دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره یازدهم، پاییز ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بعدهای همولوژیکی گرنشتاین نسبت به یک مدول شبه دوگانی روی حلقه‌گروه‌ها

عبدالناصر بهلکه*

استادیار، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۵/۰۲

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و نوتری و Γ یک گروه متناهی باشد. در این مقاله، ما بعدهای همولوژیکی گرنشتاین مدول‌ها نسبت به یک مدول شبه دوگانی روی حلقه‌گروه $R\Gamma$ را مطالعه می‌کنیم. نشان داده خواهد شد که بعدهای همولوژیکی گرنشتاین $R\Gamma$–مدول M نسبت به مدول شبه دوگانی روی R و $R\Gamma$ با هم برابر می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: مدول شبه دوگانی، بعد گرنشتاین، بعد C–تصویری گرنشتاین، بعد C–تزریقی گرنشتاین.

*. عهده‌دار مکاتبات

Email: bahlekeh@gonbad.ac.ir

۱. مقدمه

در حدود نیم قرن پیش، اسلاندر[۱]، باکسبام[۲] [۳] و سر [۱۴] حلقه‌های موضعی منظم را توسط بعد تصویری رده‌بندی کرده‌اند. آن‌ها ثابت کرده‌اند که حلقه جابجایی نوتری و موضعی R منظم است اگر و تنها اگر بعد تصویری هر R-مدول متناهی مولد M، متناهی باشد. از آن زمان، مسأله مشخص‌سازی حلقه‌های جابجایی براساس بعدهای همولوژیکی، یکی از جالب‌ترین موضوعات در جبر جابجایی بوده است. به منظور رده‌بندی حلقه‌های گرنشتاین، اسلاندر و بریدگر[۳] در [۲] مفهوم بعد گرنشتاین (که آن را G-بعد نیز گویند) را برای مدول‌های متناهی مولد روی حلقه‌های نوتری معرفی و مطالعه کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که حلقه‌ی موضعی R، گرنشتاین است اگر و تنها اگر G-بعد هر مدول متناهی مولد، متناهی باشد.

مفهوم G-بعد، که تعمیم بعد تصویری می‌باشد، توسط ایناکس[۴] و جندا[۵] در [۶] برای هر مدول (نه لزوماً متناهی مولد) تعریف شد و آن‌ها این پایا را بعد تصویری گرنشتاین نامیده‌اند. ثابت شده است که حلقه موضعی R گرنشتاین است اگر و تنها اگر بعد تصویری گرنشتاین هر مدول (متناهی مولد)، متناهی باشد. ایناکس و جندا به‌طور دوگانی مفهوم بعد تزریقی گرنشتاین را تعریف کرده‌اند. هم‌چنین، به منظور تکمیل مشابهت با بعدهای کلاسیک، ایناکس و همکارانش در [۷] بعد یکدست گرنشتاین مدول‌ها را معرفی و مطالعه کرده‌اند.

مدول‌های شبه دوگانی[۶] روی حلقه‌های جابجایی و نوتری اولین بار توسط فاکسبی[۷] [۹]، گلد[۸] [۱۱] و واسکنسلوس[۹] [۱۵] به‌طور مستقل از هم، تعریف و مطالعه شده است. R-مدول متناهی مولد C را شبه دوگانی گویند هرگاه همریختی طبیعی $R \to \mathrm{Hom}_R(C,C)$ یکریختی باشد و به‌علاوه برای هر $i > 0$، $\mathrm{Ext}_R^i(C,C) = 0$. مدول‌های شبه دوگانی که تعمیم مدول‌های آزاد از پایه یک می‌باشند، توسط هلم[۱۰] و وایت[۱۱] [۱۳] روی حلقه‌های شرکت‌پذیر دلخواه تعریف شده‌اند. افراد زیادی خاصیت‌های مدول‌های شبه دوگانی را از جنبه‌های مختلف مورد مطالعه قرار داده‌اند، به عنوان مثال به [۱،۸،۱۳،۱۶] رجوع کنید. یکی از مهم‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی در این مورد، مطالعه بعدهای گرنشتاین مدول‌ها نسبت به یک مدول شبه دوگانی می‌باشد. در این راستا گلد در [۱۱] با استفاده از مدول شبه دوگانی C، پایایی را برای هر مدول متناهی مولد نسبت داد. او این پایا را که تظریفی از بعد تصویری می‌باشد، G_C-بعد نامید. به کمک این پایا، گرکو[۱۲] در [۱۰] توصیفی برای حلقه‌های کوهن-مکالی ارائه کرد. با ایده گرفتن از مفهوم بعد تصویری گرنشتاین، هلم و یورگنسن[۱۳] در [۱۲] G_C-بعد را برای هر مدول دلخواه روی حلقه نوتری و جابجایی تعریف کرده و آن‌ها این پایا را بعد C-تصویری گرنشتاین نامیده‌اند. وایت در [۱۵] بعد C-تصویری گرنشتاین[۱۴] را روی حلقه‌های جابجایی که لزوماً نوتری نمی‌باشند، تعریف کرده است. فرض کنید R یک حلقه نوتری و جابجایی و M یک R-مدول دلخواه باشد. گوییم M، C-تصویری گرنشتاین است اگر برای هر $i > 0$ و هر R-مدول تصویری P، $\mathrm{Ext}_R^i(M, C\otimes_R P) = 0$ و همبافت دقیق از R-مدول‌های

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow C\otimes_R P_{-1} \longrightarrow C\otimes_R P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

که در آن P_iها تصویری بوده، موجود باشند به‌طوری‌که تابعگون $\mathrm{Hom}_R(-, C\otimes_R P)$ برای هر R-مدول تصویری P، این همبافت را دقیق نگه دارد.

