\le \rho_{ij}$ صدق می‌کند پس در نتیجه $\bar{u}$ نیز یک جواب شدنی مسئله (۲-۴) می‌باشد و

$$\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}H(u_{ij},\bar{u}_{ij}) \le \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}H(u_{ij},u_{ij}^{*})$$

و چون u^{*} یک جواب بهینه مسئله (۲-۴) است، باید داشته باشیم:

$$u_{ij}^{*}=\bar{u}_{ij}=u_{ij}$$
$$\forall (i,j)\in A,\ \alpha_i^{*}>\alpha_j^{*}-\tau_{ij}$$

با توجه به قسمت اول قضیه (۲-۱) می‌توان دریافت که هیچ کمانی برای رسیدن به بهینگی $f(\theta)$ نیازی به افزایش ظرفیت ندارد. بنابراین دسته قیود دوم از مسئله (۲-۴) را می‌توان به صورت زیر تغییر داد :

$$-\delta_{ij}\le u^{*}_{ij}-u_{ij}\le 0 \qquad \forall (i,j)\in A$$

لذا مسئله را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} w_{ij}H(u_{ij},u^{*}_{ij}) \qquad (۳-۱)$$

جریان پویای شدنی $f(\theta)$ یک جریان ماکزیمم پویا برای شبکه $N(V,A,u^{*},\tau)$ باشد

$$s.t \quad -\delta_{ij}\le u^{*}_{ij}-u_{ij}\le 0 \qquad \forall (i,j)\in A$$

همچنین برای جریان پویای شدنی $f(\theta)$، فرض کنیم $f_{ij}=\max_{\theta=0,1,2,\dots,T} f_{ij}(\theta)$

قضیه ۳-۲: اگر مسئله (۳-۱) شدنی باشد آن گاه جواب بهینه‌ای مانند u^{*} دارد به طوری‌که

$$\text{if} \quad u_{ij}^{*}\neq u_{ij} \quad \to \quad u_{ij}^{*}=f_{ij}\ ,$$
$$-\delta_{ij}\le f_{ij}-u_{ij}$$

برهان: اگر مسئله (۳-۱) شدنی باشد، آنگاه جواب بهینه‌ای مانند u^{*} وجود دارد در نتیجه بنا به قیود مسئله (۳-۱) داریم:

$$\forall (i,j)\in A\ ;\ u_{ij}^{*}\ge u_{ij}-\delta_{ij}$$

و از طرفی چون u^{*} جواب بهینه مسئله (۳-۱) می‌باشد، پس α^{*} برش بهینه متناظر با آن می‌باشد و $f(\theta)$ ماکزیمم جریان پویای شبکه $N=(V,A,u^{*},\tau)$ می‌باشد. برای جریان پویای شدنی $f(\theta)$ داریم $f_{ij}=\max_{\theta=0,1,2,..,T} f_{ij}(\theta)$. حال در این برش α^{*} بنا به قضیه (۲-۱)، برای هر کمان (i,j) با $\alpha_i^{*}>\alpha_j^{*}-\tau_{ij}$ داریم $\forall\theta\in[\alpha_j^{*}-\tau_{ij},\alpha_i^{*}];$ $f_{ij}(\theta)=0$ و برای هر کمان (i,j) با $\alpha_i^{*}\le\alpha_j^{*}-\tau_{ij}$ داریم:

$$\forall\theta\in[\alpha_i^{*},\alpha_j^{*}-\tau_{ij}];\ f_{ij}(\theta)=u_{ij}^{*}.$$

پس اگر کمان (i,j) به برش پویای بهینه α^{*} متعلق باشد، آنگاه جریان روی این کمان در فاصله زمانی که به برش تعلق دارد باید برابر ظرفیت آن کمان باشد پس هر کمان تنها می‌تواند در فاصله زمانی که بیشترین مقدار جریان از آن می‌گذرد، به برش بهینه متعلق باشد.
پس برای برش پویای مینیمم α^{*}، می‌توان ظرفیت‌های u^{*} را به صورت زیر تعریف کرد:

$$u_{ij}^{*\alpha^{*}}=\begin{cases} f_{ij} & \alpha_i^{*}<\alpha_j^{*}-\tau_{ij} \\ u_{ij} & \text{در این غیر صورت} \end{cases}$$