هلم و یورگنسن هم‌چنین مفهوم بعدهای C-تزریقی گرنشتاین[۱۵] و C-یکدست گرنشتاین[۱۶] را معرفی و مطالعه

1. Auslander
2. Buchsbaum
3. Bridger
4. Enochs
5. Jenda
6. Semi-dualizing
7. Foxby
8. Golod
9. Vasconcelos

10. Holm
11. White
12. Gerko
13. Jørgensen
14. C-Gorenstein projective
15. C-Gorenstein injective
16. C-Gorenstein flat

کرده‌اند. آن‌ها نشان داده‌اند که این پایاها با بعدهای ایناکس و همکارانش روی حلقه‌های توسیع بدیهی $R \propto C$ یکی می‌باشند. (به قضیه ۱۶،۲ از [۱۲] رجوع شود.)

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و نوتری و Γ یک گروه متناهی باشد. یکی از موضوع‌های مهم در کوهمولوژی گروه‌ها، انتقال خاصیت‌های همولوژیکی مدول از R به حلقه‌گروه[۱] $R\Gamma$ می‌باشد. با در نظر گرفتن این مطلب و اهمیت پایاهای بیان شده، هدف ما در این مقاله، مطالعه بعدهای همولوژیکی گرنشتاین نسبت به یک مدول شبه دوگانی روی حلقه‌گروه $R\Gamma$ می‌باشد. قضیه اصلی این مقاله ثابت می‌کند که بعد $R\Gamma\otimes_R C$ – تصویری گرنشتاین $R\Gamma$ –مدول M برابر صفر است اگر و تنها اگر بعد C–تصویری گرنشتاین M به عنوان R– مدول برابر صفر باشد. به علاوه ثابت می‌شود که مشابه این قضیه برای بعد C–یکدست گرنشتاین قوی نیز برقرار می‌باشد.

در طول این مقاله، R یک حلقه جابجایی و نوتری بوده و Γ یک گروه متناهی می‌باشد. به علاوه همه مدول‌ها، چپ مدول در نظر گرفته می‌شوند.

۲. تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل بعد استفاده خواهد شد را بیان می‌کنیم. ما این فصل را با تعریف مدول شبه دوگان روی R–جبر نوتری شروع می‌کنیم.

تعریف ۱: فرض کنیم Λ یک R–جبر نوتری و C یک Λ – دو مدول متناهی مولد باشد. گوییم C شبه دوگانی است اگر

i) همریختی‌های طبیعی $\Lambda \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(C,C)$ و $\Lambda^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(C,C)$ یکریختی باشند، که در آن Λ^{op} حلقه متضاد Λ می‌باشد.

ii) برای هر $i>0$، $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(C,C)=0=\mathrm{Ext}^i_{\Lambda^{\mathrm{op}}}(C,C)$.

تعریف ۲: فرض کنیم C یک Λ –دو مدول شبه دوگانی بوده و M یک Λ –مدول باشد. گوییم M C– تصویری گرنشتاین است، اگر شرایط زیر فراهم باشد.

i) برای هر $i>0$ و هر Λ –مدول تصویری P، $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(C, C\otimes_{\Lambda}P)=0$.

ii) همبافت دقیق از Λ –مدول‌های

$$\mathbf{X}.: 0 \longrightarrow M \longrightarrow C\otimes_{\Lambda}P_{-1} \longrightarrow C\otimes_{\Lambda}P_{-2} \longrightarrow$$

موجود باشد که در آن P_iها تصویری بوده و تابعگون $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, C\otimes_{\Lambda}Q)$، که در آن Q یک Λ –مدول تصویری می‌باشد، همبافت $\mathbf{X}.$ را دقیق نگه می‌دارد.

تذکر ۳: با توجه به تعریف بالا، واضح است که M، C– تصویری گرنشتاین است اگر و تنها اگر همبافت دقیق از Λ –مدول‌های

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow C\otimes_{\Lambda}P_{-1} \longrightarrow C\otimes_{\Lambda}P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

موجود است که در آن برای هر i، P_i تصویری بوده و $M=\mathrm{coker}\,(P_1 \longrightarrow P_0)$ به علاوه تابعگون $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-, C\otimes_{\Lambda}Q)$، برای هر Λ –مدول تصویری Q، همبافت بالا را دقیق نگه می‌دارد. (گزاره ۲،۲ از [۱۷] را ملاحظه کنید.)

تعریف ۴: Λ–مدول M را C–تزریقی گرنشتاین گوییم هرگاه

۱) برای هر $i\geq 1$ و هر Λ –مدول تزریقی I، $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(-,I),M)=0$.

۲) همبافت دقیق از Λ –مدول‌های

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(C,I_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(C,I_0) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود باشد به‌طوری‌که I_iها تزریقی بوده و تابعگون $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\mathrm{Hom}_{\Lambda}(C,E),-)$ برای هر Λ –مدول تزریقی E، این همبافت را دقیق نگه می‌دارد. (به تعریف ۷،۲ از [۱۲] مراجعه شود.)

مثال ۵: فرض کنیم I (به ترتیب، P) یک Λ–مدول تزریقی (به ترتیب، تصویری) باشد. در این صورت Λ – مدول‌های I و $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(C,I)$ (به ترتیب، P و $C\otimes_{\Lambda}P$) C–تزریقی گرنشتاین (به ترتیب، C–تصویری گرنشتاین) می‌باشد. (به مثال ۸،۲ از [۱۲] مراجعه شود.)

1. Group ring

تبصره۶: در قضیه ۸،۲ از [۱۷] ثابت شده است که رده مدول‌های C–تصویری گرنشتاین به‌طور تصویری، تحلیلی می‌باشند. یعنی اگر $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ یک رشته دقیق از Λ–مدول‌ها باشد به‌طوری‌که M'' C–تصویری گرنشتاین باشد، آنگاه M C–تصویری گرنشتاین است اگر و تنها اگر M' C–تصویری گرنشتاین باشد. به‌طور دوگان، می‌توان نشان داد که رده مدول‌های C–تزریقی گرنشتاین به طور تزریقی تحلیلی می‌باشند.

تعریف۷: فرض کنیم M یک Λ –مدول و n یک عدد طبیعی نامنفی باشد. گوییم بعد C–تصویری گرنشتاین M کمتر یا مساوی n است و می‌نویسیم $C-\mathrm{Gpd}_{\Lambda}M \leq n$، اگر یک رشته دقیق از Λ – مدول‌ها به صورت

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود باشد که در آن برای هر $0 \leq i \leq n$، G_i C– تصویری گرنشتاین می‌باشد. اگر n کوچکترین عدد با این خاصیت باشد، آنگاه می‌نویسیم $C-\mathrm{Gpd}_{\Lambda}M = n$. اگر چنین nای موجود نباشد، آنگاه می‌نویسیم $C-\mathrm{Gpd}_{\Lambda}M = \infty$. به طور قرار داد، تعریف می‌کنیم $C-\mathrm{Gpd}_{\Lambda}0 = -\infty$.

بعد C–تزریقی گرنشتاین M که با نماد $C-\mathrm{Gid}_{\Lambda}M$ نمایش داده می‌شود، به صورت دوگان تعریف می‌شود. توجه شود که اگر $C = \Lambda$، آنگاه بعدهای C–تصویری گرنشتاین و C–تزریقی گرنشتاین همان بعدهای تصویری گرنشتاین و تزریقی گرنشتاین ایناکس و جندا می‌باشند.

تعریف۸: فرض کنیم C یک Λ–دو مدول شبه دوگانی و M یک Λ –مدول باشد. گوییم M C–یکدست گرنشتاین قوی است، اگر

i) برای هر Λ –مدول یکدست F و هر $i > 0$، $Ext^i_{\Lambda}(M, C\otimes_{\Lambda}F) = 0$.

ii) همبافت دقیق از Λ –مدول‌های

$$0 \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow C\otimes_{\Lambda}P_{-1} \longrightarrow C\otimes_{\Lambda}P_{-2} \longrightarrow \cdots$$

موجود باشد به‌طوری‌که برای هر i، P_i تصویری بوده و تابعگون $Hom_{\Lambda}(-, C\otimes_{\Lambda}F')$، که در آن F' یک Λ–مدول یکدست است، این همبافت را دقیق نگه دارد.

چون هر مدول تصویری، یکدست است، هر Λ –مدول C–یکدست گرنشتاین قوی، C–تصویری گرنشتاین می‌باشد. شایان دکر است که تاکنون مثالی از یک مدول C–تصویری گرنشتاین که C–یکدست گرنشتاین قوی نباشد، ارائه نشده است.

در ادامه برخی نتایج مقدماتی روی حلقه گروه‌ها را بیان می‌کنیم.

تذکر۹: فرض کنیم Γ یک گروه متناهی و $R\Gamma$ حلقه گروه باشد. چون $R\Gamma$ با حلقه متضاد آن، $R\Gamma^{\mathrm{op}}$، یکریخت می‌باشد. هر $R\Gamma$–مدول چپ، یک $R\Gamma$–مدول راست نیز می‌باشد و برعکس.

تبصره۱۰: فرض کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت بنا به گزاره ۹،۵ از [۵]، یکریختی از $R\Gamma$–مدول‌های $R\Gamma\otimes_R M \cong Hom_R(R\Gamma, M)$ برقرار می‌باشد. توجه شود که چون $R\Gamma$ یک $R\Gamma - R$–دو مدول می‌باشد، $R\Gamma\otimes_R M$ یک $R\Gamma$ –مدول (چپ) می‌باشد. به علاوه چون $R\Gamma$ یک $R\Gamma - R$ –دو مدول می‌باشد، $\mathrm{Hom}_R(R\Gamma, M)$ یک $R\Gamma$ –مدول (چپ) می‌باشد.

گزاره۱۱: فرض کنیم C یک R–مدول شبه دوگانی باشد. در این صورت $R\Gamma\otimes_R C$ یک $R\Gamma$ –دو مدول شبه دوگانی می‌باشد.

برهان: به گزاره ۲،۳ از [۵] رجوع شود.

۳. قضایای اصلی

در این فصل ما بعدهای تعریف شده در فصل قبل را روی حلقه گروه‌ها مطالعه می‌کنیم. در طول این فصل، همواره C یک مدول شبه دوگانی برای R بوده و Γ گروهی متناهی می‌باشد.