با این تعریف ظرفیت، ملاحظه می‌شود که جریان شدنی، ماکزیمم جریان شبکه پویا $N=(V,A,u^{*},\tau)$ خواهد بود. همچنین با توجه به قضیه (۳-۱) الف، می‌دانیم که $\forall (i,j)\in A\ ;\ u_{ij}^{*}\le u_{ij}$ یعنی $u_{ij}^{*}=u_{ij}$ یا $u_{ij}^{*}<u_{ij}$. پس با توجه به تعریف فوق و قضیه (۳-۱)، می‌توان به این نتیجه رسید که هر جا که $u_{ij}^{*}\neq u_{ij}$

باشد آنگاه $u_{ij}^* = f_{ij}$. حال بررسی می‌کنیم که برای چنین کمانی شرط $-\delta_{ij} \le f_{ij} - u_{ij}$ برقرار می‌باشد.

همان طور که ذکر شد برای جواب بهینه u^* داریم:

قید $\forall (i,j) \in A\,;\ u_{ij}^* \ge u_{ij} - \delta_{ij}$ برقرار می‌باشد. حال با توجه به تعریف ظرفیت بهینه اگر $u_{ij}^* = u_{ij}$ آنگاه شرط $u_{ij}^* \ge u_{ij} - \delta_{ij}$ برقرار می‌باشد و اگر $u_{ij}^* \neq u_{ij}$ آنگاه $u_{ij}^* = f_{ij}$ و $f_{ij} \ge u_{ij} - \delta_{ij}$.

حال با توجه به قضایا و تعریف مقدار جریان ماکزیمم، تابع هدف مسئله(۳-۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} H\big(u_{ij}, u^*{}_{ij}\big) =$$
$$\min_{\alpha\in L} \sum_{(i,j)\in A} w_{ij} H\big(u_{ij}, u^{\alpha}{}_{ij}\big) =$$
$$\min_{\alpha\in L} \sum_{(i,j)\in A\,,\alpha_i<\alpha_j-\tau_{ij}\,,f_{ij}<u_{ij}} w_{ij} =$$
$$\min_{\alpha\in L} \sum_{(i,j)\in A, f_{ij}<u_{ij}} w_{ij}\ \frac{\max\{0,\alpha_j-\alpha_i-\tau_{ij}\}}{\alpha_j-\alpha_i-\tau_{ij}}$$

بنابراین به جای حل مسئله معکوس ماکزیمم جریان، می‌توان در شبکه پویای $N = (V, A, u, \tau)$ به دنبال برش پویای α s-t متناظر با جریان ماکزیمم $f(\theta)$ بود به طوری‌که برای هر کمان $(i,j) \in A$ که در فاصله زمانی $\alpha_i < \alpha_j - \tau_{ij}$ قرار دارند و $f_{ij} < u_{ij}$ باید داشته باشیم $u_{ij} - \delta_{ij} \le f_{ij}$. لذا در تابع هدف این مسئله کافی است تمام کمان‌هایی که در آن‌ها $f_{ij} < u_{ij}$ هست حضور داشته باشد. در نتیجه برای چنین برش پویای بدست آمده ظرفیت کمان-ها را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$u_{ij}{}^{\alpha} = \begin{cases} f_{ij} & \alpha_i < \alpha_j - \tau_{ij} \\ u_{ij} & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

مطابق با بحث فوق برای بدست آوردن کمترین برش پویا متناظر با جریان شدنی پویا مسئله زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$\min \qquad \sum_{(i,j)\in A, f_{ij}<u_{ij}} w_{ij}\ \frac{\max\{0,\alpha_j-\alpha_i-\tau_{ij}\}}{\alpha_j-\alpha_i-\tau_{ij}}$$
$$\text{s.t} \qquad \alpha_i < \alpha_j - \tau_{ij}$$
$$\forall (i,j) \in A \quad f_{ij} < u_{ij} \ \ ,\ \ u_{ij} - \delta_{ij} \le f_{ij}$$
$$\alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij} < 0 \ ,$$
$$\forall\ (i,j) \in A \quad f_{ij} = 0$$
$$\alpha_s = 0 \quad , \quad \alpha_t = T$$
$$0 \le \alpha_i \le T \qquad \forall\ i \notin \{s,t\}$$