گزاره۱۲: فرض کنیم M یک R–مدول C–تزریقی گرنشتاین باشد. در این صورت $Hom_R(R\Gamma, M)$ یک $R\Gamma$–مدول $R\Gamma\otimes_R C$ –تزریقی گرنشتاین می‌باشد.

برهان: چون M یک R–مدول C–تزریقی گرنشتاین می‌باشد، بنابر تعریف همبافت دقیق از R–مدول‌های

$$\mathrm{Hom}_R(C, \mathbf{I}_{\cdot}) : \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, I_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, I_0) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

موجود است به‌طوری‌که برای هر i، I_iها یک R–مدول تزریقی می‌باشد. چون $R\Gamma$ به عنوان R–مدول، آزاد می‌باشد، همبافت دقیق از $R\Gamma$–مدول‌های زیر را داریم

$$\cdots \longrightarrow R\Gamma\otimes_R \mathrm{Hom}_R(C,I_1) \longrightarrow R\Gamma\otimes_R\mathrm{Hom}_R(C,I_0) \longrightarrow R\Gamma\otimes_R M\longrightarrow 0$$

با استفاده از این واقعیت که $R\Gamma$ به عنوان R–مدول صادق باوفا می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که این همبافت یکریخت با همبافت

$$\mathrm{X}_{\cdot}:\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C, R\Gamma\otimes_R I_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,R\Gamma\otimes_R I_0) \longrightarrow R\Gamma\otimes_R M\cong Hom_R(R\Gamma,M)\longrightarrow 0$$

می‌باشد. از طرفی چون Γ گروهی متناهی است، بنا به تبصره ۱۰، $R\Gamma\otimes_R I_i \cong Hom_R(R\Gamma,I_i)$ یک $R\Gamma$ – مدول تزریقی می‌باشد. حال فرض کنیم E یک $R\Gamma$ – مدول تزریقی دلخواه باشد. نشان می‌دهیم تابعگون $\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,E),-)$ همبافت بالا را دقیق نگه می‌دارد. برای این منظور، یکریختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,E), R\Gamma\otimes_R\mathrm{Hom}_R(C,\mathbf{I}_{\cdot})\big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_R\big(R\Gamma\otimes_{R\Gamma}\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,E),\mathrm{Hom}_R(C,\mathbf{I}_{\cdot})\big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_R\big(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,E),\mathrm{Hom}_R(C,\mathbf{I}_{\cdot})\big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_R\Big(\mathrm{Hom}_R\big(C,\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma,\mathrm{E})\big),\mathrm{Hom}_R(C,\mathbf{I}_{\cdot})\Big)\\
&\cong \mathrm{Hom}_R\big(\mathrm{Hom}_R(C,E),\mathrm{Hom}_R(C,\mathbf{I}_{\cdot})\big)
\end{aligned}$$

توجه شود که یکریختی اول بنا به قضیه الحاقی Hom و $\otimes$ و تبصره ۱۰ نتیجه می‌شود. به‌علاوه یکریختی دوم به‌وضوح برقرار بوده و یکریختی سوم دوباره از قضیه الحاقی Hom و $\otimes$ نتیجه می‌شود. چون E یک $R\Gamma$ – مدول تزریقی است، به‌عنوان R–مدول نیز تزریقی است. حال بنا به فرض، همبافت آخر دقیق بوده و لذا همبافت اول نیز چنین می‌باشد. اینک نشان می‌دهیم که برای $\mathrm{R\Gamma}$ –مدول تزریقی E،

$$\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,E), \mathrm{Hom}_R(R\Gamma,M))=0$$

برای هر $i>0$. برای این منظور، بنا به قضیه الحاقی Hom و $\otimes$ یکریختی زیر را داریم. هم‌چنین با استفاده از قضیه الحاقی Hom و $\otimes$ به آسانی یکریختی زیر را داریم:

$$\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}\big(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,E),\mathrm{Hom}_R(R\Gamma,M)\big) \cong \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Hom}_R(C,E),M)$$

که در آن $ER\Gamma$–مدول تزریقی است. بنا به فرض برای هر $i>0$، $\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Hom}_R(C,E),M)=0$، خواهیم داشت:

$$\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,E), \mathrm{Hom}_R(R\Gamma,M))=0$$

برای هر $i>0$. لذا حکم حاصل می‌شود.

قضیه۱۳: فرض کنیم M یک $R\Gamma\otimes_R C$– تزریقی گرنشتاین باشد. در این صورت M به عنوان R–مدول C–تزریقی گرنشتاین می‌باشد.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم:

$$\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Hom}_R(C,I),M)=0$$

برای هر $i>0$ و هر R–مدول تزریقی I. چون I یک R–مدول تزریقی است، $\mathrm{Hom}_R(R\Gamma,I)$ یک $R\Gamma$ – مدول تزریقی می‌باشد. لذا بنا به فرض

$$\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}\big(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(R\Gamma\otimes_R C,\mathrm{Hom}_R(R\Gamma,I)\big), M\big)=0$$

برای هر $i>0$. یکریختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}\big(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(R\Gamma\otimes_R C,\mathrm{Hom}_R(R\Gamma,I)\big),M\big)\\
&\cong \mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,R\Gamma\otimes_R I),M)\\
&\cong \mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R\mathrm{Hom}_R(C,I),M)\\
&\cong \mathrm{Ext}^i_R\big(\mathrm{Hom}_R(C,I),\mathrm{Hom}_R(R\Gamma,M)\big)\\
&\cong \mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Hom}_R(C,I),M)=0
\end{aligned}$$

توجه شود که یکریختی اول بنا به تبصره ۱۰ برقرار بوده و یکریختی دوم از یکدست باوفا بودن $R\Gamma$ به عنوان R–مدول نتیجه می‌شود. دومین یکریختی از قضیه الحاقی Hom و $\otimes$ به دست می‌آید و یکریختی آخر به وضوح برقرار می‌باشد. اینک نشان می‌دهیم که یک همبافت دقیق از R–مدول‌ها به صورت

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,I_1)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,I_0)\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

موجود است که در آن I_iها، R–مدول‌های تزریقی می‌باشند. چون M یک $R\Gamma$–مدول $R\Gamma\otimes_R C$–تزریقی گرنشتاین می‌باشد، بنا به تعریف همبافت دقیق از $R\Gamma$–مدول‌های

$$\mathrm{Y}_{\cdot}:\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,I_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C,I_0)\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

موجود است که در آن I_iها، $R\Gamma$ –مدول‌های تزریقی می‌باشند. بنا به قضیه الحاقی Hom و $\otimes$، یکریختی‌های

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C, I_i)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R\big(C, \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma, I_i)\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R(C, I_i)\end{aligned}$$

برقرار می‌باشد. به علاوه به آسانی می‌توان دید که برای هر $i \geq 0$، I_i به عنوان R–مدول نیز تزریقی می‌باشد. بنابراین همبافت دقیق زیر از R–مدول‌های

$$\begin{aligned}&\mathbf{Y}_{.}: \cdots \longrightarrow\\ &\mathrm{Hom}_R(C, I_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, I_1) \longrightarrow\\ &\mathrm{Hom}_R(C, I_0) \longrightarrow M \longrightarrow 0\end{aligned}$$

موجود است. در نتیجه M به عنوان R–مدول C–تزریقی گرنشتاین می‌باشد. باید ثابت شود که برای هر R–مدول تزریقی E، تابعگون $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(C,E), -)$ همبافت $\mathbf{X}_{.}$ را دقیق نگه می‌دارد. چون همبافت $\mathbf{X}_{.}$ و $\mathrm{Y}_{.}$ بر روی حلقه R یکریخت می‌باشند، کافی است نشان دهیم که تابعگون $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(C,E), -)$ همبافت $\mathrm{Y}_{.}$ را دقیق نگه می‌دارد. بنا به فرض همبافت

$$\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C, R\Gamma\otimes_R E), \mathrm{Y}_{.})$$

دقیق است. حال یکریختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R C, R\Gamma\otimes_R E), \mathrm{Y}_{.})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R \mathrm{Hom}_R(C,E), \mathrm{Y}_{.})\\ &\cong \mathrm{Hom}_R\big(\mathrm{Hom}_R(C,E), \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(R\Gamma, \mathrm{Y}_{.})\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(C,E), \mathrm{Y}_{.})\end{aligned}$$

بنابراین $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(C,E), \mathrm{Y}_{.})$ دقیق می‌باشد. لذا حکم تمام است.

تبصره۱۴: فرض کنیم M یک R–مدول باشد. چون $R\Gamma$ به عنوان R–مدول صادق باوفا است، بنا به لم ۵.۲ از [۱۷]، M یک R–مدول C–تصویری گرنشتاین است اگر و تنها اگر $R\Gamma\otimes_R M$ یک $R\Gamma$ –مدول $R\Gamma\otimes_R C$– تصویری گرنشتاین می‌باشد. به ویژه این مطلب نتیجه می‌دهد که برای هر R–مدول M تساوی

$$\begin{aligned}C-\mathrm{Gpd}_R M = (R\Gamma\otimes_R C)\\ -\mathrm{Gpd}_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R M)\end{aligned}$$

برقرار می‌باشد.

اینک می‌خواهیم قضیه اصلی این مقاله را بیان و ثابت کنیم.

قضیه۱۵: فرض کنیم M یک$R\Gamma$ –مدول باشد. در این صورت M، $R\Gamma\otimes_R C$– تصویری گرنشتاین است اگر و تنها اگر M به عنوان R–مدول C–تصویری گرنشتاین باشد.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم M $R\Gamma\otimes_R C$–تصویری گرنشتاین باشد. نشان می‌دهیم M یک R–مدول C– تصویری گرنشتاین می‌باشد. رشته دقیق از $R\Gamma$ – مدول‌های

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{.}: 0 \to M \to (R\Gamma\otimes_R C)\otimes_{R\Gamma} P_{-1}\\ \to (R\Gamma\otimes_R C)\otimes_{R\Gamma} P_{-2}\\ \to \cdots\end{aligned}$$

را در نظر بگیرید که در آن برای هر i، P_i، یک $R\Gamma$ – مدول تصویری می‌باشد. چون R حلقه جابجایی می‌باشد، یکریختی‌های زیر را داریم

$$\begin{aligned}(R\Gamma\otimes_R C)\otimes_{R\Gamma} P_i &\cong (C\otimes_R R\Gamma)\otimes_{R\Gamma} P_i\\ &\cong C\otimes_R P_i\end{aligned}$$

P_i به عنوان R–مدول نیز تصویری می‌باشد، چون، $R\Gamma$ یک R–مدول آزاد می‌باشد. به ویژه همبافت $\mathbf{X}_{.}$ با همبافت