بنابراین مدل فوق نشان می‌دهد که برای حل مسئله (۳-۱)، می‌توان مسئله کمترین برش پویای فوق را حل کرد که متناظر با بهینگی جریان پویای شدنی داده شده می‌باشد. به عبارت دیگر تغییر u_{ij} به $u^*{}_{ij}$ تنها برای آن دسته از کمان‌هایی که منجر به بهینگی جریان پویای شدنی $f(\theta)$ می‌شوند، صورت می‌پذیرد. توجه داشته باشیم که تنها آن دسته از کمان‌هایی که در فاصله زمانی که بیشترین مقدار جریان، از آن‌ها عبور می‌کند، به برش بهینه تعلق خواهند داشت. اگر k_{ij} طول این فاصله زمانی باشد، مدل فوق را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\min \qquad \sum_{(i,j)\in A, f_{ij}<u_{ij}} w_{ij}\ \frac{\max\{0,\alpha_j-\alpha_i-\tau_{ij}\}}{\alpha_j-\alpha_i-\tau_{ij}} \tag{۳-۲}$$
$$\text{s.t} \qquad \alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij} \le k_{ij} \ \ ,$$
$$\forall\ (i,j) \in A \quad f_{ij} > 0 \ \ ,\ \ u_{ij} - \delta_{ij} \le f_{ij}$$
$$\alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij} < 0 \ \ , \qquad \forall\ (i,j) \in A \quad f_{ij} = 0$$
$$\alpha_s = 0 \quad , \quad \alpha_t = T$$
$$0 \le \alpha_i \le T\,, \qquad\qquad \forall i \notin \{s,t\}$$

با توجه به اینکه تابع هدف مسئله فوق غیرخطی می‌باشد، می‌توان آن را با تغییر متغییر زیر، خطی کرد. بدین منظور متغییر صفر- یک زیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$z_{ij} = \frac{\max\{0, \alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij}\}}{\alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij}}$$

لذا مدل (۳-۶) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\min \qquad \sum_{(i,j)\in A, f_{ij}<u_{ij}} w_{ij}\ z_{ij} \tag{۳-۳}$$
$$\text{s.t} \qquad \alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij} \le k_{ij} z_{ij}\,,$$
$$\forall\ (i,j) \in A \quad f_{ij} > 0 \ ,$$
$$u_{ij} - \delta_{ij} \le f_{ij}$$
$$\alpha_j - \alpha_i - \tau_{ij} < 0 \ \ ,\ \ \forall\ (i,j) \in A \quad f_{ij} = 0$$
$$\alpha_s = 0 \quad , \quad \alpha_t = T$$
$$0 \le \alpha_i \le T\,, \quad \forall i \notin \{s,t\} \qquad z_{ij} \in \{0,1\}$$

همانطور که مشاهده می‌شود مسئله فوق یک مدل برنامه‌ریزی صحیح می‌باشد. حال سعی در ارائه الگوریتمی هستیم که بتوان بوسیله آن کمترین برش پویا را در زمان چندجمله‌ای بدست آورد.

۴. الگوریتم

مطابق با مدل کمترین برش پویا هر کمان در یک نقطه از زمان ظاهر می‌شود. بنابراین هر کمان در برش بهینه در N(T) تنها یک بار ظاهر می‌شود. بنابراین کپی‌های کمان را از برش در N(T) حذف کرد. لذا برای هر مسیر p با $\tau(p) < T-1$، $T-\tau(p)$ کپی از کمان‌ها در مسیر p در N(T) وجود دارد. بنابراین بوسیله الگوریتم زمان افزایشی که در مقاله باقریان شرح آن داده شده است، برای حذف کپی‌های کمان‌ها از چنین مسیری، زمان آن مسیر را به $T\text{-}1$ افزایش داد.

مطابق با بحث فوق، برای حل مدل (۳-۱)، شبکه پویای کمکی N را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

تمام گره‌ها، کمان‌ها، گره مبدا و مقصد شبکه کمکی به همان ترتیب شبکه $N=(V,A,\bar{u},\tau)$ می‌باشد و زمان گذر τ_{ij} باید با استفاده از الگوریتم زمان افزایشی بدست آید. و ظرفیت کمان‌های $(i,j)\in N$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u=\begin{cases} w_{ij} & if\ (i,j)\in A, f_{ij}<u_{ij}, u_{ij}-f_{ij}\le\delta_{ij} \\ \left(\frac{n^2}{4}+1\right)L & otherwise \end{cases} \qquad (۱-۴)$$

که در آن $f_{ij}=\max_{\theta=0,1,\dots,T-1} f_{ij}(\theta)$ و L کران بالا برای وزن‌های w_{ij} می‌باشد.

با حل ماکزیمم جریان پویا در شبکه کمکی N، برش پویای α^* را بدست می‌آوریم. همچنین می‌توانیم کمترین برش ایستای $(X,\bar{X})$، را در شبکه توسعه یافته زمانی N با حل دستگاه زیر بدست آوریم:

$$\alpha_s{}^*=0, \alpha_t{}^*=T, \alpha_j{}^*-\alpha_i{}^*-\tau_{ij}= \begin{cases} 1, & \forall(i,j)\in(X,\bar{X}) \\ \le 0, & \forall(i,j)\notin(X,\bar{X}) \end{cases} \qquad (۲-۴)$$

حال اگر ظرفیت برش بهینه α^* یعنی $u(\alpha^*)>\frac{n^2}{4}L$ در اینصورت مسئله (۳-۱) جواب ندارد. در غیر اینصورت ظرفیت کمان‌های $(i,j)\in A$ را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$u_{ij}{}^*=\begin{cases} f_{ij}, & \alpha_j{}^*-\alpha_i{}^*-\tau_{ij}>0 \\ \bar{u}_{ij}, & Otherwise \end{cases} \qquad (۳-۴)$$

بنابراین مطابق با الگوریتم پیشنهادی زیر می‌توان مسئله معکوس ماکزیمم جریان پویا تحت فاصله تجمعی همینگ را حل کرد:

الگوریتم:

۱. با حل الگوریتم ماکزیمم جریان پویا رد شبکه $N=(V,A,\bar{u},\tau)$، تمام مسیرهایی را که با زمان کمتر از T-1 می‌باشد را بدست آورده.

۲. با استفاده از الگوریتم زمان افزایشی برای تمام مسیرهایی که در مرحله ۱ بدست آمده، زمان گذرشان را به T-1 افزایش می‌دهیم به‌طوری که هیچ مسیری با زمان $\tau(p)<T-1$ وجود نداشته باشد.

۳. مطابق روندی که توضیح داده شد، شبکه کمکی N را می‌سازیم.

۴. با حل ماکزیمم جریان پویا در شبکه کمکی ساخته شده N، برش بهینه α^* را تحت فاصله تجمعی همینگ بدست می‌آوریم.

۵. ظرفیت کمان‌ها را مطابق با رابطه (۴-۳) اصلاح می‌کنیم.

همچنین زمان مورد نیاز برای حل الگوریتم فوق متناسب با زمان موردنیاز برای حل دو مسئله ماکزیمم جریان پویا می‌باشد، که زمان حل آن‌ها از مرتبه چندجمله‌ای است. لذا الگوریتم در زمان چند جمله‌ای قابل حل خواهد بود.

حال برای روشن شدن مطلب به حل مثالی در بخش بعد خواهیم پرداخت.

مثال

شبکه پویای $N=(V,A,\bar{u},\tau)$ را به صورت شکل (۳-۱) در نظر بگیرید. که عدد کنار هر کمان (i,j) به صورت $(\tau,\bar{u}_{ij})$ می‌باشد. فرض می‌کنیم $\delta_{ij}=2$ و $w_{ij}=1$. برای جریان پویای شدنی داده شده در شکل (۳-۲)، شبکه کمکی N را به صورت شکل (۳-۳) رسم می‌کنیم. شبکه باقیمانده توسعه یافته زمانی و کمترین برش پویا به صورت شکل (۳-۴) می‌باشد.