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'_{.}: 0 \longrightarrow M \longrightarrow C\otimes_R P_{-1} \longrightarrow\\ C\otimes_R P_{-2} \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

یکریخت می‌باشد. اینک فرض کنیم P یک R–مدول تصویری باشد. در این صورت $R\Gamma\otimes_R P$ یک $R\Gamma$ – مدول تصویری بوده و لذا بنا به فرض همبافت

$$\mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(\mathbf{X}_{.}, (R\Gamma\otimes_R C)\otimes_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R P)\big)$$

دقیق می‌باشد. اینک یکریختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(\mathbf{X}_{.}, (R\Gamma\otimes_R C)\otimes_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R P)\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}_{.}, (R\Gamma\otimes_R C)\otimes_R P)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(\mathbf{X}_{.}, \mathrm{Hom}_R(R\Gamma, C\otimes_R P)\big)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R(R\Gamma\otimes_{R\Gamma}\mathbf{X}_{.}, C\otimes_R P)\\ &\cong \mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}_{.}, C\otimes_R P)\end{aligned}$$

بنابراین همبافت $\mathrm{Hom}_R\big(\mathbf{X}_{\bullet}, C\otimes_R P\big)$ دقیق می‌باشد. حال چون همبافت $\mathbf{X}_{\bullet}$ روی حلقه R با $\mathbf{X}'_{.}$ یکریخت می‌باشد، همبافت $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}'_{.}, C\otimes_R P)$ دقیق می‌باشد. حال نشان می‌دهیم که برای هر R–مدول تصویری P، $\mathrm{Ext}^i_R(M, C\otimes_R P) = 0$ برای هر $i > 0$. بنا به فرض داریم:

$$\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}\big(M, (R\Gamma\otimes_R C)\otimes_{R\Gamma}(R\Gamma\otimes_R P)\big) = 0$$

برای هر $i > 0$. لذا مشابه بالا، می‌توان دید که $\mathrm{Ext}^i_R(M, C\otimes_R P) = 0$ برای هر $i > 0$. بنابراین M یک R–مدول C–تصویری گرنشتاین می‌باشد.

برعکس: فرض کنیم M به عنوان R–مدول، C–تصویری گرنشتاین باشد. نشان می‌دهیم M یک $R\Gamma$–مدول $R\Gamma \otimes_R C$–تصویری گرنشتاین می‌باشد. چون M یک R–مدول C–تصویری گرنشتاین می‌باشد، بنا به گزاره ۹.۲ از [۱۷]، رشته دقیق از R–مدول‌های $0 \to M \to C \otimes_R Q_{-1} \to L \to 0$ موجود است که در آن L C–تصویری گرنشتاین و Q_{-1} تصویری می‌باشد. بنا به ملاحظه ۲.۳ از [۱۷]، Q_{-1} را می‌توان R–مدول آزاد فرض کرد. دیاگرام جابجایی زیر از $R\Gamma$–مدول‌ها با سطرهای دقیق را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to M \to & & R\Gamma \otimes_R M & & \to L' \to 0 \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \theta & & \downarrow \varphi \\ 0 \to M \to & & R\Gamma \otimes_R (C \otimes_R Q_{-1}) & & \to L'' \to 0 \end{array}$$

بنا به لم مار، φ یک به یک بوده و $\mathrm{coker}\varphi = R\Gamma \otimes_R L$. چون سطر بالا روی R شکافتنی می‌باشد، یکریختی $L' \cong \bigoplus_{i=1}^{t-1} M$ را داریم که در آن t مرتبه گروه Γ می‌باشد. به ویژه L' یک R–مدول C–تصویری گرنشتاین می‌باشد. بنا به تبصره ۱۴، $\mathrm{coker}\varphi$ یک $R\Gamma \otimes_R C$–تصویری گرنشتاین بوده و در نتیجه بنا به قسمت اول به عنوان R–مدول C–تصویری گرنشتاین می‌باشد. لذا بنا به تبصره ۶ $R\Gamma$–مدول L'' به عنوان R–مدول C–تصویری گرنشتاین می‌باشد. حال با تکرار این روند برای L'' به جای M و تکرار آن، همبافت دقیق از $R\Gamma$ مدول‌های

$$\mathbf{X}_.: 0 \to M \to (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_R Q_{-1} \to (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_R Q_{-2} \to \cdots$$

به دست می‌آید که در آن برای هر i، Q_i یک R–مدول آزاد بوده و هم‌هسته هر یک از همریختی‌ها، به عنوان R–مدول C–تصویری گرنشتاین است. به آسانی می‌توان دید که برای هر i، یکریختی

$$(R\Gamma \otimes_R C)\otimes_R Q_i \cong (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_{R\Gamma} Q'_i$$

برقرار می‌باشد که در Q'_i یک $R\Gamma$–مدول آزاد می‌باشد به‌طوری‌که $Q'_i \cong R\Gamma \otimes_R Q_i$. فرض کنیم P یک $R\Gamma$–مدول تصویری باشد. نشان می‌دهیم $\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}_., (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_{R\Gamma} P)$ دقیق می‌باشد. بنا به ملاحظه ۳.۲ از [۱۷]، می‌توان P را آزاد در نظر گرفت. R–مدول آزاد Q را چنان اختیار می‌کنیم به‌طوری‌که $P \cong R\Gamma \otimes_R Q$. یکریختی‌های زیر را در نظر می‌گیریم؛