بنا به الگوریتم ارائه شده، با حل مسئله ماکزیمم جریان پویا را روی شبکه N، ماکزیمم جریان ایستای به صورت $x_{ij}{}^*=1,\forall(i,j)\in A$ و کمترین برش ایستای $(X,\bar{X})$ با $X=\{s\}$ بدست خواهد آمد. دو مسیر افزایشی به صورت $s\to w\to t$ و $s\to v\to t$

حاصل خواهد شد که هر یک از آنها حامل یک واحد جریان خواهد بود. لذا مقدار ماکزیمم جریان پویا برابر ۲ می‌باشد. با حل دستگاه (۴-۲) برش پویای بهینه به صورت $\alpha_s^* = 0, \alpha_v^* = 1, \alpha_w^* = 5, \alpha_t^* = 5.$ حاصل خواهد شد. بنا به الگوریتم یاد شده با چک کردن رابطه $\alpha_j^* - \alpha_i^* - \tau_{ij}$ برای هر کمان $\forall (i,j) \in$، شبکه می‌توان ظرفیت‌های بهینه u^* را بدست آورد.

$\alpha_w{}^* - \alpha_s{}^* - \tau_{sw} = 1 > 0$ then $(s,w) \in \alpha^*$ and we set $u^*{}_{sw} = f_{sw} = 1.$

$\alpha_v{}^* - \alpha_s{}^* - \tau_{sv} = 1 > 0$ then $(s,v) \in \alpha^*$ and we set $u^*{}_{sv} = f_{sv} = 2$

$\alpha^*{}_w - \alpha^*{}_v - \tau_{vw} = 5 - 1 - 4 = 0$ then $(v,w) \notin \alpha^*$ and we set $u^*{}_{vw} = \bar{u}_{vw} = 1$

$\alpha^*{}_t - \alpha^*{}_v - \tau_{vt} = 5 - 1 - 4 = 0$ then $(v,t) \notin \alpha^*$ and we set $u^*{}_{vt} = \bar{u}_{vt} = 3$

$\alpha^*{}_t - \alpha^*{}_w - \tau_{wt} = 5 - 5 - 0 = 0$ then $(w,t) \notin \alpha^*$ and we set $u^*{}_{wt} = \bar{u}_{wt} = 4.$

که مقدار تابع هدف تحت فاصله همینگ به صورت $w_{sv} + w_{sw} = 2$ می‌باشد.

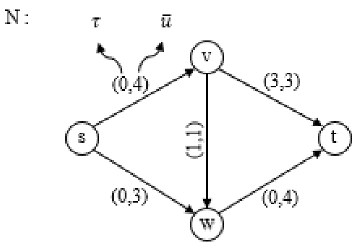


Figure 4.1 : A dynamic flow network

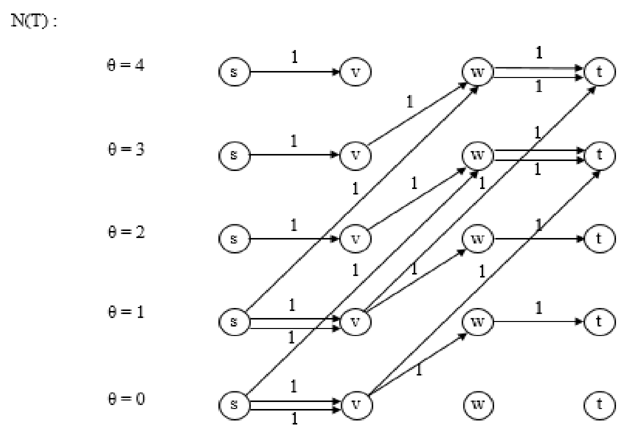


Figure 4.2 : The time expanded network

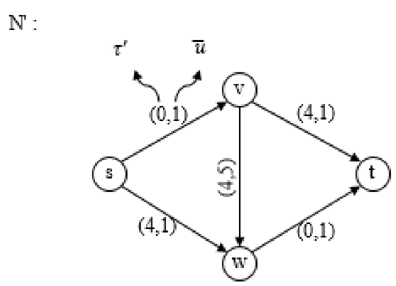


Figure 4.3 : The auxillary network

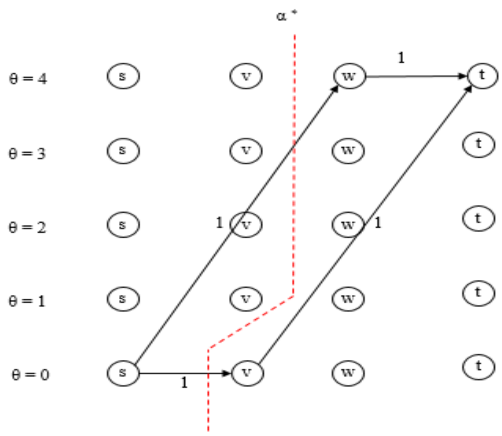


Figure 4.4 : Time expanded and minimum cut

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

با توجه به اهمیت و ضرورت بررسی مسائل معکوس در شبکه‌های پویا، به خصوص تحت فاصله همینگ، در این مقاله معکوس مسئله ماکزیمم جریان پویا تحت این فاصله مطرح و یک مسئله کمترین برش پویا برای حل آن ارائه شده است و همچنین الگوریتم بر مبنای بهینه‌سازی ترکیبیاتی برای حل آن در زمان چند جمله‌ای قوی ارائه شده است. تحقیقات فراوانی در زمینه مسائل بهینه‌سازی معکوس در شبکه‌های ایستا، زمانی که هزینه اصلاح بوسیله نرم های اقلیدسی، اندازه گیری شده اند، وجود دارد. در حقیقت معیار مجموع وزن‌دار همینگ، تعداد پارامترهای اصلاح شده را نشان می‌دهد. و این متناظر با حالتی است که در آن پارامترهایی که ظرفیت شان تغییر پیدا کرده است برایمان اهمیت دارد، بدون در نظر گرفتن بزرگی این تغییرات. همچنین از تحقیقات آتی که می‌تواند به بررسی آن پرداخت، حل معکوس مسئله کمترین برش و مینیمم هزینه در شبکه جریان پویا تحت فاصله همینگ می‌باشد.

Referenc:

[1] Ford, L. R and Fulkerson, D. R. Constructing Maximal Dynamic Flows From Static Flows. Operations Research 6, 419-433. 1958.

[2] Tarantola. A, Inverse. Problem Theory. Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation, Institut de Physique du Globe, 4-P1ace Jussieu,1987.

[3] Burton, D and Toint, Ph.L., On an Instance of Inverse Shortest Paths, Problem. Mathematical Programming. 53 (1992) 45-61.

[4] Burton, D and Toint, Ph.L., on the use of an inverse shortest paths algorithm for recovering linearly correlated costs, Mathematical Programming 63 (1994) 1-22.

[5] Bagherian. M, the inverse maximum dynamic flow problem, Mathematics, Vol. 53 No. 10:pp 2709-2717, 2010

[6] Herberger, C. Inverse Optimization: a survey on problems, methods and results. J Comb Optim, 8: 329-361. 2004.

[7] Yang, C. Zhang, J and Ma, Z. Inverse Maximum flow and Minimum cut problems. Mathematical Programming and Operations Research, 40:2, 147-170. 2007.

[8] Liu, L. Zhang, J. Inverse Maximum Flow Problems under the Weighted Hamming distance. J Comb Optim, 12: 395-408. 2006.

[9] Jiang, Y. Liu, L. Wu, B. Yao, E. Inverse minimum cost flow problems under the wrighted Hamming distance. Operational Research 207 (2010) 50-54.

[10] Liu, L., Yao, E., 2007. A weighted inverse minimum cut problem under the bottleneck type Hamming distance. Asia-Pacific Journal of Operational Research 24, 725–736.

[11] Liu, L., Yao, E., 2008. Inverse min–max spanning tree problem under the weighted sum-type Hamming distance. Theoretical Computer Science 396, 28–34.