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}_., (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_{R\Gamma} P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(\mathbf{X}_., (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_{R\Gamma}(R\Gamma \otimes_R Q)\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}_., (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_R Q) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{R\Gamma}\big(\mathbf{X}_., \mathrm{Hom}_R(R\Gamma, C\otimes_R Q)\big) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(R\Gamma \otimes_{R\Gamma} \mathbf{X}_., C\otimes_R Q) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}_., C\otimes_R Q) \end{aligned}$$

یکریختی سوم بنا به تبصره ۱۰ برقرار بوده و یکریختی چهارم از قضیه الحاقی Hom و $\otimes$ حاصل می‌شود. چون هم‌هسته هر یک از همریختی‌های $\mathbf{X}_.$ به عنوان R–مدول C–تصویری گرنشتاین می‌باشد، $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{X}_., C\otimes_R Q)$ دقیق بوده و لذا $\mathrm{Hom}_{R\Gamma}(\mathbf{X}_., (R\Gamma \otimes_R C)\otimes_{R\Gamma} P)$ دقیق می‌باشد. برای اتمام اثبات، باید نشان دهیم که برای $R\Gamma$–مدول آزاد F،

$$\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}\left(M, \left(R\Gamma \otimes_R C\right)\otimes_{R\Gamma} F\right) = 0$$

برای هر $i > 0$. فرض کنیم F' یک R–مدول آزاد باشد به‌طوری $F \cong R\Gamma \otimes_R F'$. از آنجا مشابه بالا یکریختی‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}\big(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} (R\Gamma \otimes_R F')\big) \\ &\cong \mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_R F') \\ &\cong \mathrm{Ext}^i_R(R\Gamma \otimes_{R\Gamma} M, C \otimes_R F') \\ &\cong \mathrm{Ext}^i_R(C \otimes_R F') \end{aligned}$$

چون M به عنوان R–مدول، C–تصویری گرنشتاین می‌باشد، برای هر $i > 0$، $\mathrm{Ext}^i_R(M, C \otimes_R F') = 0$ و لذا $\mathrm{Ext}^i_{R\Gamma}(M, (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{R\Gamma} F) = 0$ برای هر $i > 0$. بنابراین M یک $R\Gamma$–مدول $R\Gamma \otimes_R C$–تصویری گرنشتاین می‌باشد. لذا حکم حاصل می‌شود. به عنوان نتیجه مستقیم از قضیه بالا، مطلب زیر را بیان می‌کنیم.

نتیجه۱۶: فرض کنیم M یک $R\Gamma$–مدول باشد. در این صورت

$$C - \mathrm{Gpd}_R M = (R\Gamma \otimes_R C) - \mathrm{Gpd}_{R\Gamma} M.$$

در ادامه می‌خواهیم مشابه قضیه ۱۵ را برای رده مدول‌های C–یکدست گرنشتاین قوی بیان کنیم.

قضیه۱۷: فرض کنیم M یک $R\Gamma$–مدول باشد. در این صورت، M یک $R\Gamma \otimes_R C$–یکدست گرنشتاین

قوی است اگر و تنها اگر M به عنوان R–مدول، C–یکدست گرنشتاین قوی باشد.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم M یک $R\Gamma \otimes_R C$–یکدست گرنشتاین قوی باشد. مشابه اثبات قضیه ۱۵ به آسانی می‌توان دید که M به عنوان R–مدول C–یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد. اینک فرض می‌کنیم $R\Gamma$–مدول M به عنوان R–مدول، C–یکدست گرنشتاین قوی باشد. به آسانی می‌توان دید که رده مدول‌های C–یکدست گرنشتاین قوی به طور تصویری، تحلیلی می‌باشد. لذا مشابه اثبات قضیه ۱۵، می‌توان همبافت دقیق از $R\Gamma$–مدول‌های

$$0 \to \mathrm{M} \to (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{\mathrm{R\Gamma}} \mathrm{P}_{-1} \to (R\Gamma \otimes_R C) \otimes_{\mathrm{R\Gamma}} \mathrm{P}_{-2} \to \cdots$$

به دست آورد به‌طوری‌که هم‌هسته همریختی‌ها به عنوان R–مدول C–یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد. اینک فرض کنیم F یک $R\Gamma$–مدول یکدست باشد. بنا به قضیه لازارد[1] [۱۴]، یک دستگاه مستقیم $(Q_i)_{i\in I}$ از $R\Gamma$–مدول‌های آزاد و متناهی مولد موجود است به‌طوری‌که $F \cong \lim_{\overrightarrow{i\in I}} Q$. برای هر $i \in I$ ، R–مدول آزاد و متناهی مولد Q_i' را چنان اختیار می‌کنیم به‌طوری‌که $Q_i \cong R\Gamma \otimes_R Q_i'$ قرار می‌دهیم $F' \cong \lim_{\overrightarrow{i\in I}} Q_i'$. با استفاده دوباره از قضیه لازارد F'یک R–مدول یکدست بوده و $F \cong R\Gamma \otimes_R F'$. اینک استدلال به کار رفته در اثبات قضیه ۱۵، نشان می‌دهد که M یک $R\Gamma$–مدول $R\Gamma \otimes_R C$–یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد.

تذکر۱۸: همان طوری که بیان شد، هر R–مدول C–یکدست گرنشتاین قوی، C–تصویری گرنشتاین می‌باشد. حال فرض کنیم C مدول دوگانی باشد (یعنی $\mathrm{id}_R C < \infty$). در این صورت بنا به قضیه ۸،۲،۴ از [۱۸]، بعد تصویری هر R–مدول یکدست، متناهی می‌باشد. بنابراین بعد C–تصویری هر R–مدول C–یکدست، متناهی می‌باشد. لذا در این حالت هر مدول C–تصویری گرنشتاین، C–یکدست گرنشتاین قوی می‌باشد. یادآوری می‌شود که R–مدول M را C–تصویری (به ترتیب، C–یکدست) گوییم، اگر R–مدول تصویری (به ترتیب، یکدست) P موجود باشد به‌طوری‌که $M = C \otimes_R P$.

فرض کنیم C یک R–مدول دوگانی باشد. در این صورت بنا به گزاره ۲،۳ از [۴]، $R\Gamma \otimes_R C$ یک $R\Gamma$ – مدول دوگانی می‌باشد. بنابراین نتیجه زیر را داریم.

نتیجه۱۹: فرض کنیم C یک R–مدول دوگانی باشد. در این صورت رده $R\Gamma$ –مدول‌های $R\Gamma \otimes_R C$–تصویری گرنشتاین و رده $R\Gamma$–مدول‌های $R\Gamma \otimes_R C$ – یکدست گرنشتاین قوی، بر هم منطبق می‌باشند.

تبصره۲۰: همان طوری که بیان شد، وایت نشان داده است که رده R–مدول‌های C–تصویری گرنشتاین، به طور تصویری تحلیلی می‌باشند. همان روش بیان می‌کند که رده مدول‌های C–یکدست گرنشتاین قوی نیز چنین می‌باشند. این مطلب و قضیه ۱۷ مطلب زیر را نتیجه می‌دهد.

نتیجه۲۱: فرض کنیم M یک $R\Gamma$ –مدول باشد. در این صورت

$$(R\Gamma \otimes_R C) - \mathrm{SGfd}_{R\Gamma} M = C - \mathrm{SGfd}_R M.$$

سپاسگزاری

این پژوهش مستخرج از طرح تحقیقاتی به شماره ۶/۲۰۰۳ مصوب تاریخ ۹۵/۱۲/۰۸ دانشکده علوم پایه دانشگاه گنبد کاووس می‌باشد. لذا از مدیریت پژوهشی و فناوری دانشگاه برای تامین مالی قدردانی می‌کنیم.

1. Lazard

فهرست منابع

[1] Araya, T. and Takahashi, R. and Yoshino, Y. (2005). *Homological invariants associated to semi-dualizing bimodules*, J. Math. Kyoto Univ. **45**, no. 2, 287-306.

[2] Auslander, M. and Bridger, M. (1969). *Stable module theory,* Mem. Amer. Math. Soc., **94.**

[3] Auslander, M. and Buchsbaum, D.A. (1957). *Homological dimension in local rings,* Trans. Amer. Math. Soc. **85**,390-405.

[4] Bahlekeh, A. and Kakaie, T. (2017). *Generalized Gorenstein dimension over group rings*, J. Algebraic system. **5** no. 1, 53-64.

[5] Brown, K.S. (1982). *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, **37**, Berlin, Heidelberg, New York, Springer.

[6] Enochs, E. and Jenda, O.M.G. (1995). *Gorenstein injective and projective modules*, Math. Z. **220**, 611-633.

[7] Enochs, E. and Jenda, O.M.G. and Torrecillas B. (1993). *Gorenstain flat modules*, Nanjing Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan, **10**, 1-9.

[8] Enochs, E.E. and Yassemi, S. (2004). *Foxby equivalences and cotorsion theories relative to semi-dualizing modules*, Math. Scand. **95**, 33-45.

[9] Foxby, H.B. (1972). *Gorenstein modules and related modules*, Math. Scand. **31**, 267-284.

[10] Gerko, A.A. (2001). *On homological dimensions*, Mat. Sb. **192**, no. 8, 79-94; translation in Sb. Mat. **192** (2001), no. 6, 2517-2552.

[11] Golod, S.E. (1984). *G-dimension and generalized perfect ideals*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **165**, 62-66 (Russian). Algebraic geometry and its applications.

[12] Holm, H. and JØrgensen P. (2006). *Semi-dualizing modules and related Gorenstein homological dimensions*, J. Pure Appl. Algebra **205**, 423-445.

[13] Holm, H. and White D. (2007). *Foxby equivalences over associative rings*, J. Math. Kyoto Univ. **47**, 781-808.

[14] Lazard, D. (1969). *Autour de la paltitude*, Bull. Soc. Math. France. **97**, 81-128.

[15] Serre, J. P. (1955). *Sur la dimension homologique des anneaux at des modules noetheriens,* Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko, (Tokyo), Science Council of Japan, 1956, pp. 157-189.

[16] Vasconcelos, W.V. (1974). *Divisor theory in module categories*, North-Holland Publishing Co., Amesterdam.

[17] Wagstaff, S. (2007). *Semi-dualizing modules and divisor class group*, Illinois J. Math. **51**, no. 1, 255-285.

[18] White, D. (2010). *Gorenstein projective dimension with respect to a semidualizing module*, J. Comm. Algebra **2**, 111-137.

[19] Xu, J. (1996). *Flat covers of modules*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1634**, Springer.